К одной гипотезе
о нелокальных членах операторов рекурсии

Х. БАРАН
Силезский университет, Опава
e-mail: H.Baran@math.slu.cz

М. МАРВАН
Силезский университет, Опава
e-mail: M.Marvan@math.slu.cz

УДК 517.957

Ключевые слова: представление нулевой кривизна, оператор рекурсии, обратный оператор рекурсии, система Фурсова.

Аннотация

Приведены примеры, обобщающие недавнюю гипотезу о соответствии между представлениями нулевой кривизны и нелокальными членами обратных операторов рекурсии на произвольные операторы рекурсии в размерности два. А именно, предполагается, что нелокальные члены операторов рекурсии всегда связаны с представлением нулевой кривизны, не обязательно зависящим от параметра или принимающим значения в полупростой алгебре. В частности, стандартные псевдодифференциальные операторы рекурсии соответствуют абелевым алгебрам Ли.

Abstract

H. Baran, M. Marvan, A conjecture concerning nonlocal terms of recursion operators, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 23—33.

We provide examples to extend a recent conjecture concerning relation between zero curvature representations and nonlocal terms of inverse recursion operators to all recursion operators in dimension two. Namely, we conjecture that nonlocal terms of recursion operators are always related to a suitable zero-curvature representation, not necessarily depending on a parameter or taking values in a semisimple algebra. In particular, the conventional pseudodifferential recursion operators correspond to Abelian Lie algebras.

Введение

Хорошо известно, что интегрируемые системы нелинейных уравнений в частных производных в размерности два допускают иерархии симметрий, порождённые операторами рекурсии [11, 18]. Другое важное понятие, связанное с интегрируемостью, — это представления нулевой кривизны $[D_x - A, D_t - B] = 0$ Захарова—Шабата [1], где матрицы A и B принимают значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 7, с. 23—33.

Наличие представления нулевой кривизны, зависящего от неустранимого параметра, обычно является отправной точкой в применении действенных методов решения интегрируемых систем данного класса [23].

Известно, что между понятиями оператора рекурсии и представления нулевой кривизны существует тесная взаимосвязь (см., например, работы [6, 19] и ссылки в них). В подавляющем большинстве случаев наличие представления нулевой кривизны эквивалентно существованию пары Лакса [13]; если она известна, то применимы многочисленные методы нахождения оператора рекурсии $\mathcal{R}$ (см. цитированные выше работы). Недавно было обнаружено, что существует принципиально иная взаимосвязь между обратными операторами $(\mathcal{R} + \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}$ и представлениями нулевой кривизны; она подтверждается опубликованными и неопубликованными примерами [16, 17]. А именно, установлено, что нелокальные переменные, входящие в обратный оператор рекурсии $(\mathcal{R} + \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}$, можно объединить в одну нелокальную переменную Φ, принимающую значения в $\mathfrak{g}$ и непосредственно связанную с представлением нулевой кривизны следующим образом:

$$\Phi_x = [A, \Phi] + \ell_A S, \quad \Phi_t = [B, \Phi] + \ell_B S. \tag{1}$$

Здесь S — произвольная симметрия, $[-,-]$ означает коммутатор в матричной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а ℓ — линеаризация (производная Фреше):

$$\ell_F(U) = \sum_{k,I} \frac{\partial F}{\partial u_I^k} U_I^k.$$

Более того, параметр λ можно отождествить со спектральным параметром в представлении нулевой кривизны.

В рассматривавшихся ранее примерах алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была простой. Формула (1) верна и в случае, когда $\mathfrak{g}$ абелева — тогда она выражает хорошо известный факт: нелокальные члены обычных (псевдодифференциальных) операторов рекурсии [18] происходят из законов сохранения. Тем не менее рассмотрение ряда примеров создавало впечатление, что для алгебр $\mathfrak{g}$, содержащих нетривиальную разрешимую компоненту, гипотеза (1) в общем случае неверна. Простейшим из контрпримеров служил обратный оператор рекурсии для модифицированного уравнения КдФ, рассмотренный в [7, 14].

В данной работе мы, прежде всего, вновь возвращаемся к примеру уравнения мКдФ и показываем, что гипотеза (1) всё-таки верна и в этом случае, причём соответствующая алгебра Ли оказывается трёхмерной и разрешимой. Кроме того, показано, что простейшее возможное матричное представление этой алгебры приводит к неудобному описанию того же самого оператора рекурсии (которое тем не менее не противоречит гипотезе (1)). Далее мы рассматриваем прямой и обратный операторы рекурсии для другого уравнения; в этом случае оба оператора связаны с нетривиальной неполупростой алгеброй, и мы показываем, что в обоих случаях гипотеза (1) также выполняется.

Таким образом, приведённые в статье результаты наводят на мысль, что гипотеза (1) верна в следующей формулировке: нелокальные члены элементов алгебры операторов рекурсии интегрируемого уравнения в частных производных всегда связаны с подходящим представлением нулевой кривизны, возможно не содержащим параметра и не обязательно принимающим значения в полупростой алгебре (а поэтому не обязательно указывающим на интегрируемость системы). Также мы отмечаем, что представления нулевой кривизны можно записать различными способами в зависимости от выбранного представления алгебры Ли и что операторы рекурсии чувствительны к выбору такого представления. Использовать матричные представления «безопасно» лишь в случае полупростых алгебр.

В заключение отметим, что обычно оператор рекурсии $\mathcal{R}$ доставляет представление нулевой кривизны посредством спектральной задачи $\mathcal{R}S = \lambda S$ (см., например, [2]). Очевидно, что эта задача эквивалентна нахождению ядра оператора $\mathcal{R} - \lambda\,\mathrm{Id}$, т. е. обращению $\mathcal{R} - \lambda\,\mathrm{Id}$; в результате параметр λ входит в представление нулевой кривизны и обычно может быть выбран в качестве спектрального параметра. Поскольку обычные операторы рекурсии по своей природе линейны, в ряде случаев искать их оказывается проще, чем представления нулевой кривизны. Соответствующий пример содержится во втором разделе.

1. Пример — уравнение мКдФ

Вероятно, наиболее простым из нетривиальных примеров операторов рекурсии, связанных с неабелевыми разрешимыми алгебрами $\mathfrak{g}$, является обратный оператор рекурсии $\mathcal{R}^{-1}$ для хорошо известного модифицированного уравнения КдФ (см. [14]). На протяжении данного раздела изложение ведётся намеренно подробно. В следующем же разделе изложение более сжато, поскольку рассматриваемая там алгебра Ли является восьмимерной.

Запишем уравнение мКдФ в виде

$$u_t = u_{xxx} - 6u^2 u_x \tag{2}$$

и рассмотрим его линеаризацию

$$U_t = U_{xxx} - 6u^2 U_x - 12uu_x U. \tag{3}$$

Напомним [3], что инфинитезимальные симметрии уравнения (2) можно отождествить с производящими функциями $U(u, u_x, u_{xx}, \ldots)$, удовлетворяющими линеаризованному уравнению (3) в силу (2). Оператор рекурсии в форме Гэтри является автопреобразованием Бэклунда для линеаризованного уравнения (3) (см. [7, 14]). В самом деле, если U — исходная симметрия, то её образ $U' = \mathcal{R}U$ определяется системой

$$\begin{aligned} W_x &= uU, \\ W_t &= uU_{xx} - u_x U_x + (u_{xx} - 6u^3)U, \\ U' &= U_{xx} - 4u^2 U - 4u_x W. \end{aligned} \tag{4}$$

В системе (4) W — это нелокальная переменная преобразования Бэклунда. В данном случае (1) тривиально удовлетворяется, размерность $\mathfrak{g}$ равна единице и

$$A = \frac{1}{2}u^2, \quad B = uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{3}{2}u^4.$$

Поучительно рассмотреть оператор $(\mathfrak{R} + \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}$. Чтобы его найти, дополним последнюю строку системы (4) слагаемым λU в правой части и разрешим получившуюся систему относительно U; для этой цели удобно выбрать U, V, W, где $V = U_x$, в качестве новых переменных. Введя обозначение $\Psi = (W, U, V)^{\mathrm{T}}$, получим пару совместных уравнений

$$\Psi_x = \bar{A}\Psi + A', \quad \Psi_t = \bar{B}\Psi + B', \tag{5}$$

где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4u_x & 4u^2 - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U' \end{pmatrix},$$
$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 4uu_x & \bar{B}_{12} & -u_x \\ 4u_{xx} & 0 & -2u^2 - \lambda \\ \bar{B}_{31} & \bar{B}_{32} & -4uu_x \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} uU' \\ U'_x \\ B'_3 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В приведённых выше формулах использованы следующие обозначения:

$$\bar{B}_{12} = u_{xx} - 2u^3 - \lambda u, \quad \bar{B}_{31} = 4u_{xxx} - 8u^2u_x - 4\lambda u_x,$$
$$\bar{B}_{32} = 4uu_{xx} - 8u^4 - 2\lambda u^2 + \lambda^2, \quad B'_3 = U'_{xx} - 2u^2U' - \lambda U'.$$

Из уравнений (2) и (3) следует, что $\mathrm{sl}(3)$-значные матрицы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ образуют представление нулевой кривизны $\bar{A}_t - \bar{B}_x + [\bar{A}, \bar{B}] = 0$ для (2) и (3). Чтобы описать минимальную алгебру Ли, в которой принимает значения представление нулевой кривизны, применим калибровочное преобразование

$$G(\bar{A}) = G_xG^{-1} + G\bar{A}G^{-1}, \quad G(\bar{B}) = G_tG^{-1} + G\bar{B}G^{-1}$$

с матрицей

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4u & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(идея заключается в том, чтобы исключить u_x из $\bar{A}$ (см. [9])), и в результате уравнение (5) преобразуется в

$$\Theta_x = G(\bar{A})\Theta + GA', \quad \Theta_t = G(\bar{B})\Theta + GB', \tag{7}$$

где $\Theta = G\Psi = (W,\ U,\ V - 4uW)$. Результат можно выразить в терминах генераторов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ трёхмерной матричной алгебры Ли $\mathfrak{g}_\lambda$; имеем

$$G(\bar{A}) = u\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad G(\bar{B}) = (u_{xx} - 2u^3 - \lambda u)\mathbf{k}_1 + (2u^2 + \lambda)\mathbf{k}_2 + u_x\mathbf{k}_3,$$
$$\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко вычислить форму Киллинга [5, 8] алгебры $\mathfrak{g}_\lambda$. Определитель матрицы этой формы равен $-128\,\lambda^2$, откуда сразу следует, что $\mathfrak{g}_\lambda$ полупроста при $\lambda \neq 0$; поскольку алгебра $\mathfrak{g}_\lambda$ трёхмерна, она изоморфна $\mathrm{sl}(2)$. Несложно проверить, что при любом λ, не равном нулю, оператор рекурсии $(\mathcal{R} + \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}$ имеет вид (1), где $\mathfrak{g}_\lambda = \mathrm{sl}(2)$ и

$$A = \begin{pmatrix} -u & -\frac{1}{4}\lambda \\ 1 & u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -u_{xx} + 2u^3 + \lambda u & -\frac{1}{2}\lambda u_x + \frac{1}{2}\lambda u^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 \\ -2u_x - 2u^2 - \lambda & u_{xx} - 2u^3 - \lambda u \end{pmatrix},$$

$$U = \Phi_{12} + \frac{1}{4}\lambda\Phi_{21}.$$

Возникает искушение использовать соображения непрерывности и продолжить эти формулы на $\lambda = 0$. Но в этом случае имеем $U = \Phi_{12}$, $\Phi_{12,x} = -2u\Phi_{12}$, $\Phi_{12,t} = -2(u_{xx} + 4u^3)\Phi_{12}$ независимо от U', т. е. результат заведомо отличен от $\mathcal{R}^{-1}U'$. Это неудивительно, поскольку разрешимая алгебра $\mathfrak{g}_0$ не допускает представления (2×2)-матрицами.

Рассмотрим поэтому случай $\lambda = 0$ подробнее. Учитывая, что результат должен иметь вид (1), выберем новый базис генераторов в алгебре $\mathfrak{g}_0$: $\mathbf{l}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{k}_1$, $\mathbf{l}_2 = 2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$ и $\mathbf{l}_3 = 2\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2] = \mathbf{l}_2, \quad [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_3] = -\mathbf{l}_3, \quad [\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3] = 0. \tag{8}$$

В терминах генераторов $\mathbf{l}_i$ будем иметь

$$A = G(\bar{A}) = 2u\mathbf{l}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{l}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{l}_3,$$
$$B = G(\bar{B}) = (2u_{xx} - 4u^3)\mathbf{l}_1 - \frac{1}{2}(u_x + u^2)\mathbf{l}_2 + \frac{1}{2}(u_x - u^2)\mathbf{l}_3,$$

откуда, используя сокращённую запись $\Phi = \phi_1\mathbf{l}_1 + \phi_2\mathbf{l}_2 + \phi_3\mathbf{l}_3$ для нелокальных переменных, получим

$$[A, \Phi] = \left(-\frac{1}{4}\phi_1 + 2u\phi_2\right)\mathbf{l}_2 + \left(\frac{1}{4}\phi_1 - 2u\phi_3\right)\mathbf{l}_3,$$
$$[B, \Phi] = \left(\frac{1}{2}(u_x + u^2)\phi_1 + 2(u_{xx} - 2u^3)\phi_2\right)\mathbf{l}_2 +$$
$$+ \left(\frac{1}{2}(u_x - u^2)\phi_1 - 2(u_{xx} - 2u^3)\phi_2\right)\mathbf{l}_3,$$
$$\ell_A(U') = 2U'\mathbf{l}_1,$$
$$\ell_B(U') = 2(U'_{xx} - 6u^2U')\mathbf{l}_1 - \left(\frac{1}{2}U'_x + uU'\right)\mathbf{l}_2 + \left(\frac{1}{2}U'_x - uU'\right)\mathbf{l}_3.$$

Легко проверить, что формулы (1) принимают вид (7) после отождествлений $\phi_1 = 2V - 8uW$, $\phi_2 = -W - \frac{1}{2}U$, $\phi_3 = -W + \frac{1}{2}U$, и в результате

$$U = -\phi_2 + \phi_3.$$

Таким образом, формула (1) справедлива для всех обратных операторов рекурсии $(\mathcal{R} + \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}$ уравнения мКдФ.

Естественно задаться вопросом: можно ли вложить $\mathfrak{g}_0$ как подалгебру в $\mathrm{sl}(3)$, используя её присоединённое представление, и затем вычислить оператор рекурсии по формуле (1)? В принципе, ответ положительный: получится тот же самый результат, но в более сложной форме, включающий «лишние» нелокальности. Известно, что такие нелокальности характерны для неэффективных преобразований Бэклунда в смысле [15]. В таком случае избыточные нелокальности могут быть устранены с использованием техники бивертикальных полей.

2. Ещё один пример

Рассмотрим систему, полученную Фурсовым [4]:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx} + 3(u-v)u_{xx} + 3u_x^2 + 3u_xv_x + 3(u-v)^2u_x, \\ v_t &= v_{xxx} - 3(u-v)v_{xx} + 3u_xv_x + 3v_x^2 + 3(u-v)^2v_x. \end{aligned} \tag{9}$$

Её линеаризация имеет вид

$$\begin{aligned} U_t &= U_{xxx} + 3(u-v)U_{xx} + 3(2u_x + v_x + (u-v)^2)U_x + 3u_xV_x + \\ &\quad + 3(u_{xx} + 2(u-v)u_x)(U-V), \\ V_t &= V_{xxx} - 3(u-v)V_{xx} + 3v_xU_x + 3(u_x + 2v_x + (u-v)^2)V_x - \\ &\quad - 3(v_{xx} - 2(u-v)v_x)(U-V). \end{aligned} \tag{10}$$

Как и ранее, мы отождествляем инфинитезимальные симметрии системы (9) с парами (U,V) их производящих функций (зависящих от u, v и их производных), удовлетворяющих линеаризованному уравнению (10) в силу (9).

Оператор рекурсии $\mathcal{R}$ для уравнения (9) был построен в [20]. После исключения нелокальностей из коэффициентов этот оператор приобретает следующий вид: если (U,V) — симметрия, то её образ (U',V') при отображении $\mathcal{R}$ есть

$$\begin{aligned} U' &= U_{xx} + 2(u-v)U_x + (3u_x + 3v_x + (u-v)^2)U + 2u_xV + \\ &\quad + (u_{xx} + 2(u-v)u_x)P + 2Q + v_xR, \\ V' &= V_{xx} - 2(u-v)V_x + 2v_xU + (3u_x + 3v_x + (u-v)^2)V + \\ &\quad + (-v_{xx} + 2(u-v)v_x)P + u_xS + 2Q, \end{aligned} \tag{11}$$

где P, Q, R, S определяются из следующей совместной системы линейных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} P_x &= U - V, \\ P_t &= U_{xx} - V_{xx} + 3(u-v)(U_x + V_x) + 3(u_x + v_x + (u-v)^2)(U-V), \\ Q_x &= -(v_{xx} - (u-v)v_x)U - (u_{xx} + (u-v)u_x)V, \\ Q_t &= -(v_{xx} - (u-v)v_x)U_{xx} - (u_{xx} + (u-v)u_x)V_{xx} + \\ &\quad + (v_{xxx} - 4(u-v)v_{xx} - u_xv_x + v_x^2 + 3(u-v)^2v_x)U_x + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (u_{xxx} + 4(u-v)u_{xx} + u_x^2 - u_x v_x + 3(u-v)^2 u_x)V_x - \\
&- (v_{xxxx} - 4(u-v)v_{xxx} + 2v_x u_{xx} + (u_x + 9v_x + 6(u-v)^2)v_{xx} + \\
&+ 3(u-v)u_x v_x - 9(u-v)v_x^2 - 3(u-v)^3 v_x)U - \\
&- (u_{xxxx} + 4(u-v)u_{xxx} + (9u_x + v_x + 6(u-v)^2)u_{xx} + 2u_x v_{xx} + \\
&+ 9(u-v)u_x^2 - 3(u-v)u_x v_x + 3(u-v)^3 u_x)V, \\
R_x &= -2(u-v)R + 2u_x P - 2(u-v)U, \\
R_t &= -2(u_{xx} - v_{xx} + 3(u-v)u_x + 3(u-v)v_x + (u-v)^3)R + \\
&+ 2(u_{xxx} + (u-v)u_{xx} + 5u_x^2 + u_x v_x + (u-v)^2 u_x)P - \\
&- 2(u-v)U_{xx} + 2(2u_x - v_x - (u-v)^2)U_x - 2u_x V_x - \qquad (12)\\
&- 2(2u_{xx} - v_{xx} + 5(u-v)u_x + 3(u-v)v_x + 2(u-v)^3)U + \\
&+ 2(u_{xx} + 2(u-v)u_x)V, \\
S_x &= 2(u-v)S - 2v_x P + 2(u-v)V, \\
S_t &= 2(u_{xx} - v_{xx} + 3(u-v)u_x + 3(u-v)v_x + (u-v)^3)S - \\
&- 2(v_{xxx} - (u-v)v_{xx} + u_x v_x + 5v_x^2 + (u-v)^2 v_x)P + \\
&+ 2(u-v)V_{xx} - v_x U_x - (u_x - 2v_x + (u-v)^2)V_x + \\
&+ 2(v_{xx} - 2(u-v)v_x)U + \\
&+ 2(u_{xx} - 2v_{xx} + 3(u-v)u_x + 5(u-v)v_x + (u-v)^3)V.
\end{aligned}
$$

Этот оператор рекурсии можно переписать в стандартной псевдодифференциальной форме, если положить

$$
\begin{aligned}
P &= D_x^{-1}(U - V), \\
Q &= -D_x^{-1}[(v_{xx} - (u-v)v_x)U + (u_{xx} + (u-v)u_x)V], \\
R &= 2\big(D_x + 2(u-v)\big)^{-1}[u_x P - (u-v)U], \\
S &= -2\big(D_x - 2(u-v)\big)^{-1}[v_x P - (u-v)V]
\end{aligned}
$$

в соответствии с системой (12). Структура нелокальных членов схожа с нелокальной частью оператора рекурсии [22] другой системы, найденной Фурсовым [4, уравнение (16)].

В оставшейся части работы мы по-прежнему используем представление Гэтри. Заметим, во-первых, что уравнения для Q соответствуют линеаризованному закону сохранения ввиду формулы $(Q+v_xU+u_xV-uv(U+V))_x = \ell_F(U,V)$ при $F = u_xv_x - uv(u_x+v_x)$ и аналогичного выражения для t-компоненты.

Остальные уравнения, входящие в систему (12), не содержат Q, и их можно переписать в форме (5) с $\Psi = (P,R,S)^{\mathrm{T}}$. После калибровочного преобразования, исключающего все производные из $\bar{A}$, получаем

$$A = (u-v)(-2\mathbf{l}_1 + 4u\mathbf{l}_2 - 4v\mathbf{l}_3), \quad B = b_1\mathbf{l}_1 + b_2\mathbf{l}_2 + b_3\mathbf{l}_3,$$

где

$$
\begin{aligned}
b_1 &= -2u_{xx} + 2v_{xx} - 6(u-v)(u_x+v_x) - 2(u-v)^3, \\
b_2 &= 4(2u-v)u_{xx} - 4uv_{xx} - 4u_x^2 + 4u_x v_x + \\
&\quad + 4(4u-v)(u-v)u_x + 12(u-v)uv_x + 4(u-v)^3 u, \\
b_3 &= -4vu_{xx} - 4(u-2v)v_{xx} + 4u_x v_x - 4v_x^2 - \\
&\quad - 12(u-v)vu_x + 4(u-v)(u-4v)v_x - 4(u-v)^3 v,
\end{aligned}
$$

а матрицы

$$
\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

в свою очередь, удовлетворяют коммутационным соотношениям (8) в той же трёхмерной разрешимой алгебре $\mathfrak{g}_0$. Повторяя рассуждения предыдущего раздела, легко заключить, что $\mathcal{R}$ поставляет ещё один пример, подтверждающий гипотезу (1).

Рассмотрим обратный оператор $(\mathcal{R} + \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}$, полученный при разрешении системы (11), (12) относительно U, V после добавления λU и λV в правые части первого и второго уравнений (11) соответственно. В итоге вновь получается система вида (5), соответствующая $\Psi = (U, V, U_x, V_x, P, Q, R, S)$, однако теперь $\bar{A}$, $\bar{B}$ — (8×8)-матрицы. Вычисляя матрицу $A = G(\bar{A})$, получаемую исключением всех производных от u и v посредством калибровочного преобразования, имеем

$$
\begin{pmatrix}
-u-v & -2u & 1 & 0 & -2uv & 0 & -v & 0 \\
-2v & -u-v & 0 & 1 & 2uv & 0 & 0 & -u \\
-6uv-\lambda & -2uv & v & -u & u\lambda & -2 & -2uv & 0 \\
-2uv & -6uv-\lambda & -v & u & -v\lambda & -2 & 0 & -2uv \\
1 & -1 & 0 & 0 & -u-v & 0 & 0 & 0 \\
v\lambda & u\lambda & 2uv & 2uv & 0 & 2u+2v & 0 & 0 \\
-4u+2v & 2u & 0 & 0 & 4uv & 0 & -2u+2v & 0 \\
2v & 2u-4v & 0 & 0 & -4uv & 0 & 0 & 2u-2v
\end{pmatrix}.
$$

Минимальная алгебра Ли $\mathfrak{k}_\lambda$, которой принадлежит эта матрица, является восьмимерной. Её генераторы $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_8$ таковы, что

$$
\begin{aligned}
A &= \mathbf{k}_1 + uv\mathbf{k}_3 + u\mathbf{k}_4 + v\mathbf{k}_5, \\
B &= (6v^2 - 6uv - \lambda)\mathbf{k}_1 + (u-v)\mathbf{k}_2 + \\
&\quad + (vu_{xx} + uv_{xx} - u_x v_x + (3uv-v^2)u_x + (3uv-u^2)v_x + uv(u-v)^2 - \lambda v^2)\mathbf{k}_3 + \\
&\quad + (u_{xx} + 3uu_x + uv_x + u(u-v)^2 - \lambda u)\mathbf{k}_4 + \\
&\quad + (v_{xx} + vu_x + 3vv_x + v(u-v)^2 - \lambda v)\mathbf{k}_5 + \\
&\quad + (u_x - u^2 + uv)\mathbf{k}_6 + (v_x + uv - v^2)\mathbf{k}_7 + (u^2 - v^2)\mathbf{k}_8.
\end{aligned}
$$

Коммутационные соотношения в $\mathfrak{k}_\lambda$ имеют вид

$$
\begin{array}{lll}
[\mathbf{k}_6,\mathbf{k}_2]=\mathbf{k}_6\lambda, & [\mathbf{k}_5,\mathbf{k}_2]=-\mathbf{k}_5\lambda-\mathbf{k}_2, & [\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_7]=-2\mathbf{k}_4-6\mathbf{k}_5,\\
[\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_8]=-2\mathbf{k}_4\lambda+2\mathbf{k}_2, & [\mathbf{k}_8,\mathbf{k}_4]=6\mathbf{k}_6-2\mathbf{k}_8, & [\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_6]=-6\mathbf{k}_4-2\mathbf{k}_5,\\
[\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_8]=2\mathbf{k}_6\lambda-2\lambda\mathbf{k}_8, & [\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_1]=-2\mathbf{k}_4-2\mathbf{k}_5, & [\mathbf{k}_7,\mathbf{k}_1]=\mathbf{k}_5\lambda+\mathbf{k}_2,\\
[\mathbf{k}_5,\mathbf{k}_3]=2\mathbf{k}_3, & [\mathbf{k}_6,\mathbf{k}_7]=-2\mathbf{k}_2, & [\mathbf{k}_7,\mathbf{k}_2]=-\lambda\mathbf{k}_7,\\
[\mathbf{k}_5,\mathbf{k}_6]=-6\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_6, & [\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_8]=-8\mathbf{k}_4-4\mathbf{k}_5. & [\mathbf{k}_5,\mathbf{k}_4]=\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_5,\\
[\mathbf{k}_5,\mathbf{k}_1]=-\mathbf{k}_7, & [\mathbf{k}_6,\mathbf{k}_1]=\lambda\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_2, & [\mathbf{k}_6,\mathbf{k}_4]=5\mathbf{k}_6-2\mathbf{k}_8,\\
[\mathbf{k}_5,\mathbf{k}_8]=-12\mathbf{k}_1+2\mathbf{k}_8, & [\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_4]=\mathbf{k}_6, & [\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_4]=-\lambda\mathbf{k}_4+\mathbf{k}_2,\\
[\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4]=-2\mathbf{k}_3, & [\mathbf{k}_7,\mathbf{k}_4]=6\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_7, & [\mathbf{k}_7,\mathbf{k}_8]=-2\lambda\mathbf{k}_4+6\mathbf{k}_2,
\end{array}
$$

$$[\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_2]=-2\lambda\mathbf{k}_3+12\mathbf{k}_1+2\mathbf{k}_6-2\mathbf{k}_7-4\mathbf{k}_8,\quad [\mathbf{k}_5,\mathbf{k}_7]=-2\lambda\mathbf{k}_3+12\mathbf{k}_1-5\mathbf{k}_7-2\mathbf{k}_8.$$

Вычисление формы Киллинга показывает, что $\mathfrak{k}_\lambda$ полупроста, если и только если $\lambda\neq 0$. После этого стандартными рассуждениями устанавливается изоморфизм между $\mathfrak{k}_\lambda$ и присоединённым представлением простой алгебры $\mathrm{sl}(3)$ при всех $\lambda\neq 0$. Также мы получаем ранее неизвестное $\mathrm{sl}(3)$-значное представление нулевой кривизны для уравнения (9). Его x-компонента такова:

$$
\begin{pmatrix}
-2\frac{uv}{\sigma}-u+v+\frac{1}{3}\sigma & -4\frac{uv}{\sigma^2}-2\frac{u}{\sigma} & -2\frac{uv}{\sigma^2}\\
2uv-\sigma v & 4\frac{uv}{\sigma}-\frac{2}{3}\sigma & 2\frac{uv}{\sigma}-u\\
-2uv & -4\frac{uv}{\sigma}-2v & -2\frac{uv}{\sigma}+u-v+\frac{1}{3}\sigma
\end{pmatrix},
$$

где мы положили $\lambda=-\sigma^2$. Мы не приводим t-компоненты, однако её легко восстановить.

Рассмотрим теперь случай $\lambda=0$. В этом случае алгебра $\mathfrak{k}_0$ допускает нетривиальное разложение Леви в пятимерный разрешимый идеал (радикал) $\mathfrak{h}$ и трёхмерную простую подалгебру $\mathfrak{s}$. Генераторы

$$
\begin{gathered}
\mathbf{h}=\frac{1}{2}(\mathbf{k}_4+\mathbf{k}_5),\quad \mathbf{x}=-\frac{1}{4}\mathbf{k}_3,\quad \mathbf{y}=\frac{1}{4}(\mathbf{k}_6+\mathbf{k}_7),\\
\mathbf{l}_1=\frac{1}{2}\mathbf{k}_4-\frac{1}{2}\mathbf{k}_5,\quad \mathbf{l}_2=-\frac{3}{2}\mathbf{k}_1-\frac{3}{4}\mathbf{k}_6+\frac{3}{4}\mathbf{k}_7+\frac{1}{2}\mathbf{k}_8,\\
\mathbf{l}_3=-6\mathbf{k}_1+\frac{3}{2}\mathbf{k}_6+\frac{3}{2}\mathbf{k}_7,\quad \mathbf{l}_4=-9\mathbf{k}_1-\frac{3}{2}\mathbf{k}_6+\frac{3}{2}\mathbf{k}_7+3\mathbf{k}_8,\quad \mathbf{l}_5=-3\mathbf{k}_2
\end{gathered}
$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$
\begin{array}{llll}
[\mathbf{x},\mathbf{y}]=\mathbf{h}, & [\mathbf{h},\mathbf{x}]=2\mathbf{x}, & [\mathbf{h},\mathbf{y}]=-2\mathbf{y}, & \\
[\mathbf{h},\mathbf{l}_1]=\mathbf{l}_1, & [\mathbf{h},\mathbf{l}_2]=-\mathbf{l}_2, & [\mathbf{h},\mathbf{l}_4]=\mathbf{l}_4, & [\mathbf{h},\mathbf{l}_5]=-\mathbf{l}_5,\\
[\mathbf{x},\mathbf{l}_2]=-\mathbf{l}_1, & [\mathbf{x},\mathbf{l}_5]=-\mathbf{l}_4, & [\mathbf{y},\mathbf{l}_1]=-\mathbf{l}_2, & [\mathbf{y},\mathbf{l}_4]=-\mathbf{l}_5,\\
[\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2]=\mathbf{l}_3, & [\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_3]=\mathbf{l}_4, & [\mathbf{l}_2,\mathbf{l}_3]=\mathbf{l}_5. &
\end{array}
$$

Радикал является линейной оболочкой векторов $\mathbf{l}_i$, $i=1,\dots,5$. Матрицы A, B приобретают вид

$$
\begin{aligned}
A &= (u+v)\mathbf{h} - 4uv\mathbf{x} + \mathbf{y} + (u-v)\mathbf{l}_1 - \frac{1}{6}\mathbf{l}_3,\\
B &= b_1\mathbf{h} + b_2\mathbf{x} + (2u_x + 2v_x + (u-v)^2)\mathbf{y} + b_3\mathbf{l}_1 - (u_x - v_x)\mathbf{l}_2 - \\
&\quad - \frac{1}{2}(u-v)^2\mathbf{l}_3 + \left(\frac{1}{6}(u_x - v_x) + \frac{1}{3}(u^2 - v^2)\right)\mathbf{l}_4 - \frac{1}{3}(u-v)\mathbf{l}_5,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где

$$
\begin{aligned}
b_1 &= u_{xx} + v_{xx} + (3u+v)u_x + (u+3v)v_x + (u+v)(u-v)^2,\\
b_2 &= -4vu_{xx} - 4uv_{xx} + 4u_xv_x - 4(3u-v)vu_x + 4(u-3v)uv_x - 4uv(u-v)^2,\\
b_3 &= u_{xx} - v_{xx} + (3u-v)u_x + (u-3v)v_x + (u-v)^3.
\end{aligned}
$$

Опять-таки достаточно легко показать, что формула (5) эквивалентна (1).

Пожалуй, стоит также отметить, что подалгебра $\mathfrak{s}$, порождённая $\mathbf{h}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, с очевидностью изоморфна $\mathrm{sl}(2)$. Она задаёт не содержащее параметра представление нулевой кривизны для уравнения (9) с коэффициентами в $\mathrm{sl}(2)$:

$$
A_0 = \begin{pmatrix} u+v & -4uv \\ 1 & -u-v \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{11} \end{pmatrix},
$$

где

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= u_{xx} + v_{xx} + (3u+v)u_x + (u+3v)v_x + (u+v)(u-v)^2,\\
b_{12} &= -4vu_{xx} - 4uv_{xx} + 4u_xv_x - 4(3u-v)vu_x + 4(u-3v)uv_x - 4(u-v)^2uv,\\
b_{21} &= 2u_x + 2v_x + (u-v)^2.
\end{aligned}
$$

В дальнейшем мы предполагаем рассмотреть уравнение Карасу—Карасу—Саковича [10,21] и спаренное уравнение КдФ—мКдФ Красильщика—Керстена [12].

Мы с признательностью отмечаем поддержку гранта 201/04/0538 Агентства по грантам Чешской Республики (GAČR) и гранта 4781305904 Министерства образования, молодёжи и спорта Чешской Республики (MŠMT). Авторы глубоко признательны А. Сергееву за плодотворные обсуждения и доступ к работе [20] до её опубликования.

Литература

[1] Захаров В. Е., Шабат А. Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II // Функц. анализ и его прил. — 1979. — Т. 13, № 3. — С. 13—22.

[2] Bilge A. H. On the equivalence of linearization and formal symmetries as integrability tests for evolution equations // J. Phys. A. — 1993. — Vol. 26. — P. 7511—7519.

[3] Bocharov A. V., Chetverikov V. N., Duzhin S. V., Khor'kova N. G., Krasil'shchik I. S., Samokhin A. V., Torkhov Yu. N., Verbovetsky A. M., Vinogradov A. M. Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics. — Providence: Amer. Math. Soc., 1999. — (Translations of Math. Monographs; Vol. 182).

[4] Foursov M. V. Classification of certain integrable coupled potential KdV and modified KdV-type equations // J. Math. Phys. — 2000. — Vol. 41. — P. 6173—6185.

[5] Fulton W., Harris J. Representation Theory. A First Course. — Berlin: Springer, 2001.

[6] Gürses M., Karasu A., Sokolov V. V. On construction of recursion operators from Lax representation // J. Math. Phys. — 1999. — Vol. 40. — P. 6473—6490.

[7] Guthrie G. A. Recursion operators and non-local symmetries // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1994. — Vol. 446. — P. 107—114.

[8] Humphreys J. E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. — New York: Springer, 1972.

[9] Igonin S., Martini R. Prolongation structure of the Krichever—Novikov equation // J. Phys. A. — 2002. — Vol. 35. — P. 9801—9810.

[10] Karasu (Kalkanlı) A., Karasu A., Sakovich S. Yu. A strange recursion operator for a new integrable system of coupled Korteweg—de Vries equations // Acta Appl. Math. — 2004. — Vol. 83. — P. 85—94.

[11] Krasil'shchik I. S., Kersten P. H. M. Symmetries and Recursion Operators for Classical and Supersymmetric Differential Equations. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2000.

[12] Krasil'shchik I. S., Kersten P. H. M. Complete integrability of the coupled KdV—mKdV system // Lie Groups, Geometric Structures and Differential Equations — One Hundred Years After Sophus Lie / T. Morimoto, H. Sato, K. Yamaguchi, eds. — Math. Soc. of Japan, 2002. — (Advanced Stud. in Pure Math.; Vol. 37). — P. 151—171.

[13] Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equation // Comm. Pure Appl. Math. — 1975. — Vol. 28. — P. 141—188.

[14] Marvan M. Another look on recursion operators // Differential Geometry and Applications. Proc. Conf. Brno, 1995. — Brno: Masaryk University, 1996. — P. 393—402.

[15] Marvan M. Some local properties of Bäcklund relations // Acta Appl. Math. — 1998. — Vol. 54. — P. 1—25.

[16] Marvan M. Recursion operators for the Einstein equations with symmetries // Proc. Conf. «Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics». Kyiv, Ukraine, June 23—28, 2003. Part I. — 2004. — (Proc. Inst. Math. NAS Ukraine; Vol. 50). — P. 179—183.

[17] Marvan M., Sergyeyev A. Recursion operator for the Nizhnik—Veselov—Novikov equation // J. Phys. A. — 2003. — Vol. 36. — P. L87—L92.

[18] Olver P. J. Evolution equations possessing infinitely many symmetries // J. Math. Phys. — 1977. — Vol. 18. — P. 1212—1215.

[19] Sakovich S. Yu. Cyclic bases of zero-curvature representations: Five illustrations to one concept // Acta Appl. Math. — 2004. — Vol. 83. — P. 69—83.

[20] Sergyeyev A. Locality of symmetries generated by nonstandard recursion operators: A new application for implectic-symplectic factorization. — Preprint Math. Inst. Opava, GA 2/2006.

[21] Sergyeyev A. A strange recursion operator demystified // J. Phys. A. — 2005. — Vol. 38. — P. L257—L262.

[22] Sergyeyev A., Demskoi D. The Sasa—Satsuma (complex mKdV II) and the complex sine-Gordon II equation revisited: Recursion operators, nonlocal symmetries and more. — preprint `nlin.SI/0512042`.

[23] Takhtadzhyan L. A., Faddeev L. D. Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons. — Berlin: Springer, 1987.