Сводимости между тощими идеалами*

И. ФАРАХ
Йоркский университет,
Торонто, Канада
e-mail: ifarah@yorku.ca

УДК 510.22

Ключевые слова: идеал, сводимость.

Аннотация

Мы строим нетощий идеал, который не является P-идеалом в том случае, если $\mathrm{Fin} \times \varnothing$ не сводимо к нему.

Abstract

I. Farah, Reductions between meager ideals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 213—219.

We construct a nonmeager ideal, which is not a P-ideal yet $\mathrm{Fin} \times \varnothing$ is not reducible to it.

Пусть $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ — идеалы на $\mathbb{N}$ или на некоторых других счётных множествах. Отображение $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ является *конечно-одно сводимостью* (также называемой сводимостью *Рудина—Бласса*) $\mathcal{I}$ к $\mathcal{J}$, если для всех $A \subseteq \mathbb{N}$ выполняется следующее:

$$A \in \mathcal{I} \ \text{ тогда и только тогда, когда } \ h^{-1}(A) \in \mathcal{J}.$$

Мы будем писать $\mathcal{I} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{J}$, если существует указанное h. Если опустить требование, чтобы h было конечно-одно сводимостью, мы получим определение обычной сводимости $\mathcal{I} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathcal{J}$ *Рудина—Кейслера*.

Мы будем отождествлять множество $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (как и $\mathcal{P}(A)$ для счётного множества A) с канторовским множеством $2^{\mathbb{N}}$ через отождествление множеств с их характеристическими функциями и, таким образом, рассматривать его как компактное метрическое пространство. Итак, мы можем говорить об аналитических, тощих и т. д. идеалах на $\mathbb{N}$. (Напомним, что подмножество множества $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *аналитическое*, если оно является непрерывным образом замкнутого подмножества некоторого сепарабельного полного метрического пространства, и что оно *тощее*, если оно является счётным объединением нигде не плотных подмножеств множества $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.) Заметим, что идеалы, естественным образом возникающие в математике, обычно являются аналитическими (см. [6, введение]). Через Fin мы обозначаем идеал всех конечных подмножеств в $\mathbb{N}$.

*Работа поддержана Советом по естественным наукам и исследованиям Канады и Национальным научным фондом США (грант DMS-0070798).

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 4, с. 213—219.

Соглашение. Мы всегда будем предполагать, что идеал $\mathcal{I}$ *собственный* (т. е. $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$) и что $\mathrm{Fin} \subseteq \mathcal{I}$.

Матиас [5] доказал, что $\mathrm{Fin} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}$ для каждого аналитического идеала $\mathcal{I}$ на $\mathbb{N}$. Джалали-Наини [2] и Талагранд [10] обобщили этот результат, доказав, что $\mathrm{Fin} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{I}$ тощий, что, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда $\mathcal{I}$ обладает свойством Бэра (т. е. равен открытому множеству по модулю некоторого тощего множества).

Идеал $\mathcal{I}$ является *P-идеалом*, если для каждой последовательности A_n ($n \in \mathbb{N}$) множеств в $\mathcal{I}$ существует такое множество $A \in \mathcal{I}$, что $A_n \setminus A$ конечно для всех n. Напомним, что $\mathrm{Fin} \times \varnothing$ — это «произведение Фубини» идеала всех конечных подмножеств в $\mathbb{N}$ с тривиальным идеалом $\varnothing$ (пусть $A_n = \{n \colon (m,n) \in A\}$):

$$\mathrm{Fin} \times \varnothing = \{A \subseteq \mathbb{N}^2 \colon \forall^\infty n \ (A_n = \varnothing)\}.$$

Этот идеал, очевидно, не является P-идеалом, и в некотором смысле он «минимальный»не-P-идеал. Во-первых, он порождается счётным числом множеств (множества $\{n\} \times \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$), а любой идеал, порождённый конечным числом множеств, очевидно, должен быть P-идеалом. Во-вторых, в [7, теорема 2.1] Солецкий доказал результат, аналогичный результату Матиаса: если $\mathcal{I}$ — аналитический идеал, не являющийся P-идеалом, то всегда $\mathrm{Fin} \times \varnothing \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}$. Поскольку легко видеть, что если $\mathrm{Fin} \times \varnothing \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}$, то $\mathcal{I}$ не P-идеал, результат Солецкого характеризует не-P-идеалы внутри класса всех аналитических идеалов.

Существует ли теорема, которая соотносится с теоремой Солецкого таким же образом, как теорема Джалали-Наини—Талагранда соотносится с теоремой Матиаса? В [11, теорема 11] Тодорсевич обобщил результат Солецкого, доказав, что $\mathrm{Fin} \times \varnothing \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}$ в том случае, когда $\mathcal{I}$ «определим» (множество действительных чисел *определимо*, если оно входит в $L(\mathbb{R})$ в модели Соловея, полученной коллапсированием по Леви большого кардинала к $\aleph_1$ [9]; при допущении больших кардиналов все множества, определимые формулой с действительными и ординальными параметрами, определимы в указанном смысле). Поэтому естественно задать следующий вопрос.

Вопрос 1 (Тодорсевич [11, замечание 4]). Выполняется ли $\mathrm{Fin} \times \varnothing \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}$ для каждого измеримого по Бэру идеала $\mathcal{I}$, не являющегося P-идеалом?

Мы дадим отрицательный ответ на вопрос Тодорсевича, допустив лишь очень слабый вариант аксиомы выбора. Более того, мы выделим точную формулировку аксиомы выбора, эквивалентную отрицательному ответу на этот вопрос.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Для всех тощих не-P-идеалов $\mathcal{I}$ выполняется* $\mathrm{Fin} \times \varnothing \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}$.
2. *Все идеалы на $\mathbb{N}$ обладают свойством Бэра.*

Доказательство теоремы 2 будет заключаться в ряде лемм, некоторые из которых хорошо известны. Первая из них — это переформулировка вышеупомянутого результата Джалали-Наини—Талагранда [2, 10] (напомним, что мы предполагаем, что $\mathrm{Fin} \subseteq \mathcal{I}$).

Лемма 3. *Для идеала $\mathcal{I}$ на $\mathbb{N}$ следующие утверждения эквивалентны*:

1) *$\mathcal{I}$ не является тощим*;
2) $\mathrm{Fin} \not\leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}$ *(или, что эквивалентно, для каждой конечно-одно сводимости $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует бесконечное $C \subseteq \mathbb{N}$, такое что $h^{-1}(C) \notin \mathcal{I}$)*;
3) *$\mathcal{I}$ не обладает свойством Бэра.* □

Для $A \subseteq \mathbb{N}$ определим *ограничение* $\mathcal{I} \restriction A$ идеала $\mathcal{I}$ на A следующим образом:

$$\mathcal{I} \restriction A = \{B \cap A\colon B \in \mathcal{I}\}.$$

Лемма 4. *Если $\mathcal{J}$ не является тощим идеалом, то $\mathcal{J} \restriction A$ — относительно нетощее подмножество множества $\mathcal{P}(A)$ для всех A.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что $A \notin \mathcal{J}$. Если $\mathcal{J} \restriction A$ тощий, то в соответствии с леммой 3 выберем разбиение s_j ($j \in \mathbb{N}$) множества A на такие попарно непересекающиеся конечные множества, что никакое бесконечное объединение множеств s_j не лежит в $\mathcal{J}$. Пусть t_j ($j \in \mathbb{N}$) — такое разбиение $\mathbb{N}$ на попарно непересекающиеся конечные множества, что $t_j \cap A = s_j$ для всех j. Тогда для бесконечного C имеем

$$\bigcup_{j\in C} t_j \supseteq \bigcup_{j \in C} s_j \notin \mathcal{J},$$

таким образом, $\mathcal{J}$ является тощим по лемме 3. □

Произведение Фубини $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ идеалов $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ на $\mathbb{N}$ — это идеал на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, заданный следующим образом:

$$A \in \mathcal{I} \times \mathcal{J} \iff \{m\colon \{n\colon (m,n) \in A\} \notin \mathcal{J}\} \in \mathcal{I}.$$

Лемма 5. *Если существует нетощий идеал, то существует и нетощий идеал, не являющийся P-идеалом.*

Доказательство. Сначала докажем следующее:

если $\mathcal{J}$ — нетощий идеал, то таков же и $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$.

Зафиксируем $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Нам нужно доказать, что это не RB-сводимость $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$ к Fin. Выберем такую последовательность бесконечных множеств $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \ldots$, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\{n\colon (m,n) \in h^{-1}(C_m)\} \in \mathcal{J}.$$

Мы можем выбрать C_m ($m \in \mathbb{N}$) рекурсивно, используя лемму 3, поскольку $\mathcal{J}$ нетощий. Пусть C — бесконечное подмножество $\mathbb{N}$, такое что $C_m \setminus C$ конечно для всех m. Так как h — конечно-одно сводимость, все вертикальные сечения множества $h^{-1}(C)$ лежат в $\mathcal{J}$, таким образом, оно принадлежит $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$.

Поскольку h было выбрано произвольно, по лемме 3 идеал $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$ не является тощим.

Возвращаясь к доказательству леммы, видим, что достаточно доказать хорошо известное утверждение, что $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$ не может быть P-идеалом. Заметим, что множества $A_n = n \times \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$) все лежат в $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$, и если $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ таково, что $A_n \setminus A$ конечно для всех n, то все его вертикальные сечения кофинитны и, следовательно, оно не может лежать в $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$. Доказательство завершено. $\square$

Через $f''A$ мы обозначаем образ множества A при отображении функцией f. Определим другой предпорядок на идеалах на $\mathbb{N}$. Если $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ — идеалы соответственно на множествах X и Y, пусть $\mathcal{I} \preceq \mathcal{J}$ означает, что существует конечно-одно сводимость $h\colon Y \to X$, такая что $X \setminus h''Y \in \mathcal{I}$ и

$$A \in \mathcal{I} \ \text{ влечёт } \ h^{-1}(A) \in \mathcal{J}$$

для всех $A \subseteq X$. Таким образом, $\mathcal{I} \preceq \mathcal{J}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{I} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}'$ и $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ для некоторого идеала $\mathcal{I}'$ на Y, такого что $\mathcal{I}' \supseteq \mathrm{Fin}$. (Этот предпорядок изучался в [1, 8, 12].)

Лемма 6. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\mathcal{I} \preceq \mathrm{Fin}$;
2) $\mathcal{I} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathrm{Fin}$;
3) $\mathcal{I}$ *порождён единственным множеством над* Fin.

Доказательство. Если выполняется первое утверждение, то существует такой идеал $\mathcal{I}'$, что $\mathcal{I} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}'$ и $\mathcal{I}' \subseteq \mathrm{Fin}$. Следовательно, $\mathcal{I}' = \mathrm{Fin}$, и выполнено второе утверждение. Остальные импликации ещё проще. $\square$

Пусть для двух идеалов $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ их *сумма* $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ — идеал на $\mathbb{N} \times \{0,1\}$, заданный следующим образом:

$$A \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J} \iff \{n\colon \langle n, 0\rangle \in A\} \in \mathcal{I} \text{ и } \{n\colon \langle n, 1\rangle \in A\} \in \mathcal{J}.$$

Для удобства при рассмотрении $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ мы будем немного упрощать обозначения и полагать, что $\mathcal{I}$ — идеал на $\mathbb{N} \times \{0\}$, а $\mathcal{J}$ — идеал на $\mathbb{N} \times \{1\}$, так что

$$\mathcal{I} \oplus \mathcal{J} = \{A \subseteq \mathbb{N} \times \{0,1\}\colon A \cap (\mathbb{N} \times \{0\}) \in \mathcal{I} \text{ и } A \cap (\mathbb{N} \times \{1\}) \in \mathcal{J}\}.$$

Пусть $\mathcal{I}^+$ обозначает коидеал всех $\mathcal{I}$-позитивных множеств, т. е. $\mathcal{I}^+ = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{I}$. В следующих двух леммах заключена основная идея доказательства теоремы 2.

Лемма 7. *Если* $\mathcal{I} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$, *то либо* 1) $\mathcal{I} \preceq \mathcal{J}_1$, *либо* 2) $\mathcal{I} \restriction A \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{J}_2 \restriction B$ *для некоторых* $A \in \mathcal{I}^+$ *и* $B \in \mathcal{J}_2^+$.

Доказательство. Предположим, что $h\colon \mathbb{N} \times \{0,1\} \to \mathbb{N}$ — сводимость Рудина—Бласса идеала $\mathcal{I}$ к $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$. Пусть

$$A = \mathbb{N} \setminus h''(\mathbb{N} \times \{0\}).$$

Допустим, что $A \in \mathcal{I}$, и пусть $h_1 = h \restriction (\mathbb{N} \times \{0\})$. Для произвольного $C \subseteq \mathbb{N}$ имеем

$$h^{-1}(C) \cap (\mathbb{N} \times \{0\}) = h^{-1}(C \cap A) \cap (\mathbb{N} \times \{0\}) \subseteq h^{-1}(A) \in \mathcal{J}_1,$$

следовательно, $C \in \mathcal{I}$ влечёт $h_1^{-1}(C) \in \mathcal{J}_2$ и $\mathcal{I} \preceq \mathcal{J}_2$.

Теперь предположим, что $A \in \mathcal{I}^+$. Положим $B = h^{-1}(A)$ и заметим, что $B \subseteq \mathbb{N} \times \{1\}$. Пусть $h_2 = h \restriction B$. Для $C \subseteq A$ имеем, что $C \in \mathcal{I}$ тогда и только тогда, когда

$$h_2^{-1}(C) = h^{-1}(C) \cap (\mathbb{N} \times \{1\}) \in \mathcal{J}_2,$$

следовательно, $\mathcal{I} \restriction A \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{J}_2 \restriction B$. □

Лемма 8. *Если $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ — аналитические идеалы и $\mathcal{J}$ — нетощий идеал, то из $\mathcal{I}_1 \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}_2 \oplus \mathcal{J}$ следует, что $\mathcal{I}_1 \preceq \mathcal{I}_2$.*

Доказательство. Из наших предположений и леммы 7 следует, что $\mathcal{I}_1 \restriction A \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{J} \restriction B$ для некоторых $A \in \mathcal{I}_1^+$ и $B \in \mathcal{J}^+$. В соответствии с результатом Матиаса $\mathrm{Fin} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}_1 \restriction A$, следовательно, $\mathrm{Fin} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{J} \restriction B$, а в соответствии с результатом Джалали-Наини—Талагранда $\mathcal{J} \restriction B$ — относительно тощее подмножество $\mathcal{P}(B)$. По лемме 4 $\mathcal{J}$ также тощий, и это противоречие завершает доказательство. □

Доказательство теоремы 2. Предположим, что все идеалы на $\mathbb{N}$ обладают свойством Бэра, и пусть $\mathcal{I}$ — идеал на $\mathbb{N}$, не являющийся P-идеалом. Зафиксируем последовательность A_n ($n \in \mathbb{N}$) в $\mathcal{I}$, такую что никакое $A \in \mathcal{I}$ не включает все A_n по модулю конечности. Пусть $\mathcal{I}_0$ — идеал, порождённый $\mathcal{I}$ и всеми такими $X \subseteq \mathbb{N}$, что для любого n $X \cap A_n$ конечно. Далее, пусть

$$\mathcal{J} = \left\{ C \subseteq \mathbb{N} \colon \bigcup_{n \in C} (A_{n+1} \setminus A_n) \in \mathcal{I}_0 \right\}.$$

Этот идеал обладает свойством Бэра, следовательно, по лемме 3 существует конечно-одно сводимость $h_0 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такая что $h_0^{-1}(B) \notin \mathcal{J}$ для каждого бесконечного $B \subseteq \mathbb{N}$. Если $\varphi \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ — фиксированная биекция, определим $h \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ так, чтобы для всех i, j выполнялось (используется обозначение $m = \{0, \ldots, m-1\}$)

$$h^{-1}(i, j) = i \times h_0(\varphi(i, j)).$$

Эта функция показывает, что $\mathrm{Fin} \times \varnothing \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}$ (см. [11, с. 224]), что и завершает доказательство обратной импликации.

Докажем теперь прямую импликацию. Предположим, что существует идеал, не обладающий свойством Бэра. По лемме 5 существует нетощий идеал $\mathcal{J}$, не являющийся P-идеалом. Пусть $\mathcal{I} = \mathrm{Fin} \oplus \mathcal{J}$. Тогда $\mathcal{I}$ не является P-идеалом, и по лемме 4 он нетощий. Поскольку $\mathrm{Fin} \times \varnothing \not\preceq \mathrm{Fin}$ по лемме 6, из утверждения леммы 8 следует искомое заключение. □

Идеал $\mathcal{I}$, фигурирующий в теореме 2 является «не слишком» тощим. Существует иерархия свойств, отражающих, насколько тощими являются идеалы на $\mathbb{N}$ (см. [4, определение 2.1]), и $\mathcal{I}$ удовлетворяет лишь самым слабым из них. Возможно, что ответ на вопрос Тодорсевича утвердительный в том случае, если измеримость по Бэру заменить некоторым более сильным свойством измеримости.

Другой относящийся сюда результат, доказанный в [7, теорема 3.4], касается P-идеала $\varnothing \times \mathrm{Fin}$. Он заключается в том, что аналитический P-идеал $\mathcal{I}$ не является F_σ тогда и только тогда, когда $\varnothing \times \mathrm{Fin} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}$. Поскольку в [11] доказано, что все определимые P-идеалы аналитические, результат Солецкого распространяется на все определимые P-идеалы: определимый P-идеал $\mathcal{I}$ не является F_σ тогда и только тогда, когда $\varnothing \times \mathrm{Fin} \leqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}$.

Как показывает следующий результат, аналогия со случаем не-P-идеалов распространяется и дальше.

Теорема 9. *Если существует нетощий P-идеал, то существует и тощий P-идеал $\mathcal{I}$, не являющийся F_σ, и при этом $\varnothing \times \mathrm{Fin} \nleqslant_{\mathrm{RB}} \mathcal{I}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{J}$ — нетощий P-идеал. Тогда $\mathcal{I} = \mathrm{Fin} \oplus \mathcal{J}$ — тощий P-идеал по лемме 4. Он не является F_σ, так как его ограничение на $\mathbb{N} \times \{1\}$ даже не измеримо по Бэру. Поскольку $\varnothing \times \mathrm{Fin} \not\leq \mathrm{Fin}$, то по лемме 6 из леммы 8 следует искомое заключение. $\square$

Хорошо известно, что условие теоремы 9 выполняется во многих моделях теории ZFC (неизвестно, существует ли модель теории ZFC, в которой все P-идеалы являются тощими; см. [3]). В связи с условием теоремы 2 напомним следующую открытую проблему.

Вопрос 10 (Матиас). Эквивалентны ли следующие утверждения:

1) все идеалы на $\mathbb{N}$ обладают свойством Бэра;
2) все множества действительных чисел обладают свойством Бэра?

Литература

[1] Hrušák M. MAD families and the rationals. — Preprint. — 2000.

[2] Jalali-Naini S.-A. The monotone subsets of Cantor space, filters and descriptive set theory. — PhD thesis. — Oxford, 1976.

[3] Just W., Mathias A. R. D., Prikry K., Simon P. On the existence of large p-ideals // J. Symbolic Logic. — 1990. — Vol. 55. — P. 457—465.

[4] Laflamme C. Strong meager properties for filters // Fund. Math. — 1995. — Vol. 146. — P. 283—293.

[5] Mathias A. R. D. A remark on rare filters // Infinite and Finite Sets, Vol. III / A. Hajnal et al., eds. — North-Holland, 1975. — (Coll. Math. Soc. Jänos Bolyai; Vol. 10). — P. 1095—1097.

[6] Solecki S. Analytic ideals // Bull. Symbolic Logic. — 1996. — Vol. 2. — P. 339—348.

[7] Solecki S. Analytic ideals and their applications // Ann. Pure Appl. Logic. — 1999. — Vol. 99. — P. 51—72.

[8] Solecki S. Filters and sequences // Fund. Math. — 2000. — Vol. 163. — P. 215—228.

[9] Solovay R. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. of Math. — 1970. — Vol. 92. — P. 1—56.

[10] Talagrand M. Compacts de fonctions mesurables et filters nonmesurables // Studia Math. — 1980. — Vol. 67. — P. 13—43.

[11] Todorcevic S. Definable ideals and gaps in their quotients // Set Theory: Techniques and Applications / C. A. DiPrisco et al., eds. — Kluwer Academic, 1997. — P. 213—226.

[12] Zapletal J. The nonstationary ideal and the other σ-ideals on ω_1. — Trans. Amer. Math. Soc. — 2000. — Vol. 352, no. 9. — P. 3981—3993.