

Представление нулевой кривизны для новой интегрируемой системы пятого порядка*

А. СЕРГЕЕВ

Силезский университет, Опава
e-mail: Artur.Sergyeyev@math.slu.cz

УДК 517.957+514.763.85

Ключевые слова: нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемость, представление нулевой кривизны.

Аннотация

Получено представление нулевой кривизны для одной из новых интегрируемых систем, найденных Михайловым, Новиковым и Ванг.

Abstract

A. Sergyeyev, Zero-curvature representation for a new fifth-order integrable system, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 7, pp. 227–229.

We present a zero curvature representation for one of the new integrable systems found by Mikhailov, Novikov, and Wang.

Хорошо известно, сколь важную роль играют представления нулевой кривизны в теории интегрируемых систем. Действительно, знание представления нулевой кривизны с существенным (спектральным) параметром позволяет построить множество точных решений рассматриваемой системы, в том числе многосолиitonные и конечнозонные решения, используя метод обратной задачи рассеяния и/или преобразования Бэклунда и Дарбу (см., например, классические монографии [1, 2, 5, 6] и ссылки в них).

Однако для интегрируемых систем, найденных с помощью симметричного подхода (см., например, [3, 4, 11–13] и приведённые там ссылки), по-видимому, не существует простой процедуры, позволяющей найти представление нулевой кривизны, пригодное для применения метода обратной задачи рассеяния: представления нулевой кривизны, возникающие из операторов рекурсии, часто приводят к псевдодифференциальным спектральным задачам, с которыми трудно работать, а метод Уолквиста—Эстабрука [7, 14] не полностью алгоритмичен (см., например, [1, 5]), как и прямой метод, предложенный в [9, 10].

*Работа поддержана грантом № 201/04/0538 Агентства по грантам Чешской Республики (GAČR) и грантом MSM 4781305904 Министерства образования, молодёжи и спорта Чешской республики.

В частности, такова ситуация для новой интегрируемой системы

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxxx} - 20uu_{xx} - 50u_xu_{xx} + 80u^2u_x + w_x, \\ w_t &= -6wu_{xx} - 2w_xu_{xx} + 96wu_x + 16u^2w_x, \end{aligned} \quad (1)$$

найденной Михайловым, Новиковым и Ванг [12] с помощью симметричного подхода. Эта система бигамильтонова и обладает оператором рекурсии [12]. Точнее, систему (1) можно получить [12] из другой интегрируемой системы, а именно системы (101) статьи [12], с помощью простой обратимой замены переменных, и следовательно, оператор рекурсии, гамильтонову и симплектическую структуры, найденные для системы (101) в [12], можно легко «перенести» на (1). Тем не менее представление нулевой кривизны для (1) до сих пор не было найдено, и цель настоящей статьи состоит в том, чтобы восполнить этот пробел.

Прежде всего заметим, что если мы положим $w = 0$, то система (1) сведётся [12] к хорошо известному уравнению Каупа—Купершмидта

$$u_t = u_{xxxx} - 20uu_{xx} - 50u_xu_{xx} + 80u^2u_x. \quad (2)$$

Представление нулевой кривизны для (2) легко извлекается из соответствующей пары Лакса [8] и имеет вид

$$(A_0)_t - (B_0)_x + [A_0, B_0] = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -u & 0 & -2 \\ \lambda & -u & 0 \end{pmatrix}, \\ B_0 &= \begin{pmatrix} 2u_{xxx} - 32uu_x + 24\lambda u & 4u_{xx} - 32u^2 & -144\lambda \\ b_{32}^{(0)} - 24\lambda u_x & -48\lambda u & 4u_{xx} - 32u^2 \\ 4\lambda u_{xx} - 20\lambda u^2 & b_{32}^{(0)} & -2u_{xxx} + 32uu_x + 24\lambda u \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а $b_{32}^{(0)} = -u_{xxxx} + 18uu_{xx} + 16u_x^2 + 12\lambda u_x - 16u^3 + 72\lambda^2$.

Система (1) линейна по w , w_t и w_x , поэтому можно попробовать искать представление нулевой кривизны для (1) в виде $A_t - B_x + [A, B] = 0$, где A и B — это (3×3) -матрицы вида $A = A_0 + A_1w$ и $B = B_0 + B_1w$, а A_1 и B_1 зависят только от u и производных u по x . В результате получаем следующее утверждение.

Утверждение. Матрицы

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -u & 0 & -2 \\ \lambda - \frac{w}{72\lambda} & -u & 0 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 2u_{xxx} - 32uu_x + 24\lambda u & 4u_{xx} - 32u^2 & -144\lambda \\ b_{32} - 24\lambda u_x & -48\lambda u & 4u_{xx} - 32u^2 \\ 4\lambda(u_{xx} - 5u^2) + \frac{w(u_{xx} - 8u^2)}{36\lambda} & b_{32} & -2u_{xxx} + 32uu_x + 24\lambda u \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $b_{32} = -u_{xxxx} + 18uu_{xx} + 16u_x^2 + 12\lambda u_x - 16u^3 + 72\lambda^2 - w$, задают представление нулевой кривизны для системы (1) со спектральным параметром λ , т. е. матричное уравнение

$$A_t - B_x + [A, B] = 0$$

эквивалентно (1) для всех $\lambda \neq 0$.

Литература

- [1] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987.
- [2] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.
- [3] Михайлов А. В., Шабат А. Б., Соколов В. В. Симметричный подход к классификации интегрируемых уравнений // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. — Киев: Наукова думка, 1990. — С. 213—279.
- [4] Михайлов А. В., Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Симметричный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, № 4. — С. 3—53.
- [5] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. — М.: Мир, 1989.
- [6] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986.
- [7] Estabrook F. B., Wahlquist H. D. Prolongation structures of nonlinear evolution equations. II // J. Math. Phys. — 1976. — Vol. 17, no. 7. — P. 1293—1297.
- [8] Kaup D. J. On the inverse scattering problem for cubic eigenvalue problems of the class $\psi_{xxx} + 6q\psi_x + 6r\psi = \lambda\psi$ // Stud. Appl. Math. — 1980. — Vol. 62. — P. 189—216.
- [9] Marvan M. On zero curvature representations of partial differential equations // Differential Geometry and Its Applications. Proc. Conf. Opava, Czechoslovakia, Aug. 24—28, 1992. — Opava: Silesian University, 1993. — P. 103—122. — <http://www.emis.de/proceedings/5ICDGA/>.
- [10] Marvan M. A direct procedure to compute zero-curvature representations. The case $\mathfrak{sl}_2$ // Secondary Calculus and Cohomological Physics. Proc. Int. Conf. Moscow, 1997. — 1998. — <http://www.emis.de/proceedings/SCCP97/>.
- [11] Mikhailov A. V., Novikov V. S. Perturbative symmetry approach // J. Phys. A. — 2002. — Vol. 35, no. 22. — P. 4775—4790.
- [12] Mikhailov A. V., Novikov V. S., Wang J. P. On classification of integrable non-evolutionary equations. — 2006. — [arXiv:nlin.SI/0601046](https://arxiv.org/abs/nlin.SI/0601046).
- [13] Mikhailov A. V., Yamilov R. I. Towards classification of $(2 + 1)$ -dimensional integrable equations. Integrability conditions. I // J. Phys. A. — 1998. — Vol. 31, no. 31. — P. 6707—6715.
- [14] Wahlquist H. D., Estabrook F. B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16, no. 1. — P. 1—7.

