



Издательство Московского университета • 1984

**В. А. МАЛЫШЕВ**

**Введение  
в евклидову  
квантовую  
теорию поля**



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ  
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

---

Механико-математический факультет

В.А.МАЛЫШЕВ

ВВЕДЕНИЕ В ЕВКЛИДОВУ КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ

Издательство  
Московского университета  
1985

Малышев В.А. Введение в евклидову квантовую теорию поля. — М.:Изд-во Моск. ун-та, 1985. 96 с.

В пособии дается введение в технику ультрафиолетовых перенормировок в конструктивной евклидовой квантовой теории поля. Эта техника объединяет идеи формальной теории перенормировок, кластерных разложений и ренормализационной группы.

Для студентов и аспирантов механико-математического факультета МГУ, а также для специалистов по теории вероятностей и математической физике.

Р е ц е н з е н т ы :

докт. физ.-мат. наук С.А.Молчанов;

докт. физ.-мат. наук Р.А.Минлос

Предисловие . . . . . 5

Часть I

§1. Обобщенные случайные поля:  
свободное поле, асимптотика ковариации на малых расстояниях; поле в точке и ультрафиолетовое урезание; гиббсовские перестройки.  $OS$ -положительность; аксиомы Остервальдера — Шредера; рефлексивная положительность; марковость процессов и полей; обратимость . . . . . 7

§2. Диаграммы:  
двоеточие и петли в диаграммах; модели  $:exp_{\xi}^{\varphi}:$ ,  $: \varphi^2 :$  . . . . . 16

§3. Теорема счета степеней:  
классификация моделей; оценки диаграмм . . . . . 22

§4.  $\infty$ -представление:  
секторы Хешпа; асимптотики расходящихся диаграмм по урезанию . . . . . 22

Часть II

План дальнейшего изложения . . . . . 36

§5. Разбиение на клетки в импульсном пространстве . . . . . 37

§6. Кластерное разложение на множестве клеток фазового пространства: область  $\varepsilon > \frac{1}{2}$ , основные идеи:  
индуктивная или ренормгрупповая обобщенная кластерная оценка; формула Тейлора; перенормированное расстояние; случай взаимодействия мод; среднее поле и диполи; комбинаторные множители . . . . . 42

§7. Область  $\varepsilon > \frac{1}{2}$ , общий случай:  
обобщенная ренормгрупповая процедура . . . . . 58

§8. Формальные перенормировки:  
перенормировка с вакуумными и массовыми диаграммами; теорема Боголюбова — Парасивка для сверхперенормируемых теорий; алгебраическая теория  $R$ -операции в общем случае . . . . . 62

§9. Область  $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$  :  
 неформальная перенормировка с вакуумными диаграммами . . . . . 73

§10.  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  или  $\varphi^4_3$  :  
 трудности с массовыми диаграммами . . . . . 77

§11. Путеводитель по дальнейшему чтению . . . . . 79

Дополнение 1. Одномерные поля:  
 процесс Орштейна - Уленбека; марковский оператор; гармонический и ангармонический осциллятор; гиббсовская перестройка и трансфер-матрица; формулы ФКН; связь со стохастическими дифференциальными уравнениями . . . . . 80

Дополнение 2. Фермионные поля:  
 язык грассмановых алгебр; евклидово поле Дирака;  $OS$ -положительность и евклидова ковариантность. 87

Литература . . . . . 95

Данное пособие соответствует лекциям, которые читались в 1977-1983 годах на механико-математическом факультете МГУ. Автор хотел дать читателю простой текст для начального чтения по ультрафиолетовой проблеме в конструктивной евклидовой квантовой теории поля. Названная наука является частью более обширной науки - квантовой теории поля (КТП), принадлежащей как физике, так и математике.

В физике на КТП можно смотреть либо как просто на средство систематизировать свойства элементарных частиц, либо как на наиболее фундаментальную (т.е. наиболее микроскопическую) область, из которой большая часть физики должна следовать как частный или предельный случай. Математическая же КТП состоит из двух основных частей: аксиоматической и конструктивной. Следует сказать также, что многие другие области математики претендуют, более или менее обоснованно, на тесную связь с КТП: представления группы Ли, классические уравнения Янга - Миллса и др.

Аксиоматическая КТП в настоящее время испытывает трудности в связи с калибровочными теориями и бессильна перед "квантовой гравитацией", в которой само пространство-время и принцип причинности не может быть сформулирован классически, как в аксиоматике Уайтмана. Конструктивная КТП, возникшая сначала как источник примеров для аксиоматической КТП, сейчас обрела полную самостоятельность, развитие в ней методы применяются в других областях.

Основным достижением (принадлежащим, главным образом, Глимму и Джимфю) конструктивной КТП является создание метода неформального построения сверхперенормируемых теорий. В данном пособии шаг за шагом объясняется этот метод, являющийся синтезом теории формальных перенормировок, кластерных разложений и ренормализационной группы. Чтение же оригинальных статей об этом вызывает большие трудности даже у опытных математиков. Это объясняется как необычностью задач и методов, так и нестандартностью изложения этих работ: отсутствие детальной разработки и даже формулировки центральных понятий, которые, как это может показаться, утонули в море вычислений; свободное использование без достаточного числа ссылок приемов и терминов, известных только работающим в КТП. Одна из причин написания этого пособия та, что у нас фактически нет работ, основанных

на этой технике.

Основной текст пособия нацелен на изложение разложения Глима - Джаффе "в пространстве фазовых клеток", которое отсутствует в книгах Саймона [14] и Глима - Джаффе [13]. Все остальные вопросы, наоборот, достаточно полно изложены в этих двух книгах и нет необходимости их переписывать.

Дополнение 1 может рассматриваться как краткое введение в главу 5 [14]. В дополнении 2 вводится формализм евклидовых фермионных полей.

Данное пособие можно рассматривать как вторую часть лекций автора [18], предварительное знакомство с которыми полезно, но не необходимо.

Наше изложение приспособлено к работе [3], основные методы заимствованы отсюда же. Мы полностью излагаем, образно говоря, теорию  $\varphi^4_{3-\varepsilon}$ , отсылая читателя за необходимой для  $\varphi^4_3$  частью доказательства (оценка диаграмм с логарифмическими массовыми расходимостями) к этой статье.

Требования к читателю минимальны: основы теории вероятностей, в первых лекциях - некоторые элементарные понятия теории обобщенных функций, в §8 и дополнении 2 - понятие семинварианта. Однако желательно знакомство со случайными полями, кластерными разложениями и общее представление о математической физике. § 1-3, 5-10 образуют единый текст, и пропуски при чтении создадут трудности в понимании.

На излагаемые здесь методы можно смотреть также как на конкретный бесконечномерный анализ, отличающийся от нелинейного анализа в банаховых пространствах; в последнем фактически повторяется конечномерная ситуация.

В настоящее время начинает появляться более рафинированная техника (см. конец §10), однако описываемые здесь более ранние подходы, по-видимому, еще долго не потеряют своего значения.

Пусть  $\mathcal{L}$  - линейное пространство над  $R$ , например  $\mathcal{L}$  есть  $C^\infty(R^D)$  или пространство Шварца  $S(R^D)$ . Мы будем рассматривать изоморфное  $\mathcal{L}$  пространство  $\mathcal{L}_1$ ; элементы  $\mathcal{L}$  будут обозначаться  $\varphi$ , соответствующие элементы  $\mathcal{L}_1$  -  $\xi_\varphi$ , таким образом

$$\xi_{\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2} = \lambda_1 \xi_{\varphi_1} + \lambda_2 \xi_{\varphi_2}. \quad (1)$$

Пусть  $P(\mathcal{L})$  - алгебра коммутативных многочленов от  $\xi_\varphi$ ;  $\langle \cdot \rangle$  - линейный функционал на этой алгебре, причем  $\langle 1 \rangle = 1$ . Такой функционал называется гауссовским (с нулевым средним), если  $\langle \xi_\varphi \rangle = 0$ ,

$$\langle \xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_n} \rangle = \begin{cases} 0, & n \text{ - нечётно,} \\ \sum \langle \xi_{i_1} \xi_{j_1} \rangle \dots \langle \xi_{i_m} \xi_{j_m} \rangle, & n=2m, \end{cases} \quad (2)$$

где сумма берется по всем разбиениям множества  $\{1, \dots, n\}$  на пары.

Замечание 1.1.

Кроме "бозонных" алгебр  $P(\mathcal{L})$  рассматриваются также "фермионные" грасммановы супералгебры  $G(\mathcal{L})$ , т.е. алгебры многочленов от антикоммутирующих переменных  $\xi_\varphi$ , а также тензорное произведение конечного числа алгебр  $P(\mathcal{L})$  и супералгебр  $G(\mathcal{L})$ .

Объектом евклидовой квантовой теории поля являются линейные функционалы на таких алгебрах, удовлетворяющие некоторым аксиомам, формулируемым ниже (с. 13-14).

Далее мы в основном будем рассматривать случай, когда  $\xi_\varphi$  - случайные величины на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  и

$$\langle \cdot \rangle = \int_{\Omega} d\mu. \quad (3)$$

Случайным полем будем называть систему случайных величин  $\xi_\varphi$  на  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ . При этом условие (1) для каждой  $\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2$  должно быть выполнено с вероятностью 1.

Мы будем рассматривать только такие случайные поля (т.е. меры  $\mu$ ), что  $\langle \xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_n} \rangle$  все конечно.

Примеры гауссовских полей.

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  - последовательность независимых гауссовских величин с нулевыми средними и единичной дисперсией, заданных на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ , которое можно реализовать, например, как произведение вещественных прямых.

Пусть на  $\mathcal{L}$  задано положительно-определенное скалярное произведение  $(\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $\overline{\mathcal{L}}$  - пополнение по нему. Выберем ортонормированный базис  $e_1, e_2, \dots$  в  $\overline{\mathcal{L}}$  и положим

$$\xi_{e_i} \equiv \xi_i, \text{ причем если } \varphi = \sum c_i e_i \in \overline{\mathcal{L}}, \sum |c_i|^2 < \infty, \text{ то положим}$$

$$\xi_\varphi = \sum c_i \xi_{e_i}, \quad (4)$$

где последний ряд очевидно сходится в средне-квадратичном. При этом  $\xi_\varphi$  образует гауссову систему и

$$\langle \xi_\varphi \rangle = 0, \quad \langle \xi_{\varphi_1} \xi_{\varphi_2} \rangle = (\varphi_1, \varphi_2). \quad (5)$$

Нетрудно проверить независимость  $\langle \cdot \rangle$  от выбора базиса.

Примеры.

- 1) Если  $\mathcal{L} = S(R^D)$  и  $(\varphi_1, \varphi_2) = \sigma^2 \int \varphi_1 \varphi_2 dx$ , то получается белый шум с дисперсией  $\sigma^2 R^D$ .
- 2) Если  $\mathcal{L} = S(R^D)$  и

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \frac{\tilde{\varphi}_1(k) \overline{\tilde{\varphi}_2(k)} dk}{k^2 + m^2}, \quad (6)$$

где  $\tilde{\varphi}(k) = (2\pi)^{-D/2} \int e^{i(k,x)} \varphi(x) dx$ ,

$$x = (x^1, \dots, x^D), \quad k = (k^1, \dots, k^D),$$

$$k^2 = (k^1)^2 + \dots + (k^D)^2, \quad (7)$$

то получаем поле, называемое свободным евклидовым полем массы  $m^2 > 0$ . Мы будем также рассматривать несколько более общий случай

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int \frac{\tilde{\varphi}_1(k) \overline{\tilde{\varphi}_2(k)} dk}{(k^2 + m^2)^{1+\epsilon}}, \quad (8)$$

$$m^2 > 0, \quad \epsilon \geq 0.$$

Таким образом, выбором скалярного произведения  $(\varphi_1, \varphi_2)$  можно получать (обобщенное) гауссово поле, т.е. систему случайных величин  $\xi_\varphi$  на том же пространстве, где были заданы  $\varphi_i$ .

Сходимость. Будем говорить, что последовательность мер  $\mu^{(n)}$  на  $(\Omega, \Sigma)$  сходится к мере  $\mu$ , если имеет место сходимость в смысле конечномерных распределений (слабая их сходимость), т.е. если  $\langle \exp i \xi_\varphi \rangle_{\mu^{(n)}}$  сходятся для всех

$\varphi$  к характеристическим функциям  $\langle \exp i \xi_\varphi \rangle_\mu$ .

Мы будем говорить также о сходимости функций Швингера, если

$$S^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \equiv \langle \xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_m} \rangle_{\mu^{(n)}}$$

сходятся для всех  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ .

При проверке сходимости  $\mu^{(n)}$  к некоторой мере  $\mu$  удобно доказывать сходимость  $\langle \exp i \xi_\varphi \rangle_{\mu^{(n)}}$  равномерно по  $\lambda$  в некотором интервале, содержащем 0 (отсюда следует непрерывность предельной функции в 0). Отсюда следует, что предельные функции являются характеристическими для некоторой меры  $\mu$ .

Решетчатые поля. Пусть  $\xi(t)$  - система случайных величин, занумерованных точками решетки  $t \in Z_\epsilon^D$  с шагом  $\epsilon > 0$ . Мы можем определить связанное с этой системой обобщенное случайное поле (для  $\mathcal{L} = C_0^\infty(R^D)$ ):

$$\xi_\varphi = \sum_{t \in Z_\epsilon^D} \xi(t) \varphi(t). \quad (9)$$

Рассмотрим, например, случай, когда  $\xi(t) \equiv 0$  при  $t \notin \Lambda$  (куб в  $R^D$ ), а остальные  $\xi(t)$  имеют совместную плотность распределения

$$\rho(x_t, t \in \Lambda \cap Z_\epsilon^D) = Z_{\Lambda, \epsilon}^{-1} \exp\left(-\sum_{t \in \Lambda \cap Z_\epsilon^D} (m^2 x_t^2 + g x_t^4)\right) -$$

$$-z \sum (x_t - x_{t'})^2, \quad (10)$$

$$|t - t'| = \varepsilon$$

$$t, t' \in \lambda \cap Z_\varepsilon^D$$

Важнейшая нерешенная проблема для  $D=4$ : существуют ли функции  $m^2 = m^2(\varepsilon)$ ,  $g = g(\varepsilon)$ ,  $z = z(\varepsilon)$  такие, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  случайное поле (9), определяемое распределением (10), сходится к предельному негауссовому полю (т.е. соответствующая последовательность  $\langle \cdot \rangle_{(\varepsilon)}$  сходится). Требования негауссовости существенно, так как при  $g(\varepsilon) \equiv 0$   $m^2(\varepsilon) = \varepsilon^D$ ,  $z = \varepsilon^{D-2}$ , имеется сходимость к гауссову полю ("свободному полю в  $\Lambda$ ").

Для  $D=1, 2, 3$  эта проблема решается положительно, для  $D \geq 5$  - отрицательно.

Свободное поле в точке.

Пусть  $\xi_\varphi$  - гауссово поле и  $\delta_x(\cdot) = \delta(x - \cdot)$  -  $\delta$ -функция в точке  $x \in R^D$ . Если  $\delta_x \in \mathcal{L}$ , то  $\xi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \xi \delta_x$  существует (имеет конечную дисперсию) и называется полем в точке  $x$ . Нетрудно доказать, что свободное поле в точке существует только для  $D=1$  и при этом

$$\langle \xi^2(x) \rangle = (2\pi)^{-1} \int \frac{dk}{k^2 + m^2} < \infty.$$

Определим двухчастичную обобщенную функцию Швингера свободного поля

$$\begin{aligned} C(x_1 - x_2) &\equiv S(x_1, x_2) \equiv S^{(2)}(\delta_{x_1}, \delta_{x_2}) = (\delta_{x_1}, \delta_{x_2}) \\ &= (2\pi)^{-D} \int \frac{\exp[i(k, x_1 - x_2)]}{k^2 + m^2} dk. \end{aligned} \quad (11)$$

Лемма 1.1.

Обобщенная функция  $C(x)$  умеренного роста имеет следующие свойства:

i)  $C(x)$  - изотропная положительная аналитическая функция при  $x \neq 0$ ;

ii) (поведение в бесконечности) при  $|x| \rightarrow \infty$

$$|C(x)| \leq \text{const } e^{-m|x|};$$

iii) (сингулярность в нуле) при  $|x| \rightarrow 0$

$$D=1 \quad C(x) \rightarrow \text{const}; \quad (11')$$

$$D=2 \quad C(x) + (2\pi)^{-1} \ln|x| \rightarrow \text{const};$$

$$D=3 \quad C(x) + \frac{c}{|x|} \rightarrow \text{const};$$

$$D=4 \quad C(x) + \frac{c}{|x|^2} + C_1 \ln|x| \rightarrow \text{const};$$

$$D \neq 3 \quad C(x) \sim \frac{c}{|x|^{D-2}} \quad (\text{такое поведение называется каноническим}).$$

Доказательство. В существовании интеграла (11) в бесконечности при  $x \neq 0$  можно убедиться, проинтегрировав несколько раз по частям. Ввиду очевидной изотропности будем считать, что

$$x^2 = \dots = x^D = 0. \quad \text{Тогда}$$

$$C(x^1, 0, \dots, 0) = (2\pi)^{-D} \int \frac{e^{-ix^1 / \sqrt{(k^{(2)})^2 + \dots + (k^{(D)})^2 + m^2}}}{\sqrt{(k^{(2)})^2 + \dots + (k^{(D)})^2 + m^2}} dk^{(2)} \dots dk^{(D)}, \quad (12)$$

в чем легко убедиться, вычисляя вычет в точке  $k^{(1)} = i \sqrt{(k^{(2)})^2 + \dots + (k^{(D)})^2 + m^2}$  комплексной плоскости  $k^{(1)}$ . Отсюда следует положительность и свойство  $ii$ ). Первые четыре свойства  $iii$ ) есть простое упражнение на асимптотику интеграла (12). Можно также воспользоваться явным представлением (11) через специальные (бесселевы) функции. Последнее свойство доказывается тривиально: сделаем в (11) замену  $k = \frac{k'}{|x|}$ . Тогда

$$C(x) = (2\pi)^{-D} \frac{1}{|x|^{D-2}} \int \frac{\exp[i(k', \frac{x}{|x|})]}{(k')^2 + |x|^2 m^2} dk'. \quad (13)$$

Последний интеграл по области  $|k'| \leq 1$  мажорируется сходимым  $\int (k')^{-2} dk'$ , а по остальной области в его сходимости можно убедиться интегрированием по частям.

Урезанное поле.

Пусть  $\eta(x)$  - вещественная функция из  $\mathcal{L}$ . Обозначим

$$\xi_\eta(x) = \xi_\eta(x-),$$

(т.е. формально  $\xi_\eta(x) = \eta * \xi = \int \eta(x-y) \xi(y) dy$ ).  
Тогда

$$\langle \xi_\eta(x) \xi_\eta(y) \rangle = \int \frac{|\tilde{\eta}|^2 e^{i(k, x-y)}}{k^2 + m^2} dk. \quad (15)$$

$\xi_\eta(x)$  называется урезанным полем в точке  $x$ .  
Например, пусть  $\tilde{\eta} = \chi_{[|k| \leq \kappa]}$ . Тогда  $\xi_\eta(x)$  обозначается  $\xi_\kappa(x)$ . В случае свободного поля  $\xi_\varphi$  поле  $\xi_\kappa(x)$  непрерывно по  $x$  в средне-квадратичном и

$$\int \xi_\kappa(x) \varphi(x) dx \rightarrow \xi_\varphi$$

в средне-квадратичном для  $\varphi \in \mathcal{L}$ . Негауссовы поля получают с помощью изменения меры.

#### Гиббсовские перестройки.

Пусть  $f$  — вещественная ограниченная снизу функция вещественного переменного. При  $\nu=1$ , когда существует свободное поле в точке  $\xi(x)$ , мы можем построить случайную величину

$$U_\Lambda = \int_\Lambda f(\xi(x)) dx, \quad (16)$$

где  $\Lambda$  — отрезок. Последний интеграл существует в средне-квадратичном, если, например,  $f$  непрерывна.

Замечание 1.2.

При  $\nu=1$  свободное поле можно считать известным процессом Орнштейна — Уленбека (гауссовским марковским стационарным процессом), траектории которого непрерывны с вероятностью 1. Поэтому и интеграл (16) определен с вероятностью 1.

Мера  $\mu_\Lambda$  с плотностью Радона — Никодима

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu_0} = \sum_{\Lambda}^{-1} \exp(U_\Lambda) \quad (17)$$

называется гиббсовской перестройкой меры  $\mu_0$ . Заметим, что справа стоит действительно плотность, так как ввиду ограниченности  $U_\Lambda$  снизу  $\exp(-U_\Lambda) \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu_0)$ , т.е.

$$\sum_{\Lambda}^{-1} \langle \exp(-U_\Lambda) \rangle_0 < \infty. \quad (18)$$

В общем случае мы можем определить урезанную меру (перестройку)

$$\frac{d\mu_{\Lambda, \kappa}}{d\mu_0} = \sum_{\Lambda, \kappa}^{-1} \exp(-U_{\Lambda, \kappa}), \quad (19)$$

$$U_{\Lambda, \kappa} = \int_\Lambda f(\xi_\kappa(x)) dx,$$

где  $f$  может зависеть от выбора  $m, \Lambda$  и  $\kappa$ , как от параметров.

Основная наша задача — найти такие функции  $f$  для заданной размерности  $\nu$  ( $\Lambda$  — везде далее единичный куб), чтобы при снятии обрезания (т.е. при  $\kappa \rightarrow \infty$ )  $\mu_{\Lambda, \kappa}$  сходилась к некоторой мере  $\mu_\Lambda$ .

#### ОТСТУПЛЕНИЕ — OS-ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ

В евклидовой квантовой теории поля представляют основной интерес поля, удовлетворяющие свойству рефлексивной положительности — основной аксиоме в системе аксиом Остервальдера — Шредера, которая позволяет по случайному полю строить релятивистское квантовое поле.

Если  $S^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  непрерывны (в топологии пространства Шварца) по каждой из  $\varphi_i$  в отдельности, то существует обобщенная функция  $S(x_1, \dots, x_n)$  на  $R^{\nu n}$  умеренного роста (т.е. из  $S'(R^{\nu n})$ ), что

$$S^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \int S(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (1)$$

(это есть теорема о ядре; см. [24, т.1, с.164]).

Удобная нам форма аксиом Остервальдера — Шредера состоит из двух требований:

I. Функции Швингера  $S^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  непрерывны в топологии пространства Шварца;

II. OS-положительность.

Определим сначала операцию отражения  $\mathcal{Q} : x^{\nu-1}$ ; для точек:  $\mathcal{Q}(\vec{x}, x^\nu) = (\vec{x}, -x^\nu)$ ,  $\vec{x} = (x^1, \dots, x^{\nu-1})$ ;



для  $\varphi \in \mathcal{S}(R^p) : (\partial\varphi)(x) = \varphi(\partial x)$ ;

для случайных величин:

$$\partial(\xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_n}) = \xi_{\partial\varphi_1} \dots \xi_{\partial\varphi_n}.$$

Последнее отображение продолжается до отображения  $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$  в себя, если  $\Sigma$  -  $\sigma$ -алгебра, порожденная случайными величинами  $\xi_{\varphi}$ .

Пусть  $L^+$  - подпространство  $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ , натянутое на случайные величины  $\xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_n}$ , где носители  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  лежат в области  $\{x : x^p > 0\}$ . Требование  $OS$ -положительности состоит в том, что для всех  $\xi \in L^+$

$$\langle (\partial\xi)\xi \rangle \geq 0. \quad (2)$$

Замечание 1.3. Кроме того, обычно требуется

III. Евклидова инвариантность функций Швингера

$$S^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = S^{(n)}(g\varphi_1, \dots, g\varphi_n), \quad (3)$$

$$(g\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x),$$

где  $g$  - элемент собственной евклидовой группы движений  $R^p$ .

Мы здесь будем заниматься только построением полей в конечном объеме. Нетрудно построить развиваемыми здесь методами поля на торе, инвариантные относительно группы движений тора. Задача о построении полей во всей плоскости, исходя из построенных полей в конечных объемах (термодинамический предельный переход), носит другой характер. Здесь, в частности, применима стандартная техника кластерных разложений, мы не будем на этом останавливаться (см. дополнение I).

Мы разберем теперь несколько методов получения полей со свойством  $OS$ -положительности.

I. Предел  $OS$ -положительных мер является  $OS$ -положительной мерой (мы предполагаем, что все функции Швингера конечны).

II. Если куб  $\Lambda$  симметричен относительно гиперплоскости  $x^p = 0$ , то поле  $\xi_{\varphi}$ , определенное формулами (1.9), (1.10),  $OS$ -положительно. Действительно, если в последней сумме под знаком экспоненты в (1.10) оставить только сумму по  $t, t'$ , принадлежащим гиперплоскости  $x^p = 0$ , то  $OS$ -положительность очевидна. Обозначим  $\langle \cdot \rangle_0$  - среднее по полученному таким образом распределению. Тогда оставшаяся часть плот-

ности представима в виде

$$\mu \cdot (\partial F)F, \quad F = \exp(-z \sum (x_t - x_{t'})^2),$$

где сумма по всем допустимым парам  $t, t'$ , таким, в которых хотя бы одна точка  $t$  или  $t'$  имеет координаты  $x^p > 0$ .

III. Предыдущий случай является частным случаем следующего принципа: если  $\langle \cdot \rangle_0$  -  $OS$ -положителен и

$$U_{\Lambda} = F + \partial F$$

то гиббсовская перестройка (1.17)  $OS$ -положительна, если  $F \in L^+$  и  $F$  ограничена снизу. Поэтому удобно выбирать урезание

$$\rho(x^1, \dots, x^p) = \rho(x^1, \dots, x^{p-1})\delta(x^p),$$

что обеспечивает  $OS$ -положительность (1.19).

IV. Гауссово поле с ковариацией

$$C(x-y) = \int \frac{\exp[i(k, x-y)]}{P(k)} dk, \quad (4)$$

где  $P(k)$  - многочлен четной степени  $\geq 4$ , не может быть  $OS$ -положительным. Действительно, например, при  $p=1$  достаточно показать, что  $\langle (\partial F)F \rangle < 0$  для  $F = \xi \delta^p(x-\cdot)$  с  $x = (\vec{x}, x^p)$  и  $x^p \geq 0$  достаточно мало. Для  $x^p = 0$  это проверяется простым вычислением, а для  $x^p > 0$  малых следует из соображений непрерывности.

На этом примере видно также различие между свойством марковости для случайных процессов и случайных полей. Процесс (4) будет марковским как поле для всех  $P(k)$ , но марковским как процесс он будет только для многочлена степени  $\leq 2$ , т.е. если  $P(k) = k^2 + m^2$ . Это - хорошо известный процесс Орнштейна - Уленбека, единственный гауссовский марковский процесс.

Таким образом,  $OS$ -положительность соответствует скорости марковости процесса, чем марковости поля. Однако не все стационарные марковские процессы являются  $OS$ -положительными, а только обратимые, т.е. те, в которых переходный оператор марковского процесса является самосопряженным в гильбертовом пространстве по инвариантной мере.

Докажем  $OS$ -положительность процесса Орнштейна - Улен-

бека. Пусть  $\Sigma_0$  -  $\sigma$ -алгебра в точке  $x=0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle \xi(\vartheta \xi) \rangle &= \langle M[\xi(\vartheta \xi) | \Sigma_0] \rangle = \\ &= \langle M[\xi | \Sigma_0] M[\vartheta \xi | \Sigma_0] \rangle = \\ &= \langle (M[\xi | \Sigma_0])^2 \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Во втором равенстве мы воспользовались марковостью, а в третьем обратимостью.

Замечание 1.4. Для конечных стационарных цепей Маркова с переходными вероятностями  $P_{ij}$  и стационарными вероятностями  $\pi_i$  условие обратимости имеет вид

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji} \quad \text{для всех } i, j$$

или, что эквивалентно,

$$P_{ij} = P_{ji}^{-1},$$

где

$$P_{ji}^{-1} = P(x(t-1)=j | x(t)=i)$$

ввиду

$$\begin{aligned} P(x(t-1)=j, x(t)=i) &= \pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji} = \\ &= P(x(t-1)=j, x(t)=i) = \pi_i P_{ji}^{-1}. \end{aligned}$$

У. Для свободного поля в размерности  $\nu$  доказательство  $OS$ -положительности повторяет (5), где в качестве  $\Sigma_0$  берется  $\sigma$ -алгебра на множестве  $\{x : x^{\nu} = 0\}$ . Иначе говоря, мы рассматриваем поле как марковский процесс, в котором в качестве времени берется  $x^{\nu}$ .

В наиболее сложных и интересных случаях (модель  $\varphi_3^4$ , см. ниже) марковость в этом смысле отсутствует. Однако  $OS$ -положительность имеет место.

## §2. ДИАГРАММЫ

Диаграммный язык и диаграммное образное мышление являются основой всех вычислений в квантовой теории поля. Основой диаграммной техники является формула (1.2). Напомним, что для гауссовой случайной величины  $\xi$  с  $\langle \xi \rangle = 0$

$$\langle \exp a \xi \rangle = \exp(a^2 \langle \xi^2 \rangle) \quad (1)$$

является целой функцией  $a$ .

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  - гауссова система с  $\langle \xi_i \rangle = 0$ , т.е.

$$\langle \exp(\sum a_i \xi_i) \rangle = \exp(\langle (\sum a_i \xi_i)^2 \rangle). \quad (2)$$

Разлагая левую и правую часть (2) в ряд по  $a_i$  и приравнявая коэффициенты перед  $a_1 \dots a_n$ , нетрудно доказать формулу (1.2).

Первая возможность построения негауссовых (в частности,  $OS$ -положительных) полей вида  $\lim_{\mu} \mu_{\lambda, \mu}$  для  $\mu_{\lambda, \mu}$  вида (1.19) состоит в том, чтобы: 1) найти  $f(\xi_{\mu}(x))$  такие, чтобы существовали случайные величины

$$\lim_{\mu} \int f(\xi_{\mu}(x)) dx = U_{\lambda}; \quad (3)$$

2) доказать устойчивость статистической суммы, т.е.

$$Z_{\lambda} = \langle \exp(-U_{\lambda}) \rangle_0 < \infty; \quad (4)$$

Из (3) и (4) тогда следует  $OS$ -положительность меры  $\mu_{\lambda}$  с плотностью

$$\frac{d\mu_{\lambda}}{d\mu_0} = Z_{\lambda}^{-1} \exp(-U_{\lambda}).$$

Мораль, которая будет следовать из дальнейшего изложения, состоит в том, что для этого и для других целей надо уметь вычислять моменты  $\langle U_{\lambda}^n \rangle_0$ . Для вычисления моментов многочленов мы можем воспользоваться формулой (1.2). Пусть сначала  $f(y) = y^k$ . Тогда по формуле (1.2)

$$\langle U_{\mu}^n \rangle_0 = \sum_G \int G(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (5)$$

где сумма берется по "диаграммам"  $G$ , которые мы сейчас введем.

Пусть каждой точке  $x_i$  соответствует  $K$  занумерованных отростков  $(i, 1), \dots, (i, K)$ . Разобьем все множество таких  $Kn$  отростков на пары. Если каждую такую пару  $\ell = \{(i, k_1), (j, k_2)\}$  интерпретировать как ребро, соединяющее вершины  $i$  и  $j$ , то получится граф (диаграмма)  $G$  с  $n$  вершинами и  $\frac{Kn}{2}$  ребрами. Сопоставим ей функцию

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\ell} \langle \xi_{\mathcal{X}}(x_i) \xi_{\mathcal{X}}(x_j) \rangle_0, \quad (6)$$

где произведение по всем ребрам  $\ell$  диаграммы  $G$ , а  $x_i$  и  $x_j$  - вершины ребра  $\ell$ . В формуле (5) сумма берется по всем таким диаграммам  $G$  (подчеркнем, что отростки занумерованы).

В диаграммах могут быть петли (пары вида  $\{(i, k_1), (i, k_2)\}$ ). Множитель в (6), соответствующий петле из точки  $x_i$  в  $x_i$ , есть дисперсия  $\langle \xi_{\mathcal{X}}^2(x_i) \rangle_0$ .

Легко подсчитывается, что дисперсия при урезании  $\mathcal{X}$  ведет себя следующим образом:

$$\langle \xi_{\mathcal{X}}^2(x) \rangle_0 \sim \begin{cases} C \ln \mathcal{X} & , d=2; \\ C \mathcal{X}^{d-2} & , d \geq 3. \end{cases} \quad (7)$$

Поэтому из свойства положительности в лемме 1.1 нетрудно вывести, что  $\langle U_{\mathcal{X}}^n \rangle_0 \rightarrow \infty$  при  $f(y) = y^k$ . Основная идея состоит в том, чтобы найти такие многочлены  $f$  (от случайной величины  $\xi_{\mathcal{X}}$ ), что при вычислении их моментов в диаграммах отсутствуют петли (это и даст  $\lim \langle U_{\mathcal{X}}^n \rangle_0 \neq \infty$ ).

Определение 2.1. Для гауссовой  $\xi$ ,  $\langle \xi \rangle = 0$

$$: \exp a \xi : \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\exp a \xi}{\langle \exp a \xi \rangle} = \exp(a \xi - a^2 \langle \xi^2 \rangle). \quad (8)$$

Введенная случайная величина (называемая виковского экспонентой) является (с вероятностью 1) целой функцией от  $a$ . Мы определим случайную величину  $:\xi^n:$  как коэффициент в разложении

$: \exp a \xi :$  в ряд Тейлора по  $a$

$$: \exp a \xi : \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} : \xi^n :. \quad (9)$$

Приравнявая (9) к разложению по  $a$  правой части (8), легко вычислить ( $\langle \xi \rangle = 0$ )

$$\begin{aligned} : 1 : &= 1, \quad : \xi : = \xi, \quad : \xi^2 : = \xi^2 - \langle \xi^2 \rangle, \\ : \xi^4 : &= \xi^4 - 6 \xi^2 \langle \xi^2 \rangle + 3 \langle \xi^2 \rangle^2 \end{aligned} \quad (10)$$

■ т.д.

Для гауссовой системы  $\xi_1, \dots, \xi_n$  определим  $:\xi_1^{k_1} \dots \xi_n^{k_n}:$  (виковский моном) как коэффициент в разложении

$$: \exp(\sum a_i \xi_i) : = \sum \frac{a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!} : \xi_1^{k_1} \dots \xi_n^{k_n} : \quad (11)$$

(подробнее о многочленах Вика см., например, [13, 14, 19]).

Если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  - гауссова система, то сравнение двух формул

$$\begin{aligned} \langle \prod_i \exp \xi_i \rangle &= \exp \langle (\sum_i \xi_i)^2 \rangle, \\ \langle \prod_i : \exp \xi_i : \rangle &= \exp [(\sum_i \xi_i)^2 - \sum_i \langle \xi_i^2 \rangle] \end{aligned} \quad (12)$$

показывает, что в правой части второй формулы (12) отсутствуют члены  $\langle \xi_i^2 \rangle$ , (дисперсии=самодействие=петли). По этой же причине, разлагая обе части (12) в ряд и пользуясь определением (11), получим

Лемма 2.1.

$$\langle : \xi_{\mathcal{X}}^{k_1}(x_1) : \dots : \xi_{\mathcal{X}}^{k_n}(x_n) : \rangle = \sum G(x_1, \dots, x_n), \quad (13)$$

где сумма по всем диаграммам  $G$  без петель (напомним снова, что из каждой точки  $x_i$  идет  $k_i$  занумерованных отростков, каждый из которых спарен, образуя ребро, с другим отростком).

Диаграмма общего вида состоит из  $n$  вершин  $v = 1, \dots, n$ , множества  $L$  ребер между этими вершинами и множества  $E$  (свободных) отростков. Пусть каждой вершине поставлена в соответствие функция  $g_v(x_v)$ , каждому ребру - "пропатор"  $C_{\ell}(x_{i(\ell)} - x_{j(\ell)})$ , каждому отростку  $\tau \in E$  - случайная величина  $\xi_{\tau}(x_{i(\tau)})$ , где  $i(\tau)$  - вершина, из которой выходит отросток. Дано также разбиение  $\cup_{\beta} E_{\beta}$  множества  $E$ . Вклад диаграммы  $G$  определяется так:

$$I_G = \int_{\wedge} \left[ \prod_e C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)}) \right] \left[ \prod_v g_v(x_v) dx_v \right]^x \times \left[ \prod_{z \in E_\beta} \xi(x_{i(z)}) \right] \quad (14)$$

Далее, если не оговорено противное, мы будем считать, что каждое  $E_\beta$  есть множество всех отростков, выходящих из некоторой вершины. Однако в §8 нам встретится другое разбиение.

Лемма 2.2. (интегрирование по частям).

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m$  - гауссова система и  $F$  - достаточно гладкая функция от  $\eta_1, \dots, \eta_m$  с конечной дисперсией и с конечной дисперсией своих производных (далее нам понадобятся только функции вида  $F = \rho e^{-Q}$ , где  $\rho$  - многочлен,  $Q$  - ограниченный снизу многочлен).

Тогда

$$\langle : \xi_1 \dots \xi_n : F(\eta_1, \dots, \eta_m) \rangle = \sum_{j=1}^m \langle \xi_1 \eta_j \rangle \langle : \xi_2 \dots \xi_n : \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \rangle \quad (15)$$

Доказательство.

Если  $F = : \eta_1 \dots \eta_m :$ , то формула (15) есть очевидное следствие леммы 2.1. В общем случае надо либо разложить  $F$  по полиномам Эрмита, либо проинтегрировать по частям в гауссовом интеграле (подробнее см. [13]).

Операция  $:$  над случайными величинами зависит от гауссовой меры; индексы  $: \cdot :_{\rho, \varepsilon}$  будут означать соответственно размерность и параметр  $\varepsilon$  в формуле (1.8),  $: \cdot :_{\rho, 0} = : \cdot :_{\rho}$ ,  $m^2$  фиксировано.

Мы будем называть  $f$  (эвклидовым) лагранжианом и говорить о построении  $: f :_{\rho, \varepsilon}$  модели, если мы нашли предел  $\mu_\wedge$  у меры (1.19).

Первой нетривиальной моделью, которую мы построим, будет двумерная

Модель  $: \exp a \xi :_2$ .

В этом случае  $U_\wedge \geq 0$  по определению и надо лишь доказать существование предела  $U_{\wedge, \varkappa}$ ,  $\varkappa \rightarrow \infty$ , в средне квадра-

тичном. Мы прямо вычислим дисперсию

$$\langle U_\wedge^2 \rangle = \langle \left( \int_{\wedge} \exp a \xi(x) dx \right)^2 \rangle = \langle \int_{\wedge} \int_{\wedge} \exp a^2 C(x-y) dx dy \rangle \quad (16)$$

Воспользовавшись логарифмической асимптотикой  $C(x)$  в лемме 1.1, мы видим, что последний интеграл не превосходит

$$\text{const} \int \int |x-y|^{-\frac{a^2}{2\pi}} dx dy$$

и, следовательно, наша модель существует при

$$a^2 < 4\pi. \quad (17)$$

Нетрудно доказать, что при  $a^2 \geq 4\pi$   $\langle U_\wedge^2 \rangle = \infty$

Модель  $: \varphi^4 :_2$

Лемма 2.3. Пусть  $\varkappa < \varkappa_1$ . Тогда для любого целого четного  $p > 0$

$$\langle \left( \int_{\wedge} ( : \xi_{\varkappa}^4(x) : - : \xi_{\varkappa_1}^4(x) : ) dx \right)^p \rangle_0 \leq C^p \rho^{2p} \varkappa^{-\delta p}, \quad (18)$$

где  $C, \delta > 0$  - константы, не зависящие от  $\varkappa$  и  $\rho$ .

Эта лемма будет доказана в §3. Здесь с ее помощью мы докажем существование этой модели.

Пологая  $\rho = 2$  мы получаем существование  $U_\wedge$  и конечность ее дисперсии. Однако, в сравнении с предыдущей моделью прибавляется неограниченность  $U_\wedge$  снизу. Точнее, имеет место

$$\begin{aligned} : \xi_{\varkappa}^4(x) : &= \xi^4 - 6\xi^2 \langle \xi^2 \rangle + 3 \langle \xi^2 \rangle^2 = \\ &= (\xi^2 - 3 \langle \xi^2 \rangle)^2 - 6 \langle \xi^2 \rangle^2 \geq -6 \langle \xi_{\varkappa}^2(x) \rangle^2 = \end{aligned}$$

2<sup>x</sup>-2088

$$= - \begin{cases} C & , d=1, \\ C \ln^2 x & , d=2, \\ C \ln^{2(d-2)} & , d \geq 3; \end{cases} \quad (19) \quad C > 0.$$

Мы выберем  $p = x^{\delta_1}$ ,  $0 < \delta_1 \ll \delta$ . Тогда

$$C^p p^2 p x^{-\delta p} \leq e^{-\beta x^{\delta_1}}$$

для некоторой константы  $\beta > 0$ . По неравенству Чебышева

$$P(|U_{1,x} - U_{1,x_1}| \geq 1) \leq \langle (U_{1,x} - U_{1,x_1})^p \rangle \leq e^{-\beta x^{\delta_1}}$$

Пользуясь оценкой Вика, получаем

$$P(e^{-U_n} \geq e^{c \ln^2 x + 1}) \leq e^{-\beta x^{\delta_1}}$$

Поэтому

$$\langle e^{-U_n} \rangle \leq \text{const} + \sum_{n=2}^{\infty} e^{c \ln^2 n + 1 - \beta(n-1)^{\delta_1}} < \infty.$$

### § 3. ТЕОРЕМА СЧЕТА СТЕПЕНЕЙ

Пусть  $G$  - связная диаграмма без отростков,  $V$ ,  $|V| = n$  - множество ее вершин,  $L$  - ребер; для любого  $V' \subset V$  обозначим  $L(V') \subset L$  множество всех ребер, имеющих оба конца в  $V'$ .

Пусть

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{e \in L} C_e (x_{i(e)} - x_{j(e)}) \quad (1)$$

Пусть  $C_e$  непрерывны и

$$C_e \sim \frac{\text{const}}{|x|^{d-\alpha_e}} \quad (2)$$

при  $|x| \rightarrow 0$ .

Теорема 3.1.

$G$  локально интегрируема тогда и только тогда, когда для всех  $V' \subseteq V$

$$\omega(V') = \omega_G(V') \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{e \in L(V')} \alpha_e + d(|L(V')| - |V'| + 1) < 0. \quad (3)$$

Замечание 3.1. Теорема 3.1, если выполнено условие  $0 < \alpha_e \leq d$ , эквивалентна утверждению:  $G$  локально интегрируема тогда и только тогда, когда  $\omega(V') < 0$  для всех собственных  $V'$ , т.е. таких, что граф с множеством вершин  $V'$  и ребер  $L(V')$  связан и одночастично неприводим (т.е. его нельзя сделать несвязным, отбрасывая лишь одно ребро).

Доказательство. Существует очень много способов доказательства этой теоремы. Мы приводим кратчайший из известных автору.

Необходимость. Пусть  $V' = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Фиксируем точки  $x_i \in V'$  и точку  $x_1$ . Пусть все они попарно различны. Будем интегрировать по  $x_2, \dots, x_k$  в окрестности  $x_1$ . На единичной сфере  $S \subset R^{d(k-1)}$  выберем  $k-1$  областей  $S_2, \dots, S_k$ , находящихся друг от друга на конечном расстоянии. Пусть  $A_m \subset R^{d(k-1)}$  - множество точек  $(x_2, \dots, x_k)$  таких, что при  $\ell = 2, \dots, k$  для фиксированного  $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \leq |x_\ell - x_1| \leq \frac{\varepsilon}{2^m},$$

луч в  $R^d$  из точки  $x_1$ , проходящий через  $x_\ell$ , пересекает единичную сферу  $S$  в области  $S_\ell$  (т.е.  $x_\ell$  лежит в соответствующем конусе). Для сходимости интеграла необходимо, чтобы интеграл по  $\bigcup_m A_m$  сходилась для всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$ . Но равномерно по  $m$  для некоторых констант  $C_i > 0$

$$C_1 \leq \frac{\int_{A_m} \prod_{e \in L(V')} C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)}) dx_2 \dots dx_k}{\left(\frac{\varepsilon}{2^m}\right)^{\dim A_m} \left(\frac{\varepsilon}{2^m}\right)^{-\sum_{e \in L(V')} (\nu - \alpha_e)}} \leq C_2. \quad (4)$$

Поэтому необходимо, чтобы

$$\dim A_m = \nu(|V'| - 1) > \sum_{e \in L(V')} (\nu - \alpha_e) = \nu|L(V')| - \sum_{e \in L(V')} \alpha_e.$$

Интуитивно говоря, расходимость может возникнуть, если несколько частиц коллапсируют к одной, находясь друг от друга и от этой частицы примерно на одинаковом расстоянии.

**Достаточность.** Индукция по числу  $|V'|$ . Случай  $|V'| = 2$  тривиален. Пусть утверждение теоремы имеет место для  $|V'| \leq m-1$  и всех  $L(V')$  и  $\alpha_e$ . Докажем эту теорему для  $|V'| = m$ .

Выделим две точки, например,  $x_1$  и  $x_2$ . Пусть  $L_{12}$  - множество ребер между вершинами 1 и 2;  $G_{12}$  - фактор-граф графа  $G$ , полученный отождествлением вершин 1 и 2 и отбрасыванием ребер из  $L_{12}$ ; обозначим

$$G_{12}(x_2, \dots, x_n) = \prod_{e \in L_{12}} C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)}),$$

где  $x_1 = x_2$ .

Рассмотрим множество  $\{x_1, \dots, x_n\}$  такое, что для фиксированного малого  $\varepsilon > 0$

$$|x_1 - x_2| < \varepsilon, \quad \min_{(i,j) \neq (1,2)} |x_i - x_j| \geq \varepsilon.$$

Фиксировав  $x_2, \dots, x_n$  проинтегрируем по  $x_1$  в области ( $\varepsilon$  фиксировано и мало)

$$|x_1 - x_2| < \varepsilon, \quad \min_{i \geq 3} |x_1 - x_i| \geq \varepsilon.$$

Пусть для всех  $i, j \geq 2$  будет  $|x_i - x_j| \geq \varepsilon$ . Значение  $S$  этого интеграла удовлетворяет неравенству

$$S \leq C G_{12}(x_2, \dots, x_n) \varepsilon^{\nu - \sum_{e \in L_{12}} (\nu - \alpha_e)}. \quad (5)$$

Это следует из того, что существует константа  $\nu > 0$ , не зависящая от  $\varepsilon$  для  $i \geq 3$  и всех  $e$

$$C_e(x_i - x_1) \leq \nu C_e(x_i - x_2).$$

Пусть  $\min |x_i - x_j| = \varepsilon$  достигается для пары  $(i, j)$ . Построим новый граф  $G'_{12}$ , добавляя к  $G_{12}$  одно ребро  $e'$  между вершинами  $i$  и  $j$ , причем

$$\nu - \alpha_{e'} = -\nu + \sum_{e \in L_{12}} (\nu - \alpha_e).$$

Сходимость интеграла по  $x_2, \dots, x_n$  (где  $\varepsilon = \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$ ) от правой части (5) эквивалентна сходимости интеграла для диаграммы  $G'_{12}$ .

Рассмотрим любое подмножество вершин  $V'$  графа  $G'_{12}$ .

1) Если по крайней мере одна из вершин  $i$  и  $j$  не принадлежит  $V'$ , то

$$\omega_{G'_{12}}(V') = \omega_G(V');$$

2) если  $i, j \in V'$ , то

$$\omega_{G'_{12}}(V') = \omega_G(V' \cup \{1\}).$$

Тогда если  $\omega_G(V') < 0$  для всех  $V'$ , то

$$\omega_{G'_{12}}(V') < 0 \quad \text{для всех } V' \text{ и всех выборов}$$

точек 1, 2. Последнего достаточно для сходимости интегралов для всех  $G'_{12}$  и, следовательно, всех интегралов от правой части (5). Теорема доказана.

Рассмотрим связанные одночастично-неприводимые диаграммы в модели  $\varphi^n: \mathcal{D}, \varepsilon \in \mathcal{P} = |V|$  вершинами, возникающие при подсчете моментов

$$\langle (\int \varphi^n dx)^P \rangle$$

Для произвольного  $V' \subseteq V$  рассмотрим поддиаграмму  $G'$ , состоящую из  $|V'|$  вершин,  $|L(V')|$  ребер, соединяющих вершины  $V'$  и называемых внутренними ребрами. Ребра, имеющие только один конец в  $V'$ , назовем внешними для  $G'$ . Если число внешних ребер равно  $b$ , то

$$L' = |L(V')| = \frac{nV' - b}{2}$$

$$\omega(V') = \nu(1 + L' - V') - 2(1 + \varepsilon)L' = \nu + V' \left( \frac{\nu n}{2} - \nu - n \right) + b \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right) - \varepsilon(V'n - b) \quad (6)$$

Далее мы обозначаем  $L' = L$ ,  $V = V' = |V'|$ .

Замечание 3.2.

$$\alpha_L = 2(1 + \varepsilon),$$

что доказывается повторением рассуждений в формуле (1.13), если  $0 < 2(1 + \varepsilon) < \nu$ .

#### Классификация моделей.

- А) теории без расходимостей;
- Б) сверхперенормируемые теории - если только конечное число диаграмм примитивно расходится (т.е.  $\omega(V) \geq 0$ );
- В) перенормируемые теории - могут примитивно расходиться диаграммы только при  $b \leq b_0$ ;
- Г) остальные называются неперенормируемыми.

#### Примеры моделей.


1).  $:\varphi^n:_2$ ,  $\omega = 2(1 - V)$  не зависит от  $n$  и  $b$

и все диаграммы сходятся;

2).  $:\varphi^2:_\nu$ ,  $\omega = \nu - 2V + b \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right)$ .

Если  $\nu \geq 2$  и  $b = 2, 4, \dots$ , то все диаграммы сходятся. Могут расходиться только диаграммы с  $b = 0$  (такие называются вакуумными).

При  $\nu \geq 3$  все сходятся.

При  $\nu = 4$  расходится только 

При  $\nu \geq 4$  конечное число (вакуумных) диаграмм расходится.

3).  $:\varphi^4:_3$ . Расходятся две вакуумные диаграммы (в которых  $b = 0$ )



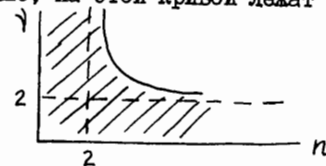
и одна с  $b = 2$  (массовая)

4).  $:\varphi^6:_3$ ,  $\omega = 3 - \frac{b}{2}$  перенормируемая, но не сверхперенормируемая.

5).  $:\varphi^8:_3$ ,  $\omega = 4 + V - \frac{b}{2}$  неперенормируемая.

6).  $:\varphi^4:_4$ ,  $\omega = 4 - b$  перенормируемая, но не сверхперенормируемая.

В плоскости  $(\nu, n)$  кривая  $\frac{\nu n}{2} - \nu - n = 0$  отделяет сверхперенормируемые теории, лежащие ниже ее, от неперенормируемых, лежащих выше, на этой кривой лежат перенормируемые теории.



Мы докажем теперь лемму 2.3. Для этого рассмотрим следующий интеграл для финитных функций  $g_V, \tilde{g}_V \geq 0$

$$\int G(x_1, \dots, x_n) \prod_V g_V(x_V) dx_V = (2\pi)^{-\nu|L|} \int \prod_L \frac{e^{-i(p_L, \sum_V e_{Vl} x_V)}}{(p_L^2 + m^2)^{1+\varepsilon}} \times \eta(l) dp_L \prod_V g_V(x_V) dx_V = (2\pi)^{-\nu|L|} \int \prod_V g_V(x_V) e^{-i(\sum_L e_{Vl} p_L, x_V)} dx_V \times \prod_L \frac{dp_L \eta_L(p_L)}{(p_L^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}, \quad (7)$$

где матрица инцидентности

$$\varepsilon_{v,e} = \begin{cases} 1 & , \text{ если ребро } \ell \text{ входит в вершину } v, \\ -1 & , \text{ если выходит,} \\ 0 & \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

(мы ориентируем ребра произвольно, результат в силу симметрии  $C(x)$  не зависит от ориентации). Введенный дополнительно множитель  $\eta_e(p_e)$  называется урезанием для линии  $\ell$ .

Рассмотрим левую часть формулы (2.18). Разлагаем

$$\begin{aligned} & : \varphi_{x_1}^4(x) : - : \varphi_{x_2}^4(x) : = ( : \varphi_{x_1}^4 : - : \varphi_{x_1}^3 \varphi_{x_2} : ) + \\ & + ( : \varphi_{x_1}^3 \varphi_{x_2} : - : \varphi_{x_1}^2 \varphi_{x_2}^2 : ) + \dots + ( : \varphi_{x_1} \varphi_{x_2}^3 : - : \varphi_{x_2}^4 : ) . \end{aligned}$$

В каждой из скобок после интегрирования все диаграммы имеют хотя бы для одной линии множитель урезания  $\int_{\{x \in |k| \leq x_1\}}$ . После возведения в степень  $p$  у каждой из диаграмм по крайней мере  $p$  линий имеют урезание в интервале  $[x, x_1]$ .

Возьмем теперь  $\varepsilon > 0$  достаточно малым, чтобы условие  $\omega(V') < 0$  осталось выполненным, и вынесем в правой части формулы (7)  $(x^2 + m^2)^{-\varepsilon/2}$  за скобку. Отсюда получаем множитель  $x^{-\varepsilon p}$  в (2.18).  $C^p p^{2p}$

есть оценка сверху числа диаграмм. Остается доказать, что каждая диаграмма, удовлетворяющая условию теоремы счета степеней, оценивается сверху множителем  $C^p$ . Для этого рассмотрим следующий метод оценки диаграмм (принадлежащий Глимму - Джайфе).

Пусть  $G$  - диаграмма с множеством вершин  $V = \{1, \dots, n\}$  и  $L$  - множество ее ребер. Пусть  $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$  - произвольное разбиение множества вершин. Ребро  $\ell$  назовем внутренним для  $V_i$ , если обе его вершины лежат в  $V_i$ .

$\ell$  есть передний отросток для  $V_i$ , если одна из его вершин принадлежит  $V_i$ , а другая  $V_j$  с  $j < i$ ,  $\ell$  есть задний отросток для  $V_i$ , если  $j > i$ .

Определим ядро оператора из  $L_2(\prod_i^+ dp_e)$  в  $L_2(\prod_i^- dp_e)$ , где  $\prod_i^+$  - произведение по всем передним отросткам  $\ell$  для  $V_i$ ,  $\prod_i^-$  - по задним,  $p_e$  - импульс, соответствующий ребру  $\ell$  (см. формулу (7)):

$$R(V_i) = \int \prod_{v \in V_i} g_x(x_v) \exp(-i(\sum_e \varepsilon_{v,e} p_e, x_v)) dx_v,$$

$$\prod_e \frac{dp_e \eta_e(p_e)}{(2\pi)^{\nu} (p_e^2 + m^2)^{1+\varepsilon}} \prod_i^{\pm} \frac{dp_e \eta_e^{1/2}(p_e)}{(2\pi)^{1/2} (p_e^2 + m^2)^{1/2(1+\varepsilon)}} \quad (8)$$

где  $\prod_e$  - произведение по всем внутренним для  $V_i$  ребрам,  $\prod_i^{\pm}$  - по всем передним и задним для  $V_i$  отросткам.

Пусть  $\|V_i\|$  и  $\|V_i\|_{\text{н.с.}}$  - нормы этого оператора (обычная и Гильберта - Шмидта). При пустом множестве передних (или задних) отростков мы полагаем

$$L_2(\prod_i^{+(-)} dp_e) = R.$$

Если оба пусты, то соответствующий оператор является умножением на число и тогда  $\|V\| = |G| \equiv |G|$ .

Лемма 3.1.

$$|G| = \|V\| \leq \prod_i \|V_i\| \leq \prod_i \|V_i\|_{\text{н.с.}} = \prod_i |\hat{G}_i|^{1/2},$$

где  $\hat{G}$  - диаграмма, полученная из двух идентичных пар  $V_i$  с отростками спариванием идентичных отростков.

Доказательство. Первое неравенство доказывается последовательным применением двух неравенств

$$\|A \otimes I\| = \|A\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Остальные очевидны.

Следствие 3.1.

Если выполнены условия теоремы счета степеней для всех диаграмм, то

$$|\int G \prod_v g_v(x_v) dx_v| \leq C^{|V|}.$$

Доказательство получается разбиением  $V$  на одноточечные множества.



§4.  $\mathcal{L}$  - ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Здесь мы дадим другой метод исследования диаграмм, который, не имея геометрической наглядности метода §3, является более алгоритмическим и обладает другими преимуществами. С его помощью мы передокажем результаты §3 и получим асимптотику по параметру урезания расходящихся диаграмм. Основная идея этого метода состоит в том, что  $\mathcal{L}$  - представление Симанчика и секторы Хешпа, определенные ниже, позволяют "факторизовать" интеграл (3.7) на интегралы вида  $\int x^p dx$ .

В формуле (3.7) можно рассмотреть случай, когда

$$g_v(x_v) = C \exp\left(-\frac{1}{2} a x_v^2 + i(K_v, x_v)\right). \quad (1)$$

Мы будем рассматривать для простоты только случай  $K_v \equiv 0$ . (Комбинацией (1) можно получить произвольную  $g_v$ ).

Мы используем представление

$$\frac{1}{p^2 + m^2} = \int_0^\infty e^{-\mathcal{L}(p^2 + m^2)} d\mathcal{L} \quad (2)$$

или, в более общем виде,

$$\frac{1}{(p^2 + m^2)^{1+\epsilon}} = \frac{1}{\Gamma(1+\epsilon)} \int_0^\infty \mathcal{L}^\epsilon e^{-\mathcal{L}(p^2 + m^2)} d\mathcal{L} \quad (3)$$

(последнее следует из очевидной формулы

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \text{const} \int_0^\infty (\mathcal{L}x)^\epsilon e^{-\mathcal{L}x} d(\mathcal{L}x)$$

и определения  $\Gamma$  - функции).

Мы будем применять урезание

$$\int_0^\infty e^{-\mathcal{L}(p^2 + m^2)} d\mathcal{L}$$

вместо введенного ранее. Можно доказать, что введенное ранее урезание (и многие другие) имеет вид

$$\int_0^\infty f(\mathcal{L}) e^{-\mathcal{L}(p^2 + m^2)} d\mathcal{L},$$

где  $f(\mathcal{L})$  - некоторая функция,  $f(0) = 0$  (см. [16]).  
Используя (3) можно переписать (3.7) в виде

$$C^{|\nu|} \left[ (2\pi)^{-\nu} \frac{1}{\Gamma(1+\epsilon)} \right]^{|\nu|} \int \exp\left[-\frac{1}{2} a \sum x_v^2 - i \sum_{v,e} l_{ve}(p_e, x_v) - \sum_e \mathcal{L}_e(p_e^2 + m^2)\right] \prod_e \mathcal{L}_e^\epsilon \prod dx_v dp_e dx_e. \quad (4)$$

Мы проинтегрируем по  $x_v$  и  $p_e$ , воспользовавшись формулой

$$\int \exp\left[i(t, y) - \frac{1}{2}(Qy, y)\right] dy = (2\pi)^{\frac{\nu}{2}(L+\nu)} (\det Q)^{-\frac{\nu}{2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(Q^{-1}t, t)\right). \quad (5)$$

в случае  $t \equiv 0$  (здесь  $y$  - вектор всех  $x_v, p_e$  а  $t$  имеет ту же размерность), и

$$Q = \sum_v a x_v^2 + 2i \sum_{v,e} l_{ve}(p_e, x_v) + 2 \sum_e \mathcal{L}_e p_e^2. \quad (6)$$

Рассмотрев соответствующую этой квадратичной форме симметричную матрицу  $Q$ , видим, что

$$\det Q = \sum_{L' \subset L} \left( \prod_{e \in L'} 2\mathcal{L}_e \right) a^{|\nu - \nu'|} \det(L', V'), \quad (7)$$

где  $\det(L', V')$  - детерминант минора этой матрицы, построенного на строках и столбцах, соответствующих  $L'$  и  $V'$ , в котором все диагональные элементы приравнены к нулю.

Таким образом,

$$\det(L', V') = \begin{cases} (-1)^{\sigma(L', V')} D^2, & \text{если } |L'| = |V'|; \quad (8) \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$D \stackrel{\text{def}}{=} (i)^{|L'|} \det(e_{ve})_{V', L'},$$

а  $\sigma(L', V')$  есть четность  $|L'|^2$  (число транспозиций). Поэтому

$$\det(L', V') = D^2. \quad (9)$$

Для вычисления  $D$  рассмотрим совокупность  $G(L', V')$  вершин  $V'$  и ребер  $L'$ . Каждый член детерминанта  $D$  определяет и определяется взаимно-однозначным отображением (подстановкой)  $\varphi: V' \rightarrow L'$ , а именно, это есть член

$$\prod_{v \in V'} e_{v, \varphi(v)}. \quad (10)$$

Лемма 4.1.

Если в совокупности ребер  $L'$  нет циклов (замкнутых путей), то в  $D$  есть не более одного члена и поэтому  $D^2 = 1$  или 0.

Если в  $L'$  есть циклы, то  $D = 0$ .

Доказательство. В первом случае  $L'$  есть объединение связных деревьев  $L' = L'_1 \cup L'_2 \cup \dots$ . Ровно  $|L'_1|$  вершин дерева  $L'_1$  должны принадлежать  $V'$ , т.е. все, кроме одной. Тогда существует вершина  $v \in V'$  у дерева  $L'_1$ , инцидентная только одному ребру  $e \in L'_1$ . Тогда  $\varphi(v) = e$  по необходимости. Далее простое индуктивное рассуждение.

Во втором случае рассмотрим некоторый цикл  $e_1, \dots, e_k$ . Пусть  $V_1, \dots, V_k$  - вершины этого цикла, все они должны принадлежать  $V'$ ,  $V_1$  и  $V_2$  инцидентны  $e_1, e_2$  и  $V_3 - e_2$  и т.д. Есть только два отображения

$\varphi: \{V_1, \dots, V_k\} \rightarrow \{e_1, \dots, e_k\}$  при фиксированных остальных  $\varphi(v)$ . Именно, либо  $\varphi(V_1) = e_1$ , либо  $e_k$  и т.д.

Рассмотрим члены  $D$ , соответствующие фиксированным остальным  $\varphi(v)$ . Две подстановки

$\begin{pmatrix} V_1 & \dots & V_k \\ e_1 & \dots & e_k \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_k \\ e_k & e_1 & \dots & e_{k-1} \end{pmatrix}$  отличаются знаком  $(-1)^{k-1}$ , а соответствующие члены  $D$  за счет замены  $e_{ve} \rightarrow -e_{ve}$  отличаются на  $(-1)^k$ . Поэтому сумма их всегда 0.

Формулу (7) можно переписать так:

$$\det Q = \sum_{L' \in \mathcal{L}^1} \left( \prod_{e \in L'} 2d_e \right) a^{|V| - |L'|} c(L'), \quad (11)$$

где сумма по всем  $L'$  без циклов,  $|L'| \leq |V| - 1$ ,  $c(L')$  - число способов выбрать  $V'$  так, что  $|L'| = |V'|$  хотя бы (а тогда ровно) одно отображение  $\varphi$ . Такие  $L'$  будем называть 1-деревьями. При этом  $c(L') \leq |L'| + 1$ .

#### Секторы Хеппа.

Вся область интегрирования  $R^{VL}$  по  $d_e$  разбивается на  $L!$  секторов:  $d_{i_1} \leq \dots \leq d_{i_L}$ . Рассмотрим, например, сектор  $d_1 \leq \dots \leq d_L$ , и сделаем для этого сектора замену переменных

$$t_1 = \frac{d_1}{d_2}, \dots, t_{L-1} = \frac{d_{L-1}}{d_L}, t_L = d_L, \quad (12)$$

$$0 \leq t_1 \leq 1, \dots, 0 \leq t_{L-1} \leq 1, 0 \leq t_L < \infty:$$

Обратная замена имеет вид

$$d_e = t_e t_{e+1} \dots t_L. \quad (13)$$

Любой является определителем треугольной матрицы и равен

$$J = \det \left\| \frac{\partial d_i}{\partial t_j} \right\| = \prod_{e=1}^L t_e^{e-1}.$$

Ввиду (13)

$$\prod_{e \in L'} d_e = \prod_{e=1}^L t_e^{\beta_e}, \quad (14)$$

$$\beta_e = \beta_e(L') = |\{1, \dots, e\} \cap (L - L')| = |\{1, \dots, e\} - L'|.$$

Лемма 4.2.

Для данного сектора существует 1-дерево  $L_0$ , такое,

что  $\beta_e(L_0) \equiv \beta_e^0 \leq \beta_e = \beta_e(L')$

для всех 1-деревьев  $L'$ . При этом для любого  $L'$  существует  $\ell = \ell(L')$  такое, что  $\beta_e^0 < \beta_e$ .

Доказательство. Построим такое 1-дерево.

Выберем  $\ell_1 = 1$ ,  $\ell_2$  - первое ребро из оставшихся ребер, не образующее цикла с  $\ell_1$  и т.д.,  $\ell_k$  - первое из оставшихся ребер, не образующее цикла с  $\{\ell_1, \dots, \ell_{k-1}\}$ . Из построения ясно, что  $L_0 \cap \{1, \dots, \ell\}$  есть дерево с максимальным числом ребер, которое можно вложить в граф  $G_e$ , состоящий из ребер  $\{1, \dots, \ell\}$  и всех инцидентных им вершин. Пусть число этих вершин есть  $V_e$ , а число компонент связности  $G_e$  равно  $K_e$ . Тогда  $\beta_e^0 = \ell - V_e + K_e$ . (16)

Отсюда следует первая часть утверждения. Для доказательства последнего надо взять первое  $\ell$  такое, что

$$L' \cap \{1, \dots, \ell\} \neq L_0 \cap \{1, \dots, \ell\}.$$

Из этой леммы получаем

$$\det Q = \prod_e t_e^{\beta_e^0} (1+P), \quad (17)$$

где  $P$  - полином с положительными коэффициентами от  $t_e$ .

Интеграл (4) тогда переписывается в виде

$$\text{const} \int (1+P)^{-\frac{1}{2}} \prod_e t_e^{-\frac{1}{2}\beta_e^0 + \ell\varepsilon + \ell - 1} dt_e, \quad (18)$$

и условие его сходимости

$$-\frac{1}{2}\beta_e^0 + \ell\varepsilon + \ell - 1 > -1,$$

или

$$\beta_e^0 - 2(1+\varepsilon)\ell < 0 \quad \text{для всех } \ell. \quad (19)$$

Если граф  $\{1, \dots, \ell\}$  связан, то условие (19) ввиду (16) эквивалентно теореме счета степеней, а в случае несвязного графа следует из нее.

Асимптотика по урезанию  $\alpha_0$ .

Рассмотрим интеграл (18) в области (12) с дополнительным ограничением

$$t_e t_{e+1} \dots t_L \geq \alpha_0 \quad \text{для всех } \ell. \quad (20)$$

Теорема 4.1.

Если

$$\delta = \min(-\frac{1}{2}\beta_e^0 + \ell\varepsilon + \ell) < 0 \quad (21)$$

где минимум берется по всем  $\ell$  и всем секторам, то интеграл (4) по области  $[\alpha_0, \infty]$  имеет асимптотику

$$\text{Если } \delta > 0, \text{ то } G \sim \text{const } \alpha_0^\delta. \quad (22)$$

$$G \sim \text{const} (\ln|\alpha_0|)^m, \quad (23)$$

где  $m$  - целое положительное число, равное максимальному (по всем секторам) числу чисел  $\ell$  таких, что

$$-\frac{1}{2}\beta_e^0 + \ell\varepsilon + \ell = 0.$$

Доказательство. Фиксируем сектор и рассмотрим крайние точки подмножества  $R^L$ , выделяемого неравенствами (20), или иначе говоря, точки  $t' = (t'_1, \dots, t'_L)$ , удовлетворяющие (20) и такие, что по крайней мере для одного  $\ell$  в (20) имеет место равенство.

Для заданной такой крайней точки  $t'$  обозначим  $A(t')$  множество точек  $t = (t_1, \dots, t_L)$  таких, что  $t_i \geq t'_i$  и интегрируем по этой области  $A(t')$ . В случае  $\delta > 0$  этот интеграл будет достигать максимума, если выбрать сектор  $\ell$  и  $t'_i$  так, чтобы

$$t'_e = C\alpha_0, \quad t'_i \geq C^{-1}, \quad -\frac{1}{2}\beta_e^0 + \ell\varepsilon + \ell = \delta.$$

Интегрируя далее по множеству крайних точек, получаем результат. В случае  $\delta = 0$  доказательство аналогично.

Мы будем иметь дело с моделью  $\varphi^4_{4,\varepsilon}$ . При этом  $\omega = 4 - \nu - \varepsilon(4\nu - \nu) = \nu(\varepsilon - 1) + 4(1 - \varepsilon\nu)$ .

Можно выделить следующие области:

A)  $\varepsilon > 1$ ; здесь существует поле в точке и модель тривиальным образом существует;

B)  $\varepsilon = 1$ ; эта модель соответствует  $\varphi^4_2$ . Мы рассмотрим эту модель с помощью других методов в следующем параграфе, что будет служить подготовкой к области C;

C)  $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$ ; здесь все диаграммы (с 4 остриями) сходятся, но оценка Вика степенная. На примере этой модели мы поясним основной метод: кластерное разложение на множестве клеток фазового пространства;

D)  $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ . Расходится одна вакуумная диаграмма.

E)  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ; этот случай соответствует  $\varphi^4_3$ . Только одна массовая диаграмма логарифмически расходится ( $\omega = 0$ );

F)  $\frac{1}{6} < \varepsilon < \frac{1}{3}$ ; конечное число массовых диаграмм расходится с  $\omega < 1$ ;

G)  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{6}$ ; есть массовые диаграммы с  $\omega \geq 1$ ;

H)  $\varepsilon = 0$ . Перенормируемая, но не сверхперенормируемая теория.

Полезно помнить две формулы

$$C(x) \sim \frac{\text{const}}{|x|^{4-2(1+\varepsilon)}},$$

$$\langle \xi^2(x) \rangle_0 \sim x^{4-4\varepsilon}.$$

Мы начнем со случая  $\varepsilon = 1$  и будем постепенно уменьшать значение  $\varepsilon$ . При этом трудности будут увеличиваться.

Пусть  $\eta_i(k)$  - неотрицательные функции на  $R^{\nu}$ , при-

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(k) = \frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}. \quad (1)$$

Пусть  $\xi_i(x)$  - гауссовы поля с нулевым средним и

$$\langle \xi_i(x) \xi_j(y) \rangle = \delta_{ij} (2\pi)^{-\nu} \int \eta_i(k) \exp(i(k, x-y)) dk. \quad (2)$$

Тогда поле

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(x) \quad (3)$$

можно считать совпадающим с гауссовым полем (1.8).

Примеры.

Пусть дана последовательность чисел

$$0 = M_0 < M_1 < M_2 < \dots \quad (4)$$

I. В качестве  $\eta_i(k)$  можно рассмотреть функцию

$$\eta_i(k) = \chi_{[M_{i-1}, M_i]}(k) \frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}. \quad (5)$$

II. (Глимм - Джаффе). Часто надо рассмотреть случай I. Рассмотрим  $C_0^\infty$ -функцию  $a(\rho)$  такую, что  $a(\rho) = 1$  при  $|\rho| \leq \frac{1}{2}$ ,  $a(\rho) = 0$  при  $|\rho| \geq 2$  и  $0 \leq a(\rho) \leq 1$  для остальных  $\rho$ . Положим

$$a_0(k) = 0, \quad a_i(k) = a\left(\frac{|k|}{M_i}\right)$$

и

$$\eta_i(k) = \frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}} (a_i(k) - a_{i-1}(k)). \quad (6)$$

Из (6) следует, что  $a_i(k) = 0$  при  $|k| \leq \frac{M_{i-1}}{2}$ .

Другой вариант: выберем  $a_0(k) = 0$ ,

$$a_i(k) = \prod_{\ell=1}^i a\left(\frac{k^{(\ell)}}{M_i}\right), \quad k = (k^{(1)}, \dots, k^{(\nu)}). \quad (6')$$

III. (Паули, Вилларс, Галлаотти и др.).  $M_1 = m$ ,  $\eta_0 = 0$ ,

$$\eta_i(k) = \frac{1}{(M_i^2 + k^2)^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(M_{i+1}^2 + k^2)^{1+\varepsilon}}, \quad i \geq 1. \quad (7)$$

IV. ( $\alpha$ -представление). Пусть  $\alpha_0 = \infty > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > 0$ ,

$$\eta_i(k) = \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} e^{-\alpha(k^2 + m^2)} d\alpha, \quad \varepsilon = 0 \quad (8)$$

(оно используется в [22]).

Напомним еще раз, что поля  $\xi_i(x)$  независимы для различных  $i$ , что следует из (2).

При  $\varepsilon = 1$  или даже при  $\frac{1}{2} < \varepsilon \leq 1$   $U_\Lambda$  существует как случайная величина с конечной дисперсией, и достаточно доказать устойчивость. Мы докажем, что равномерно по  $N$

$$\langle e^{-U_N} \rangle_0 \leq C < \infty, \quad (9)$$

где

$$U_N \equiv U_{\Lambda, N} = \int : \xi_{\leq N}^4(x) : dx, \quad (10)$$

$$\xi_{\leq N}(x) = \sum_{i=1}^N \xi_i(x),$$

причем здесь мы будем пользоваться разбиением (5).

В этом параграфе мы дадим для случая  $\varepsilon = 1$ , соответствующего модели  $\varphi^4_2$ , альтернативный метод доказательства устойчивости. Мы фактически докажем (9), а сходимость

$\langle e^{-U_N} \rangle_0$  при  $N \rightarrow \infty$  доказывается аналогично.

Основная идея состоит в индуктивном применении формулы Тейлора

$$\langle Q e^{f(s_i)} \rangle = \langle Q e^{f(0)} \rangle + \langle Q s_i f'(s_i) e^{f(s_i)} \rangle, \quad 0 \leq \bar{s}_i \leq s_i \quad (11)$$

к  $\exp(-U_N(s))$ , где  $s = (s_1, \dots, s_N)$  и

$$U_N(s) = \int_{\Lambda} : \left( \sum_{i=1}^N s_i \xi_i(x) \right)^4 : dx \quad (12)$$

На первом шаге  $s_i = 1$ . Применяя (11) для  $i = N$ , получим

$$\langle e^{-U_N} \rangle_0 = \langle e^{-U_{N-1}} \rangle_0 + \langle Q e^{-U_N(1, 1, \dots, 1, \bar{s}_N)} \rangle_0, \quad (13)$$

$$Q = -4 \int_{\Lambda} : \xi_N(x) (\xi_1(x) + \dots + \xi_{N-1}(x) + \bar{s}_N \xi_N(x))^3 : dx.$$

Оценка Вика дает для левой части (13)

$$\langle e^{-U_N} \rangle_0 \leq e^{c_1 \varepsilon n^2 M_N} \quad (14)$$

Для правой части получаем оценку сверху

$$\langle e^{-U_{N-1}} \rangle_0 + \langle Q^2 \rangle_0^{1/2} \langle e^{-2U_N(1, \dots, 1, \bar{s}_N)} \rangle_0^{1/2} \leq e^{c_1 \varepsilon n^2 M_{N-1}} + M_N^{-\varepsilon_0} e^{c_1 \varepsilon n^2 M_N} \quad (15)$$

Мы видим, что оценка (15) лучше (14), и возникает идея применить разложение (11) много раз. При этом каждый раз мы будем иметь дело с выражениями вида

$$A = Q \exp(-U_N(s)), \quad (16)$$

где  $Q = \prod_{k, \alpha} Q_{k, \alpha}$ ,  $Q_{k, \alpha} =$  (17)

$$= -4 \int_{\Lambda} : \xi_k(x) \left( \sum_{i=1}^k s_i^{(k, \alpha)} \xi_i(x) \right)^3 : dx$$

для некоторых  $0 \leq s_i^{(k, \alpha)} \leq 1$ .

Формально можно говорить о применении операторов  $I_i$  и  $P_i$  к  $\mathcal{A}$ ; действие  $I_i$  на  $\mathcal{A}$  состоит в том, что (только!) в экспоненте (16)  $s_i$  полагается равным 0, действие  $P_i$  соответствует второму члену в правой части (11).

Формально можно записать

$$1 = I_k + P_k, \quad I_k^2 = I_k, \quad P_k I_k = 0, \quad (18)$$

$$(I + P)^n = I + IP + \dots + IP^{n-1} + P^n,$$

где  $1$  означает тождественный оператор.

Мы рассмотрим  $\exp(-U_N)$  как выражение  $\mathcal{A}$  с  $Q=1$ ,  $s_1 = \dots = s_N = 1$  и будем применять к нему по определяемым ниже правилам операторы  $I_k + P_k$ .

Сейчас рассмотрим для некоторых  $m_k \geq 0, \dots, m_N \geq 0$

$$\mathcal{A} = P_k^{m_k} I_{k+1} P_{k+1}^{m_{k+1}} \dots I_N P_N^{m_N} e^{-U_N} =$$

$$= Q e^{-U_N(s_1, \dots, s_k, 0, 0, \dots, 0)}. \quad (19)$$

Для оценки сверху  $|\langle \mathcal{A} \rangle_0|$  надо сначала избавиться от экспоненты, что достигается применением неравенства Шварца

$$|\langle Q e^{-U_N(s)} \rangle_0| \leq \langle Q^2 \rangle_0^{1/2} \langle e^{-2U_N(s)} \rangle_0^{1/2}. \quad (21)$$

При этом по оценке Вика

$$\langle e^{-2U_N(s_1, \dots, s_k, 0, \dots, 0)} \rangle_0^{1/2} \leq$$

$$\leq e^{c_1 \varepsilon^2 M_k} = M_k^{c_1 \varepsilon^2}. \quad (21')$$

В разложении  $\langle Q^2 \rangle_0$  по диаграммам в каждой диаграмме  $2m_p$   $p$ -вершин,  $p = k, \dots, N$ . Поэтому каждая диаграмма оценивается сверху числом (аналогично лемме 2.3)

$$M_k^{-\varepsilon_0 2m_k} \dots M_N^{-\varepsilon_0 2m_N} \leq \quad (22)$$

$$\leq M_k^{-\varepsilon_0 s} \prod_{p=k}^N M_p^{-\varepsilon_0 m_p}, \quad s = m_k + \dots + m_N.$$

В то же время число диаграмм в разложении  $\langle Q^2 \rangle$  оценивается сверху числом

$$(8s)^{8s}. \quad (23)$$

Окончательно

$$|\langle \mathcal{A} \rangle_0| \leq M_k^{c_1 \varepsilon^2} M_k^{-\frac{1}{2} \varepsilon_0 s} (8s)^{8s} \prod_{p=k}^N M_p^{-\frac{1}{2} \varepsilon_0 m_p}. \quad (24)$$

Мы опишем теперь правило построения урезанного разложения Тейлора. Мы начинаем с применения  $I_N + P_N$ . Получаем два слагаемых

$$I_N e^{-U_N} \quad \text{и} \quad P_N e^{-U_N}.$$

Во втором снова применяем  $I_N + P_N$ , а в первом —  $I_{N-1} + P_{N-1}$ , и так далее. Пусть мы уже получили слагаемое вида (19). Тогда как только впервые

$$s \geq c_2 M_k^{\varepsilon_1} \quad (25)$$

для этого слагаемого разложение останавливается. В противном случае снова применяется  $I_k + P_k$ . Разложение останавливается также, если для данного слагаемого  $k=1$ . Мы выбираем

$$M_k = M_{k-1}^{1+\varepsilon} = M_1^{(1+\varepsilon)^{k-1}}. \quad (26)$$

Тогда в момент остановки алгоритма либо

$$s = \lceil c_2 M_k^{\varepsilon_1} \rceil + 1, \quad (27)$$

либо

$$S \leq c_2 M_{k+1}^{\varepsilon_1}, \text{ но } S \geq c_2 M_k^{\varepsilon_1}, \text{ т.е.}$$

$$c_2 M_k^{\varepsilon_1} \leq S \leq c_2 M_k^{\varepsilon_1(1+\tilde{\tau})}. \quad (28)$$

Мы выберем теперь  $\varepsilon_1 > 0$  достаточно малым в сравнении с  $\varepsilon_0$ ,  $\tilde{\tau} < 1$  и  $c_2 > 0$  достаточно большим. Тогда в момент остановки равномерно по всем слагаемым

$$M_k^{c_1 \ln M_k - \frac{1}{2} \varepsilon_0 S} (8S)^{8S} \leq \text{const}. \quad (29)$$

Тогда из (24) следует, что

$$Z_\wedge = \sum | \langle \mathcal{A} \rangle_0 | \leq \leq \text{const} \prod_{p=2}^N (1 + M_p^{-\frac{1}{2} \varepsilon_0} + M_p^{-\frac{1}{2} 2 \varepsilon_0} + \dots) \leq \text{const}.$$

### §6. КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖЕСТВЕ КЛЕТОК ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА: ОБЛАСТЬ $\varepsilon > \frac{1}{2}$ , ОСНОВНЫЕ ИДЕИ

Как мы видели в §5 при разложении Тэйлора каждая  $p$ -вершина дает малый множитель  $M_p^{-\varepsilon_0}$  и для оценки выгодно набрать побольше таких множителей. Однако при увеличении числа вершин растет и число диаграмм. Поэтому алгоритм §5 неприменим при  $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$  (за исключением случая, когда  $\varepsilon$  близко к 1). Основной идеей Глимма-Джаффе является разбить не только импульсное пространство, но также и  $\wedge$  на клетки и "сделать разложение Тэйлора в каждой клетке". При этом оказывается, что поля в далеких (в смысле некоторого перенормированного масштаба) клетках почти независимы и спаривания между этими клетками можно не принимать во внимание, что существенно ограничивает рост числа диаграмм.

Фазовым пространством назовем  $R^D \times R^D = \{(x, \kappa)\}$ . Мы будем говорить, что поле  $\xi_j(x)$  принадлежит клетке  $(i, \Delta)$  фазового пространства, если  $j=i$  и  $x \in \Delta$ , где

$\Delta$  - куб из  $R^D$ .

Рассмотрим последовательность размельчающихся разбиений единичного куба  $\wedge$ : первое разбиение состоит из одного единичного куба  $\Delta_1 = \wedge$ ,  $k$ -е разбиение состоит из конгруэнтных непересекающихся кубов  $\Delta_{ki}$  ( $k$  - номер разбиения или "ранг куба",  $k=1, \dots, N$ ,  $i$  нумерует кубы данного разбиения в произвольном порядке). Если  $\Delta_k$  - произвольный куб из  $\Delta_{ki}$ , то

$$|\Delta_{ki}| = |\Delta_k| = 2^{-Dnk} = c_k M_k^{-D}. \quad (1)$$

где целые  $n_k > 0$  и числа  $c_k$ ,  $(\frac{1}{2})^D \leq c_k \leq 1$ , подбираются так, чтобы каждый куб  $k$ -го разбиения являлся точным объединением кубов  $(k+1)$ -го разбиения;  $M_k$  выбираются как в (5.26),  $\tilde{\tau} > 0$  далее выбирается достаточно малым, а  $M_1 = M_1(\tilde{\tau})$  достаточно большим.

Мы докажем следующее утверждение.

#### Теорема 6.4.

При  $\varepsilon > \frac{1}{2}$  статистические суммы  $Z_\wedge$  конечны, а функции Швингера удовлетворяют первым двум аксиомам евклидовой теории поля.

Основную трудность представляет доказательство устойчивости. Исследование

$$\langle \xi_{\varphi_1} \dots \xi_{\varphi_n} e^{-U_\wedge} \rangle_0$$

вместе с доказательством аксиом проводится также с помощью построенного ниже разложения и предоставляется читателю.

Мы снова будем иметь дело с выражениями вида

$$\mathcal{A} = Q \exp\left(-\int_{\varepsilon=1}^N \left[ \prod_{k,i: x \in \Delta_{ki}} S_{eki} \chi_{\Delta_{ki}}(x) \right] \xi_\varepsilon(x)^4 dx\right), \quad (2)$$

где  $0 \leq S_{eki} \leq 1$  - переменная, связанная с клеткой  $(\varepsilon, \Delta_{ki})$  фазового пространства. Заметим, что  $\exp(-U_\wedge)$  имеет вид  $\mathcal{A}$ , если  $Q \equiv 1$  и  $S_{eki} \equiv 1$ .

Мы будем использовать разложения Тэйлора по  $S_{eki}$  ("разложение в клетке  $(\varepsilon, \Delta_{ki})$ ") с остаточными членами. Заметим, что ряд Тэйлора расходится. Интуитивно это ясно из того, что расходится ряд по  $\lambda$  для  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - \lambda x^4) dx$ .

Поэтому необходима оценка остаточных членов. Члены разложения Тейлора мы оцениваем с помощью диаграмм, а при оценке экспоненты в остаточном члене используем также оценку Вика.

Аналогично предыдущему параграфу введем операторы  $I_\alpha$ ,  $P_\alpha$ , где  $\alpha = (\epsilon, \Delta_{ki})$  нумерует клетки.

Методологически полезно рассмотреть сначала упрощенные статистические суммы.

I. Рассмотрим "высокоимпульсную" часть" статсуммы

$$Z^{(N)} = \langle \exp(-U^{(N)}) \rangle_0, \quad (3)$$

$$U^{(N)} = \int \xi_N^4(x) dx,$$

и докажем, что для некоторого  $\epsilon_0 > 0$

$$Z^{(N)} = 1 + O(M_N^{-\epsilon_0/4}). \quad (4)$$

Пусть  $R$  - множество всех кубов  $\Delta_{ki}$  для  $k=1, \dots, N_0$  ( $N_0 \leq N$  выбирается позднее) и всевозможных  $i$ . Подмножество  $R' \subset R$  назовем допустимым, если вместе с некоторым  $\Delta \in R'$  ему принадлежат все  $\Delta' \supset \Delta$ ,  $\Delta' \in R$ . Имеет место тождество

$$Z^{(N)} = \langle \prod_{\Delta \in R} (I_\Delta + P_\Delta) \exp(-U^{(N)}) \rangle_0 = \sum_{R'} \nu_{R'}, \quad (5)$$

где сумма по всем допустимым  $R'$ , включая пустое, и

$$\nu_{R'} = \langle [\prod_{\Delta \in R'} I_\Delta] [\prod_{\Delta \in R'} P_\Delta] \exp(-U^{(N)}) \rangle_0, \quad (6)$$

где  $P_\Delta = P_\alpha$  для  $\Delta = \Delta_{ki}$ ,  $\alpha = (N, \Delta_{ki})$  и аналогично определяется  $I_\Delta$ . Порядок сомножителей в  $\prod_{\Delta} \Delta$  таков: если  $\Delta \subset \Delta'$ , то множитель, соответствующий  $\Delta$ , стоит левее множителя, соответствующего  $\Delta'$ , а в остальном порядок произволен. Доказательство следует из формулы (5.48).

Лемма 6.1 (аналог кластерной оценки, см. [3], [48, 49]). Существует  $\epsilon_0$  и  $c > 0$  такие, что

$$|\nu_{R'}| \leq (c M_N^{-\epsilon_0/2})^{|R'|} \quad (7)$$

Выведем сначала из этой леммы оценку (4).

Назовем куб  $\Delta = \Delta_{ki} \in R'$   $a$ -граничным, если существует цепочка кубов  $\Delta \supset \Delta_{k+1, i_1} \supset \dots \supset \Delta_{k+a, i_a} \in R'$  для  $b=a$ , но не существует такой цепочки для  $b=a+1$ . Обозначим  $R(\Delta; a)$  множество всех кубов  $\Delta_{k+b, j} \in \Delta \equiv \Delta_{ki}$  с  $b \leq a$ . Заметим, что в каждом кубе  $\Delta_{ki}$  содержится не более

$$\left( \frac{\text{const}}{|\Delta_{ki}|} \right)^{(1+\tau)^b - 1}$$

кубов  $\Delta_{k+b, j}$ . Поэтому для данного  $\Delta = \Delta_{ki}$  существует не более

$$\prod_{\ell=0}^{a-1} \left( \frac{\text{const}}{|\Delta_{k+\ell, i_\ell}|} \right)^\tau \leq \left( \frac{\text{const}}{|\Delta_{ki}|} \right)^{\tau a (1+\tau)^a} \equiv \psi(\Delta_{ki}) \quad (8)$$

таких цепочек длины  $a$ .

Нам понадобятся две оценки:

$$1) f(\Delta) \equiv \sum_{R'' \subset R(\Delta, a-1)} (c M_N^{-\epsilon_0/2})^{|R''|} \leq \prod_{\Delta' \in R(\Delta, a-1)} (1 + c M_N^{-\epsilon_0/2}) \leq (1 + c M_N^{-\epsilon_0/2})^{\psi(\Delta)} \leq 1 + O(M_N^{-\epsilon_0/4}), \quad (9)$$

$$\text{где } \psi(\Delta) = \sum_{b=0}^{a-1} \left( \frac{\text{const}}{|\Delta|} \right)^{(1+\tau)^b - 1},$$

если  $\tau = \tau(a, \epsilon_0)$  достаточно мало;

2) Пусть  $\sum'$  - сумма по всем подмножествам  $R'' \subset R(\Delta, a)$

таким, что существует цепочка  $\Delta \equiv \Delta_{ki} \supset \Delta_{k+1, i_1} \supset \dots$

$\supset \Delta_{k+a, i_a} \in R''$ . Тогда аналогично (8)



$$\eta(\Delta) \equiv \sum' (c M_N^{-\frac{\varepsilon_0}{2}})^{|R'|} \leq M_N^{-\frac{\varepsilon_0 a}{2}} \varphi(\Delta) (1 + c M_N^{-\frac{\varepsilon_0}{4}}) \leq c |\Delta| M_N^{-\frac{\varepsilon_0}{2}}, \quad (10)$$

если выбрать сначала  $a$  так, чтобы  $\frac{\varepsilon_0 a}{2} \geq \nu + \varepsilon_0$  и затем выбрать  $\tau > 0$  достаточно малым в сравнении с  $\varepsilon_0$ .  
Докажем теперь, что

$$\sum_{R'} b_{R'} \leq \chi(\Delta_1) \sum_G \prod_{\Delta \in G} \eta(\Delta), \quad (11)$$

где сумма по всем подмножествам  $G \subset R$ .  
Рассмотрим произвольное  $R'$  и сопоставим ему некоторое подмножество  $G = G(R')$   $a$ -граничных кубов. Если в  $R'$  нет  $a$ -граничных кубов, то  $G$  пусто. В противном случае возьмем первый (в некотором фиксированном порядке в  $R$ )  $a$ -граничный куб  $\Delta^{(1)}$ , далее в  $R^{(1)} = R' - R(\Delta^{(1)}, a)$  выберем первый  $a$ -граничный (по отношению к  $R^{(1)}$ ) куб  $\Delta^{(2)}$  и т.д. Получившийся набор кубов и есть  $G$ .

Очевидно, что

$$\sum_{R': G(R')=G} b_{R'} \leq \chi(\Delta_1) \prod_{\Delta \in G} \eta(\Delta). \quad (12)$$

Из (11) получаем

$$\sum b_{R'} \leq \chi(\Delta_1) \prod_{\Delta \in R} (1 + c |\Delta| M_N^{-\frac{\varepsilon_0}{2}}) \leq \chi(\Delta_1) \prod_{k=1}^N (1 + c |\Delta| M_N^{-\frac{\varepsilon_0}{2}})^{\frac{1}{|\Delta_k|}}, \quad (13)$$

откуда и следует оценка (4).

Доказательство леммы 6.1.

Мы будем говорить, что применение  $P_\Delta$  порождает  $P_{\Delta'}$ -вершину, т.е. множитель

$$Q_\Delta = -4 \bar{S}' \int : \xi_N^4(x) : dx \quad (14)$$

для некоторого  $0 \leq \bar{S}'_\Delta \leq 1$ . Иначе говоря, полагаем

$$\langle \prod_{\Delta \in R'} Q_\Delta e^{-U(\bar{S})} \rangle_0 = b_{R'} \quad (15)$$

для некоторого набора чисел  $\bar{S} = (\bar{S}_{Nki})$ . Так же как в (5.15), получаем

$$|b_{R'}| \leq \langle \prod_{\Delta \in R'} Q_\Delta^2 \rangle_0^{1/2} \langle e^{-2U(\bar{S})} \rangle_0^{1/2} \leq \langle \prod_{\Delta \in R'} Q_\Delta^2 \rangle_0^{1/2} c^M, \quad (16)$$

где  $M$  - число кубов  $\Delta_{N_0 i} \in R'$ , что следует из оценки Вика ( $\Delta = \Delta_{N_0}$ ):

$$U_\Delta = \int_\Delta : \xi_N^4(x) : dx \geq -const |\Delta| M_N^{2-4\tilde{\varepsilon}} \geq -const, \quad (17)$$

если

$$M_N^{2-4\tilde{\varepsilon}} \leq c M_{N_0}^4,$$

, т.е., например,  $N_0 = N - d_0$ , (17')

где можно взять  $d_0 = 2$

Для оценки

$$\langle \prod_{\Delta \in R'} Q_\Delta^2 \rangle_0$$

рассмотрим диаграммы для

$$\langle \prod_{\Delta \in \mathcal{D}} \int_\Delta : \xi_N^4(x) : dx \rangle_0, \quad (18)$$

где произведение берется по конечному набору  $\mathcal{D}$  кубов  $\Delta$ . Эти кубы могут совпадать (в нашем случае не более чем дважды).

Пусть  $G$  - одна из таких диаграмм,  $L$  - множество ее ребер,  $L_0$  - множество ребер  $\ell$  таких, что перенормированное (скейлинговое) расстояние

$$d(\ell) \equiv d_{N-1}(\Delta, \Delta') = \max [1, M_{N-1} \rho(\Delta, \Delta')] \quad (19)$$

между кубами  $\Delta$  и  $\Delta'$ , соединяемыми ребром  $l$ , больше 1, т.е. если  $\rho(\Delta, \Delta') > 0$ , или если кубы не соседние. Это значит, что

$$d(l) \geq M_{N-1} M_{N_0}^{-1} \geq M_N^{\frac{1}{1+\tau} - \frac{1}{(1+\tau)^{n_0}}} \quad (20)$$

Более общо, введем расстояние между клетками  $(n, \Delta), (n, \Delta')$ :

$$d_n(\Delta, \Delta') = \max [1, M_{n-1} \rho(\Delta, \Delta')], \quad (19')$$

и скейлинговое расстояние между точками:

$$d_n(x, x') = \max [1, M_{n-1} \rho(x, x')]. \quad (19'')$$

Лемма 6.2.

Существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для любого  $n_0 > 0$  существует  $c(n_0)$  такое, что каждая диаграмма  $G$  в разложении (18) допускает оценку

$$|I_G| \leq \left[ \prod_{l \in L_0} c(n_0) d^{-n_0}(l) \right] (c M_{N-1}^{-\varepsilon_0})^{|L|} \quad (21)$$

Доказательство леммы 6.2. Вынесем сначала

$$\inf \prod_{l \in L} \frac{1}{(p^2 + m^2)^{\varepsilon/2}}$$

за знак интеграла. Это даст второй множитель в правой части (21). Рассмотрим часть интеграла (3.7), соответствующую ребру  $l$ :

$$\int \frac{\exp[-i(p_e, x)] [a_n(p_e) - a_{n-1}(p_e)] dp_e}{(p_e^2 + m^2)^{3/2 + \varepsilon/2}}, \quad (22)$$

где  $x = x_{i(e)} - x_{j(e)}$ .

Сделаем в нем замену  $p_e = A p_e'$ ,

$$A = M_{N-1}.$$

48

Получим

$$\int \frac{\exp[-i(p_e', Ax)] (a(\frac{p_e'}{M_{N-1}}) - a(p_e')) A dp_e'}{(p_e'^2 A^2 + m^2)^{1+\varepsilon'}}, \quad (23)$$

где  $\varepsilon' = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ . Если  $\rho(\Delta, \Delta') > 0$ , то проинтегрируем в (23)  $n_0$  раз по частям, что и даст множитель

$c(n_0) |Ax|^{-n_0}$ . После интегрирования по частям возникает (мы используем сглаженные  $a_n(p)$ , см. (5.6)) интегралы вида

$$c_{e,k,q}(x) = \int \exp[-i(p_e, x)] (a^{(k)}(\frac{p_e'}{M_{N-1}}) - a^{(k)}(p_e')) \left( \frac{1}{(p_e'^2 A^2 + m^2)^{1+\varepsilon'}} \right)^{(q)} dp_e', \quad (24)$$

где  $(k)$  и  $(q)$  означают соответствующее число дифференцирований по  $p_e'$ . Нетрудно проверить, что равномерно по  $k, q \leq n_0$  имеет место оценка

$$|c_{e,k,q}(x)| \leq \frac{c}{|x|^{1-\varepsilon}} \quad (25)$$

Действительно, при  $q \leq n_0$

$$\left( \frac{1}{(p_e'^2 A^2 + m^2)^{1+\varepsilon'}} \right)^{(q)} \leq \frac{\text{const}}{(p_e'^2 + m^2)^{1+\varepsilon'}} \quad (26)$$

4-2088

49

Отсюда и следует лемма 6.2.

Вернемся к доказательству леммы 6.1.

Для любых кубов  $\Delta, \Delta'$  обозначим (см. (21)) (27)

$$\varphi(\Delta, \Delta') = \begin{cases} c(n_0) d_N^{-n_0}(\Delta, \Delta'), & \text{если } d_N(\Delta, \Delta') > 1; \\ 1, & \text{если } d_N(\Delta, \Delta') = 1. \end{cases}$$

Мы выберем  $n_0 \geq 5$ , Тогда

$$\varphi(\Delta) = \sum_{\Delta'} \varphi(\Delta, \Delta') \leq \text{const},$$

где сумма по всем  $\Delta'$  ранга, не большего ранга  $\Delta$ . Последняя оценка следует из того, что число кубов  $\Delta_{\ell j}$  с  $\ell \geq k$  и таких, что  $\rho(\Delta_{\ell j}, \Delta_{k i}) = 0$  для фиксированного  $\Delta_{k i} = \Delta$ , не превосходит

$$\text{const } k = \text{const} \frac{\ln \ln M_k - \ln \ln M_1}{\ln(1+\tau)}. \quad (28)$$

#### Суммирование диаграмм.

Любой отросток может быть спарен с любым при разложении (18). Если начинать со спаривания отростков максимального ранга, то ясно, что сумма диаграмм в (18) допускает оценку

$$\sum |I_G| \leq \prod_{\Delta \in \mathcal{D}} (8\varphi(\Delta))^4 (C M_{N-1}^{-2\varepsilon_0})^2, \quad (29)$$

если в каждой вершине 4 отростка и каждый куб  $\Delta$  встречается в  $\mathcal{D}$  не более чем дважды.

II. Рассмотрим теперь

$$Z_{\Lambda}^{(N,1)} = \langle \exp(-\int : (\xi_1(x) + \xi_N(x))^4 : dx) \rangle_0, \quad (30)$$

т.е.  $s_{\ell, k, i} \equiv 0$ , если  $1 < \ell < N$ . Будем считать также  $s_{1, k, i} \equiv 1$  и положим  $s_{N, k, i} = s_{k i} = s_{\Delta}$ ,

$\Delta = \Delta_{k i}$ . Мы снова используем формулы (5), (6) для  $Z_{\Lambda}$ . Множитель, соответствующий  $P_{\Delta}$  -вершине, теперь имеет вид

$$Q_{\Delta} = -4s \int_{\Delta} : (\xi_1(x) + \bar{s} \xi_N(x))^3 \xi_N(x) : dx. \quad (31)$$

Новая трудность: "моды"  $\xi_1$  и  $\xi_N$  перемешаны во взаимодействии, и если спаривать в диаграммах все случайные величины (в том числе и  $\xi_1(x)$ ), то возникает некомпенсированный комбинаторный множитель, так как  $\langle \xi_1(x) \xi_1(y) \rangle_0$  плохо убывает с ростом  $|x-y|$ . Для ее преодоления  $\xi_1(x)$  разбивается на среднее поле, подавляемое экспонентой, и имеющее лучшее убывание по  $|x-y|$  поле. Сейчас мы подробно опишем этот прием, являющийся основным в ренормгрупповой идеологии этой задачи.

Для любого поля  $\eta(x)$  и любого куба  $\Delta$  обозначим,  $x \in \Delta$ ,

$$\bar{\eta}_{\Delta} = \frac{1}{|\Delta|} \int \eta(x) dx, \quad (\delta_{\Delta} \eta)(x) = \eta(x) - \bar{\eta}_{\Delta}(x). \quad (32)$$

По неравенству Гельдера (с  $p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}$ )

$$\bar{\eta}_{\Delta}^4 \leq \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \xi^4(x) dx. \quad (33)$$

Перепишем (31) в виде

$$Q_{\Delta} = -4s \int_{\Delta} : \xi_N(x) (\bar{\eta}_{\Delta} + \delta_{\Delta} \eta(x))^3 : dx, \quad (34)$$

где

$$\eta(x) = \xi_1(x) + \bar{s} \xi_N(x).$$

После раскрытия скобок под знаком интеграла в (34) мы получим члены вида

$$: \xi_N \bar{\eta}^3 : , : \xi_N \bar{\eta}^2 \delta \eta : , : \xi_N \bar{\eta} (\delta \eta)^2 : , : \xi_N (\delta \eta)^3 : . \quad (35)$$

В каждом из них, кроме последнего, избавимся частично от виковских точек, избегая спариваний  $\langle \xi_N \delta \eta \rangle, \langle (\delta \eta)^2 \rangle$ :

$$: \xi_N \bar{\eta}^3 : = \xi_N \bar{\eta}^3 - 3 \langle \xi_N \bar{\eta} \rangle \bar{\eta}^2 - 3 \xi_N \bar{\eta} \langle \bar{\eta}^2 \rangle + 3 \langle \xi_N \bar{\eta} \rangle \langle \bar{\eta}^2 \rangle ;$$

$$: \xi_N \bar{\eta}^2 \delta \eta : = \xi_N \delta \eta : \bar{\eta}^2 - : \xi_N \delta \eta : \langle \bar{\eta}^2 \rangle - 2 \langle \xi_N \bar{\eta} \rangle \bar{\eta} \delta \eta - 2 \langle \bar{\eta} \delta \eta \rangle \xi_N \bar{\eta} + 2 \langle \xi_N \eta \rangle \langle \eta \delta \eta \rangle ; \quad (36)$$

$$: \xi_N \bar{\eta} (\delta \eta)^2 : = : \xi_N (\delta \eta)^2 : \bar{\eta} - : (\delta \eta)^2 : \langle \xi_N \bar{\eta} \rangle - 2 \langle \bar{\eta} \delta \eta \rangle : \xi_N \delta \eta :$$

Мы используем следующее неравенство

$$|y|^k \leq k^k e^{y^k}, \quad k=1,2,3. \quad (37)$$

А именно, для некоторого  $\varepsilon_2 > 0$

$$\left(\Delta^{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_2}{4}} \bar{\eta}\right)^{4-k} \leq \left(\frac{k}{4}\right)^{\frac{k}{4}} e^{\Delta^{\frac{1+\varepsilon_2}{4}} \bar{\eta}^4} \leq e^{\Delta^{\varepsilon_2} \int_{\Delta} \eta^4(x) dx} \quad (38)$$

ввиду (33). Иначе говоря,

$$\bar{\eta}^k \leq \text{const} \Delta^{-\frac{k}{4}(1+\varepsilon_2)} e^{\Delta^{\varepsilon_2} \int_{\Delta} \eta^4(x) dx} \quad (39)$$

После применения формулы (5) экспонента в каждом члене имеет вид

$$\exp\left(-\sum_{\Delta} \int_{\Delta} (\xi_1(x) + S_{\Delta} \xi_N(x))^4 dx\right), \quad (40)$$

где сумма по всем  $\Delta \in R^1$  ранга  $N_0$  и  $S_{\Delta}$  - некоторые числа,  $0 \leq S_{\Delta} \leq 1$ . Мы будем говорить, что формулы (36) разбивают каждую  $P_{\Delta}$ -вершину на конечное число  $P_{\Delta, \beta}$ -вершин. Для дальнейшего сравнения с экспонентой нам нужна несколько более общая процедура. Сначала  $P_{\Delta}$ -вершину преобразуем так:

$$Q = -4s \int_{\Delta} \xi_N(x) (\xi_1(x) + \sum_{\Delta': \Delta' \supset \Delta} S_{\Delta'} f_{\Delta'}(x) \xi_N(x) + (\bar{s} - \sum_{\Delta': \Delta' \supset \Delta} S_{\Delta'} f_{\Delta'}(x)) \xi_N(x))^3 dx, \quad (41)$$

где  $f_{\Delta'}(x)$  - характеристическая функция множества  $\Delta'$ ,  $\Delta'$  имеют ранг  $N_0$ .

Далее, обозначая

$$\eta(x) = \xi_1(x) + \sum_{\Delta': \Delta' \supset \Delta} S_{\Delta'} f_{\Delta'}(x) \xi_N(x) \quad (42)$$

и раскрывая в (41) скобки, мы получим новые множители вида

$$s^k \int_{\Delta} \xi_N^k \eta^{4-k}(x) dx, \quad k=1,2,3,4. \quad (43)$$

Если  $k=4$ , мы не применяем разбиения (36), если  $k=2,3$ , то поступаем аналогично случаю  $k=1$ . Далее при обсуждениях будем иметь в виду (самый неприятный) случай  $k=1$ .

Изменим несколько процедуру применения неравенства Шварца в (16): отнесем все множители  $\bar{\eta}^k$  к экспоненте. Тогда из (40) и (39) мы видим, что вторые множители при применении неравенства Шварца оцениваются сверху выражением

$$\langle \exp(-2 \sum_{\Delta} \int_{\Delta} \eta^4(x) dx + 2 \sum_{\Delta \in R^1} \Delta^{\varepsilon_2} \int_{\Delta} \eta^4(x) dx) \rangle_0, \quad (44)$$

где первая сумма - по всем  $\Delta$  ранга  $N_0$ , а вторая - по всем  $\Delta \in R^1$ . Но

$$2 \sum_{\Delta': \Delta' \supset \Delta} (\Delta')^{\varepsilon_2} \int_{\Delta'} \eta^4(x) dx \leq \frac{3}{2} \sum_{\Delta} N_0 \int_{\Delta} \eta^4(x) dx,$$

и выкладка, аналогичная оценке Вика (2.19), показывает, что (44) оценивается сверху  $C^M$  как в (16).

Множители  $\Delta^{-\frac{k}{4}(1+\varepsilon_2)}$  мы отнесем к первому множителю, а точнее, к соответствующей  $P_{\Delta, \beta}$ -вершине. Таким образом, мы полностью устранили экспоненту и все множители  $\bar{\eta}$ : вместо экспоненты остался множитель  $C^M$ , а вместо каждого  $\bar{\eta}$  - расходящийся множитель  $\Delta^{-1/4(1+\varepsilon_2)}$  в каждой  $P_{\Delta, \beta}$ -вершине.

Далее так же, как в случае 1, возникает сумма диаграмм.

Наша цель - доказать оценку

$$Z^{(N,1)} = C + O(M_N^{-\varepsilon_0/4}), \quad (45)$$

где

$$C = \langle \exp(-\int_{\Delta_1} \xi_1^4(x) dx) \rangle_0.$$

Это будет снова следовать из леммы 6.1, верной для непустых  $R^1$  ( $b_{\emptyset} = C$ ).

Как видно, мы везде используем

Комбинаторные алгоритмы с диаграммами.

Скажем о них несколько слов с общей точки зрения.

Мы будем рассматривать суммы вида

$$\sum_G \langle I_G \rangle, \quad (46)$$

где  $G$  - обобщенные диаграммы, а  $I_G$  имеет вид (2.14).

Отростки каждой обобщенной диаграммы мы будем отождествлять с соответствующими случайными величинами. С выражениями (46) мы будем производить элементарные операции, переводящие выражения (46) в такие же:

1. Разложение отростка. Выберем одну из диаграмм  $G$  и один из ее отростков. Соответствующую ему случайную величину  $\xi$  представим в виде

$$\xi = \xi' + \xi'' \quad (47)$$

Тогда будем говорить, что из  $G$  получились две диаграммы  $G'$  и  $G''$ : обе имеют вид  $G$ , но в первой из них выбранному отростку соответствует  $\xi'$ , во второй -  $\xi''$ .

2. Спаривание отростка. Выберем  $G$  и в ней отросток. Спарим его с каждым из других свободных отростков других вершин диаграммы  $G$ . Тогда

$$I_G = \sum_{G'} I_{G'} \quad (48)$$

где  $G'$  получаются из  $G$  спариванием выбранного отростка с произвольным из отростков другой вершины.

При подобных операциях число членов суммы (46) растет. Для учета удобен язык комбинаторных множителей, сводящийся к неравенству ( $\mathcal{A}$  - некоторый класс диаграмм):

$$\sum_{G \in \mathcal{A}} |I_G| \leq \left( \sum_{G \in \mathcal{A}} c(G)^{-1} \right) \sup (c(G) \langle I_G \rangle) \leq$$

$$\leq \sup_{G \in \mathcal{A}} (c(G) \langle I_G \rangle), \quad (49)$$

если только

$$\sum_G c^{-1}(G) \leq 1. \quad (50)$$

Числа  $c(G)$ , называемые комбинаторными множителями, подбираются так, чтобы они забывались какими-либо малыми

множителями, возникающими при оценке  $\langle I_G \rangle$ .

Например, в случае 1) можно положить

$$c(G') = c(G'') = 1$$

и

$$| \langle I_G \rangle | \leq 2 \max (| \langle I_{G'} \rangle |, | \langle I_{G''} \rangle |).$$

Более общо, комбинаторным множителем может быть число  $A$  членов в сумме (49), т.е.  $c(G) \equiv A$ . Иногда надо один из множителей  $c(G')$  выбрать большим, а другой - близким к 1. Имея это в виду, мы далее часто будем опускать подобные оценки, если они очевидны.

Вернемся к нашим диаграммам. В них будут  $\delta\eta$ -отростки и петли из (36) вида  $\langle \xi_N \bar{\eta} \rangle, \langle \bar{\eta}^2 \rangle, \langle \bar{\eta} \delta\eta \rangle$ .

Нам понадобится ряд простых оценок. Сначала такой же выкладкой, как в лемме 6.2, получим (не выделяя сначала  $\xi/2$ )

$$| \langle \xi_N(x) \xi_N(y) \rangle | \leq c(n_0) d_N^{-n_0}(x, y) M_N^{1-2\xi} \quad (51)$$

Отсюда получаем оценки петель ( $x \in \Delta$ ): каждая из них, т.е.

$$| \langle \xi_N(x) \bar{\eta}_\Delta \rangle |, | \langle \bar{\eta}_\Delta^2 \rangle |, | \langle \bar{\eta}_\Delta \delta_\Delta \eta \rangle |,$$

не превосходит

$$C M_N^{1-2\xi} \frac{|\Delta_{N-1}|}{|\Delta|} \quad (52)$$

Представим каждый  $\delta\eta$ -отросток в виде суммы двух отростков

$$\delta\eta = \delta\eta_1 + \delta\eta_N, \quad \eta_1 = \xi_1, \quad \eta_N = \eta - \xi_1. \quad (53)$$

Эти отростки мы будем называть низкоимпульсными и высокоимпульсными соответственно. Каждая вершина имеет, таким образом,

$4-k \leq 4$  отростков, из них  $k_n \geq 1$  высокоимпульсных,  $k_e = 4-k-k_n$  - низкоимпульсных.

В каждой диаграмме мы оцениваем по абсолютной величине каждую петлю посредством (52) и каждое низкоимпульсное спаривание посредством

$$| \langle \delta_\Delta \eta_1(x) \delta_\Delta \eta_1(y) \rangle | \leq C |\Delta|^{1/4} |\Delta'|^{1/4}. \quad (54)$$

Докажем (54). Для этого оценим для любого  $n$

$$\begin{aligned}
 & |(\xi_n(x_1) - \xi_n(x_1 + \varepsilon_1))(\xi_n(x_2) - \xi_n(x_2 + \varepsilon_2))| = \\
 & = \left| \int e^{i(x_1 - x_2, k)} [1 - e^{i(\varepsilon_2, k)} - e^{i(\varepsilon_1, k)} + e^{i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, k)}] dx \right. \\
 & \times (a_n(k) - a_{n-1}(k)) (k^2 + m^2)^{-(\frac{3}{2} + \tilde{\varepsilon})} dk \leq \quad (55) \\
 & \leq |\varepsilon_1 \varepsilon_2| \int \frac{k^2 e^{i(x_1' - x_2', k)}}{(k^2 + m^2)^{3/2 + \tilde{\varepsilon}}} (a_n - a_{n-1}) dk \leq \\
 & \leq |\varepsilon_1 \varepsilon_2| c(n_0) d_n^{-n_0} (x_1, x_2) M_N^{3-2\tilde{\varepsilon}},
 \end{aligned}$$

где  $x_i' = x_i + \varepsilon_i'$ ,  $|\varepsilon_i'| \leq |\varepsilon_i|$ .

Отсюда легко следует (54), если положить

$$n=1, n_0=0, \varepsilon_1 = |\Delta|^{1/4}, \varepsilon_2 = |\Delta|^{1/4}.$$

После разложения отростков каждый  $b_{R'}$  оказывается представимым в виде суммы

$$b_{R'} = \sum_{\gamma} b_{R', \gamma}. \quad (56)$$

Зафиксируем  $b_{R', \gamma}$  и спарим все низкоимпульсные отростки.

Докажем, что число всевозможных спариваний не превосходит

$$N_1^F \prod_{e=1}^{N_1} F_e (F_e - 2)(F_e - 4) \dots, \quad (57)$$

где  $R'$  и  $\gamma$   $N_1 = N_1(R', \gamma)$  - максимальный ранг кубов для данных  $R'$  и  $\gamma$

$F_e = \sum_{\delta \eta} F_{e, \delta \eta}$ ,  $F_e$  - число всех отростков из всех  $P_{\Delta, \beta}$  - вершин для кубов  $\Delta$  ранга  $e$ .

Действительно, упорядочим произвольно все кубы. Возьмем первый куб максимального ранга и спарим его с произвольным кубом некоторого ранга  $K$ . При этом возникает комбинаторный множитель  $N_1 \cdot F_K$ . Далее возьмем первый из оставшихся кубов ранга  $K$  и с ним проделаем ту же процедуру и т.д.

Множитель

$$N_1^F = (C \ln \ln F_{N_1})^F$$

мы запомним. Он забьется далее множителями  $(M_N^{-\varepsilon_0})^{\mathcal{D}}$ , где  $\mathcal{D}$  - число вершин. Далее,

$$F_e \leq \frac{C}{|\Delta e|}$$

и с учетом (54) мы получим расходящийся множитель  $C/|\Delta|^{-1/4}$  на каждый  $\delta \eta$  - отросток. Таким образом, окончательно имеем средние вида

$$\left\langle \prod_{\Delta \in \mathcal{D}} \left[ \left( \int_{\Delta} \xi_N^k(x) dx \right) \Delta^{-\frac{4-k}{4} - \varepsilon_2} \right] \right\rangle, \quad (58)$$

где  $k = k(\Delta)$  может быть равным 1, 2, 3, 4.

Возможен также случай, когда  $k=0$ , т.е. в соответствующей  $P_{\Delta, \beta}$  -вершине две петли. Тогда интегрирование

$$\int_{\Delta} dx \quad \text{в этой вершине с учетом (52) дает множитель}$$

$$C M_N^{2(1-2\tilde{\varepsilon})} |\Delta_{N-1}| \frac{|\Delta_{N-1}|}{|\Delta|} \leq C M_N^{-\varepsilon_0} \quad (59).$$

на эту вершину.

Пусть теперь все  $k_{\Delta} \geq 1$ . Тогда мы поступаем как в доказательстве леммы 6.2. Однако после выделения множителей

$$c(n_0) d_n^{-n_0}$$

мы поступим несколько иначе. А именно, используем лемму 3.1, а в качестве разбиения диаграммы возьмем разбиение на отдельные вершины. При этом получим дополнительный множитель

$$\prod_{\Delta} \left\langle \iint_{\Delta} c_{\max}^{k_{\Delta}}(x-y) dx dy \right\rangle^{1/2} \leq$$

$$\leq C |\Delta|^{1/2} |\Delta|^{1/2} \cdot \frac{1}{4} (4 - k_\Delta (1 - \tilde{\varepsilon})), \quad (60)$$

где  $C_{\max}$  - общая мажоранта всех  $C_{e, k, q}(x, y)$  из (25).  
С учетом (58) мы получим множитель на каждую вершину, равный

$$C \Delta^{-\frac{4-k_\Delta}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{k_\Delta}{8} (1 - \tilde{\varepsilon})} = C \Delta^{\frac{k_\Delta}{8} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{8} - \varepsilon_2}. \quad (61)$$

Нам достаточно того, что он не превосходит константы. Поэтому и в нашей ситуации верна лемма 6.2, откуда и следует устойчивость статсуммы.

### § 7. ОБЛАСТЬ $\varepsilon > \frac{1}{2}$ : ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Для рассмотрения общего случая фактически не надо никаких новых идей: мы просто используем все, что узнали в предыдущем параграфе, и немного обобщим.

Итак, мы рассматриваем выражение (6.2), начиная с  $Q \equiv 1$   
 $S_{ek_i} \equiv 1$ . Вместо (6.5) мы будем использовать тождество

$$Z_\Lambda = \left\langle \prod_{\alpha \in R} (I_\alpha + P_\alpha) \exp(-U_N) \right\rangle_0 = \sum_{R'} \theta_{R'}, \quad (1)$$

где теперь под  $R$  будем понимать множество всех клеток  $(\ell, \Delta_{ki}) = \alpha$  таких, что  $k \leq \ell - d_0$ . В множестве клеток введем частичное упорядочивание:

$$\alpha = (\ell, \Delta_{ki}) < \alpha' = (\ell', \Delta_{k'i'}),$$

если либо  $k < k'$ , либо  $k = k'$  и  $\ell > \ell'$ . Мы считаем в (1), что если  $\alpha > \alpha'$ , то  $I_\alpha + P_\alpha$  стоит правее  $I_{\alpha'} + P_{\alpha'}$ . В остальном порядок произволен.  $R$  расслаивается  $R = UR_e$  на множестве  $R_e$  "кубов":

$$R_e = \{\Delta_{ki} : k \leq \ell - d_0\} \approx \{(\ell, \Delta_{ki}) : k \leq \ell - d_0, \text{ фиксир. } \ell\}$$

Подмножество  $R' \subset R$  назовем допустимым, если  $R' \cap R_e$  допустимо в прежнем смысле для всех  $\ell$ .

В двух словах: мы применяем прежнюю процедуру для каждого "слоя импульсов"  $(M_{e-1}, M_e)$ .

Формула (6.6) для всех  $\theta_{R'}$  сохраняется.

Лемма 7.1.

Существует  $\varepsilon_0 > 0$  и  $C > 0$  такие, что

$$|\theta_{R'}| \leq \prod_e (C M_e^{-\varepsilon_0/2})^{|R' \cap R_e|}. \quad (2)$$

Доказательство устойчивости, исходя из леммы 7.1, такое же, как раньше, если применить его ("послойно") для каждого  $\ell$ . Нам остается доказать лемму 7.1.

Множитель, соответствующий  $P_\alpha$ -вершине,  $\alpha = (\ell, \Delta_{ki})$ , имеет вид

$$Q_\alpha = Q_\alpha(R') = -4 \bar{s}_\alpha \int_{\Delta_{ki}} \xi_e(x) (w_\alpha(x) + h_\alpha(x))^3 dx, \quad (3)$$

где

$$w_\alpha(x) = s_1^{(\alpha)} \xi_1(x) + \dots + s_{k+d_0-1}^{(\alpha)} \xi_{k+d_0-1}(x),$$

$$h_\alpha(x) = \bar{s}_{k+d_0}^{(\alpha)} \xi_{k+d_0}(x) + \dots + \bar{s}_N^{(\alpha)} \xi_N(x)$$

называются соответственно низкоимпульсным (плохо локализованным) и высокоимпульсным (хорошо локализованным) полями.

При этом также  $\xi_e$  хорошо локализовано (т.е.  $\ell \gg k + d_0$ ).

Таким образом,

$$\theta_{R'} = \left[ \prod_{\alpha \in R'} Q_\alpha \right] \exp \left[ - \sum_j \int_{\Delta_{Nj}} \left( \sum_{m=1}^N S_{mnj} \xi_m(x) \right)^4 dx \right]. \quad (4)$$

Очень важно при этом, что

$$S_{mnj} = S_m^{(\alpha)}, \quad (5)$$

если  $\alpha = (\ell, \Delta_{ki})$ ,  $\Delta_{Nj} \subset \Delta_{ki}$  и  $m \leq k-1+d_0$ .

Это следует из нашего упорядочения клеток: если уже сделаны все разложения в кубах ранга  $k-1$  и меньшего ранга, то разложения в импульсных слоях "ранга"  $m \leq k-1+d_0$  не

делаются. Это позволяет использовать процедуру предыдущего параграфа: ввести поля  $(\alpha = (\ell, \Delta_{ki}))$

$$\varphi_\alpha(x) = W_\alpha(x) + \sum_{m=k+d_0}^N \sum_j S_{mNj} f_{\Delta_{Nj}}(x) \xi_m(x), \quad (6)$$

$$\bar{\varphi}_\alpha = \frac{1}{|\Delta_{ki}|} \int \varphi_\alpha(x) dx, \quad \delta\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x) - \bar{\varphi}_\alpha.$$

Тогда

$$Q_\alpha = -4\bar{S}_\alpha \int_{\Delta_{ki}} \xi_e(x) (\bar{\varphi}_\alpha + \delta\varphi_\alpha(x) + \sum_{m=k+d_0}^N S_m(x) \xi_m(x))^3 dx, \quad (7)$$

$$S_m(x) = \sum_j (-f_{\Delta_{Nj}}(x) S_{mNj}) + \bar{S}_m^{(\alpha)}.$$

Далее, действуя в точности как в §6, исключаем все  $\bar{\varphi}_\alpha$ , получая вместо каждого из них расходящийся множитель

$$|\Delta_{ki}|^{-1/4(1+\varepsilon_2)}$$

Разберемся теперь, какие петли и отростки будут в получившихся после устранения экспоненты диаграммах. Так же как и раньше, петли будут

$$|\langle \xi_e(x) \bar{\varphi}_\alpha \rangle| \leq CM_e^{1-2\tilde{\varepsilon}} \frac{|\Delta_{e-1}|}{|\Delta_{ki}|},$$

$$\langle \bar{\varphi}_\alpha^2 \rangle \leq \sum_{z=k+d_0}^N CM_z^{1-2\tilde{\varepsilon}} \frac{|\Delta_{z-1}|}{|\Delta_{ki}|} \leq CM_{k+d_0}^{1-2\tilde{\varepsilon}}, \quad (8)$$

$$|\langle \bar{\varphi}_\alpha \delta\varphi_\alpha \rangle| \leq CM_{k+d_0}^{1-2\tilde{\varepsilon}}.$$

Нам достаточно гораздо более грубой оценки сверху

$$|\Delta_{ki}|^{-1/2 + \varepsilon_0}$$

для каждой петли. Поэтому оценки с петлями такие же, как в §6.

Разбиваем каждый  $\delta\varphi_\alpha$  -отросток на низкоимпульсные  $\delta\varphi_{\alpha,i}$ ,  $i=1, \dots, k+d_0-1$ , и высокоимпульсные  $\delta\varphi_{\alpha,i}$  -отростки,  $i=k+d_0, \dots, N$ . Высокоимпульсные отростки мы трактуем наравне с  $\xi_j$  -отростками,  $j=k+d_0, \dots, N$ , используя их для окончательной оценки. Каждое низкоимпульсное спаривание мы оцениваем, снова используя (6.55)

$$|\langle \delta\varphi_{\alpha,n}(x) \delta\varphi_{\alpha',n}(y) \rangle| \leq |\Delta|^{1/4} |\Delta'|^{1/4} c(n_0) d_n^{-n_0} (\Delta, \Delta') M_n^{3-2\tilde{\varepsilon}}, \quad (10)$$

если  $\alpha = (m, \Delta)$ ,  $\alpha' = (m, \Delta')$ . Учитывая множитель  $d_n^{-n_0} (\Delta, \Delta')$  в (10) мы видим, что комбинаторный множитель  $F_e = \frac{c}{|\Delta_e|}$  переходит в множители  $F_{e,n}$ ,

$$F_{e,n} \leq \frac{c |\Delta_{n-1}|}{|\Delta_e|} \quad - \text{числа всех } \delta\varphi_{\alpha,n} -$$

отростков из всех  $P_\alpha$  -вершин,  $\alpha = (z, \Delta)$ , для кубов  $\Delta$  ранга  $\ell$ . Снова имеем оценку

$$N_1^{\sum F_{e,n}} \prod_{\ell=1}^{N_1} \prod_{n \leq \ell + d_0} F_{e,n} (F_{e,n} - 2)(F_{e,n} - 4) \dots \quad (11)$$

Поэтому на каждый  $\delta\varphi_{\alpha,n}$  -отросток,  $\alpha = (m, \Delta)$  имеем множитель

$$|\Delta_e|^{-1/4} M_n^{3-2\tilde{\varepsilon}} |\Delta_{n-1}| \leq |\Delta_e|^{-1/4} M_n^{-\varepsilon_0}. \quad (12)$$

Далее все так же, как в конце §6.



§8. ФОРМАЛЬНЫЕ ПЕРЕНОРМИРОВКИ

В области  $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$   
 $\langle U_N \rangle_0 = 0$ ,  $\langle U_N^2 \rangle_0 \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,

но семинварианты  $\langle U_N^{2n} \rangle_0$  остаются конечными при  $N \rightarrow \infty$ , если  $n \geq 3$ , так как только одна диаграмма (связная) расходится, а именно, диаграмма



Поэтому случайная величина  $U_N / \langle U_N^2 \rangle_0^{1/2}$  асимптотически нормальна при  $N \rightarrow \infty$ , так как ее семинварианты

$$\frac{1}{\langle U_N^2 \rangle_0^{n/2}} \langle U_N^{2n} \rangle_0 \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Отсюда очевидно, что

$$\langle e^{-U_N} \rangle_0 \rightarrow \infty \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

В следующем параграфе мы докажем

Теорему 8.1.

При  $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$  перенормированная статистическая сумма, т.е.

$$Z_N^{ren} \equiv \langle e^{-U_N - E_N} \rangle_0$$

устойчива, если

$$E_N = \frac{1}{2} \bigcirc \equiv \frac{1}{2} 4! \int_{\Lambda} C_N^4(x-y) dx dy = \frac{1}{2} \langle \int_{\Lambda} \xi_{\leq N}^4(x) : \xi_{\leq N}^4(y) : \rangle_0 dx dy.$$

Необходимо как-то изменить взаимодействие, чтобы обеспечить устойчивость статистической суммы и конечность функций Швингера при сохранении свойства OS-положительности. Предписание, как это сделать, дает формальная теория перенормировок. В ней рассматриваются формальные ряды по параметру  $\lambda$  для

$$Z = \langle e^{-\lambda U_N} \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n,$$

$$\ln Z_N = \ln \langle e^{-\lambda U_N} \rangle_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^n,$$

$$\langle \xi(f_1) \dots \xi(f_k) \rangle_{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f_1, \dots, f_k) \lambda^n. \quad (1)$$

Здесь

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \langle U_N^n \rangle_0, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n!} \langle U_N^{2n} \rangle_0 - n\text{-й семинвариант } U_N,$$

$$c_n(f_1, \dots, f_k) = \frac{(-1)^n}{n!} \langle \xi(f_1) \dots \xi(f_k), U_N^{2n} \rangle_0$$

(о семинвариантах и обозначениях см. [19]).

Взаимодействие  $U_N$  заменяется на перенормированное взаимодействие  $U_N^{ren} = U_N^{ren}(\lambda)$ , являющееся многочленом по  $\lambda$  (или в общем случае - формальным рядом по  $\lambda$ ) такое, что для следующих формальных рядов

$$\langle e^{-U_N^{ren}(\lambda)} \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{ren} \lambda^n,$$

$$\ln \langle e^{-U_N^{ren}(\lambda)} \rangle_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{ren} \lambda^n,$$

$$\frac{\langle \xi(f_1) \dots \xi(f_k) \exp(-U_N^{ren}(\lambda)) \rangle_0}{\langle \exp(-U_N^{ren}(\lambda)) \rangle_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n c_n^{ren}(f_1, \dots, f_k), \quad (2)$$

каждый член  $a_n^{ren}, b_n^{ren}, c_n^{ren}(f_1, \dots, f_k)$  имеет конечный предел при  $N \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим сначала случай, когда только вакуумные диаграм-

мы расходятся. В случае  $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$

$$U_N^{ren} = \lambda U_N + \lambda^2 E_N, \quad E_N = \frac{1}{2} \langle U_N^2 \rangle_0.$$

В общем случае также достаточно добавить к взаимодействию некоторую зависящую от  $N$  константу (точнее, формальный ряд по  $\lambda$  с постоянными, зависящими от  $N$  коэффициентами).

Утверждение 8.1.

Пусть даны числа  $E_n^{(N)}$  такие, что при всех  $n$

$$b_n^{(N)} = (-1)^n \langle U_N^{ren} \rangle_0 - E_n^{(N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} b_n^{ren}, \quad (3)$$

$$|b_n^{ren}| < \infty.$$

Положим

$$U_N^{ren} = \lambda U_N + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} E_n^{(N)}. \quad (4)$$

Тогда все члены в правых частях (2) имеют конечный предел при  $N \rightarrow \infty$ .

Доказательство.

$$\ln \langle \exp(-U_N^{ren}) \rangle_0 = \ln \langle e^{-\lambda U_N} \rangle_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} E_n^{(N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} b_n^{ren}. \quad (5)$$

Поэтому

$$\langle e^{-U_N^{ren}} \rangle_0 \rightarrow \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} b_n^{ren}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{\alpha} b_{n_1}^{ren} \dots b_{n_k}^{ren}, \quad (6)$$

где сумма по всем разбиениям  $\alpha = \{T_1, \dots, T_k\}$  множества  $\{1, \dots, n\}$  на блоки  $T_i$  с  $|T_i| = n_i$ .

Третий ряд в (2) не меняется при такой перенормировке. Каждый член первоначального ряда имеет конечный предел, так как все (невакуумные) диаграммы сходятся.

Замечание 8.1.

Может показаться, что ввиду последнего факта можно вообще не делать перенормировок. Однако, метод доказательства теоремы 8.1 (см. ниже §9) требует такой перенормировки.

В случае квадратичного взаимодействия

$$U_N = \int_{\Lambda} \xi_{\leq N}^2(x) dx$$

необходимость перенормировки при  $\nu \geq 4$  связана, очевидно, с сингулярностью гауссовских мер  $\mu_0$  и  $\mu_{\Lambda}$  (еще до термодинамического предельного перехода  $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$ ).

Мы переходим теперь к общему случаю.

Напомним, что с каждой диаграммой  $G$  связывается функция

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_e C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)}).$$

Пусть каждому  $V \subset \{1, \dots, n\}$  поставлено в соответствие целое число  $\alpha_V \geq 0$ . Для любого набора  $\alpha = \{\alpha_V\}$ , где  $V$  пробегает непустые подмножества  $\{1, \dots, n\}$ , обозначим через  $S(\alpha)$  подпространство пространства Шварца  $S(\mathbb{R}^{dn})$  функций  $f(x_1, \dots, x_n)$  таких, что для любого  $V = \{i_1, \dots, i_k\}$  все производные порядка  $\leq \alpha_V$  равны нулю на плоскости  $x_{i_1} = \dots = x_{i_k}$ .

Трудности с ультрафиолетовыми расходимостями состоят фактически в том, что  $G(x_1, \dots, x_k)$  не является обобщенной функцией умеренного роста, т.е. не для всех  $f \in S(\mathbb{R}^{dn})$

$$\int_{\mathbb{R}^{dn}} G f dx_1 \dots dx_k$$

конечен. Однако имеет место

Утверждение 8.2.

Существует набор  $\alpha = \{\alpha_V\}$ ,  $\alpha_V < \infty$ , такой, что интеграл (7) конечен для всех  $f \in S(\alpha)$ .

Это следует из теоремы счета степеней.

Мы покажем, что перенормировка взаимодействия связана с продолжением линейного функционала (7) с  $S(\alpha)$  на  $S(\mathbb{R}^{dn})$ .

Расходимость массовых диаграмм.

Рассмотрим теперь случай  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  (эквивалентный  $\psi_3^4$ ). В этом примере расходятся только диаграммы

$$G_1 = \text{circle with two internal lines}, \quad G_2 = \text{circle with three internal lines}, \quad G_3 = \text{circle with four internal lines}.$$

Заметим, что в ранее рассмотренном случае замена  $U \rightarrow U^{ren}$  приводила к следующему эффекту: в каждом члене рядов (1) все диаграммы, содержащие расходящиеся вакуумные диаграммы



обращались в нуль. Такой эффект называется перенормировкой членов ряда (диаграмм) или  $R$ -операцией. Иначе говоря, например,  $Ra = a^{ren}$ .

Определим теперь  $R$ -операцию для случая  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ . Для каждой диаграммы  $R$ -операция состоит в замене

$G(x_1, \dots, x_n)$  на другую функцию

$$(RG)(x_1, \dots, x_n) = G^{ren}(x_1, \dots, x_n).$$

Это делается по следующим правилам:

1. Каждая вакуумная диаграмма, изоморфная  $G_1$  или  $G_2$ , заменяется на 0, т.е. если в  $G$  есть связанная компонента, изоморфная  $G_1$  или  $G_2$ , то  $RG = 0$ .

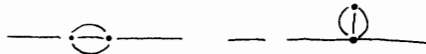
2. Для любой массовой поддиаграммы, изоморфной  $G_3$  с вершинами  $i_1, i_2, i_1 < i_2$ , множитель  $C(x_{i_2} - x_{i_3})$ , соответствующий внешнему ребру этой поддиаграммы, выходящему из вершины  $i_2$ , заменяется на

$$C(x_{i_2} - x_{i_3}) - C(x_{i_1} - x_{i_3}).$$

Иначе говоря, диаграмма



заменяется на разность



(вычитается "головастик").

В этом же случае перенормированное взаимодействие вводится

так:

вакуумные контрчлены массовый контрчлен

$$U_{\mathcal{K}}^{ren} = \lambda U_{\mathcal{K}} + \lambda^2 E_2 - \lambda^3 E_3 - \lambda^2 M,$$

$$E_2 = E_2(\mathcal{K}, \lambda) = \frac{1}{2} \langle \int \xi_{\mathcal{K}}^4(x) :: \xi_{\mathcal{K}}^4(y) : dx dy \rangle_0,$$

$$E_3 = \frac{1}{3!} \langle \int \xi_{\mathcal{K}}^4(x) : dx \rangle_0^3, \quad (7)$$

$$M = \int \delta m(x) : \xi_{\mathcal{K}}^2(x) : dx,$$

$$\delta m = \frac{\lambda^2}{2} \langle \int \xi_{\mathcal{K}}^2(x) :: \xi_{\mathcal{K}}^3(y) : dy \rangle_0 =$$

$$= \frac{\lambda^2 \cdot 3!}{2} \langle \int C_{\mathcal{K}}^3(x-y) dy \rangle_0.$$

Далее мы определим в общем случае  $U^{ren}$  и  $R$ -операцию  $RG$  над диаграммами. Связь между ними дает следующее утверждение, которое мы докажем чуть ниже.

Теорема 8.2.

Коэффициенты рядов (2) получаются применением  $R$ -операции к соответствующим коэффициентам рядов (1), т.е.

$$a_n^{ren} = R a_n, \quad b_n^{ren} = R b_n, \quad (8)$$

$$C_n^{ren}(f_1, \dots, f_k) = R C_n(f_1, \dots, f_k).$$

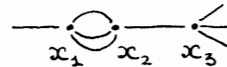
Теорема 8.3.

$a_n^{ren}, b_n^{ren}, c_n^{ren}(f_1, \dots, f_k)$  имеют конечный предел при снятии ультрафиолетового урезания.

Эта теорема Боголюбова - Парасика является основой формальной теории перенормировок.

Докажем теорему 8.3 для случая  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ .

Пусть сначала в  $G$  есть только одна массовая поддиаграмма



Разобьем область интегрирования на две:

I.  $|x_3 - x_2| > 3|x_1 - x_2|$ .

Здесь оценим

$$|C(x_2 - x_3) - C(x_1 - x_3)| \leq |x_1 - x_2| C'(x - x_3),$$

где  $x$  принадлежит отрезку, соединяющему точки  $x_2$  и  $x_1$ .  
Далее достаточно применить теорему счета степеней.

II.  $|x_3 - x_2| < 3|x_1 - x_2|$ .

Учтем, что

$$|C(x_2 - x_3) - C(x_1 - x_2)| \leq C(x_2 - x_3) + C(x_1 - x_3),$$

и снова используем теорему счета степеней (точнее, ее доказательство).

В случае, если в  $G$  есть  $S$  массовых поддиаграмм  $K_1, \dots, K_S$ , изоморфных  $G_3$ , разобьем область интегрирования на  $2^S$  частей  $A_I, I \subset \{1, \dots, S\}$ . Пусть  $f(i)$  - вершина, не принадлежащая  $K_i$  и соединенная ребром со второй вершиной  $e(i)$  из  $K_i$ , пусть  $g_i$  - первая вершина  $K_i$ . Определим  $A_I$  как область, где

$$|x_{e(i)} - x_{f(i)}| < 3|x_{e(i)} - x_{g(i)}|, \quad i \in I,$$

$$|x_{e(i)} - x_{f(i)}| > 3|x_{e(i)} - x_{g(i)}|, \quad i \in \bar{I}.$$

Далее так же, как и выше, дело сводится к теореме счета степеней.

Теперь мы переходим к определению  $R$ -операции в общем случае.

Алгебра диаграмм и операций над диаграммами.

Вернемся к определению (2.14) диаграмм общего вида. Разбиение каждой диаграммы будем считать состоящим из одного блока - всего  $E$ . Подынтегральное выражение в (2.14) обозначим

$\hat{G}(x_1, \dots, x_n)$ . Его можно рассматривать как случайное поле на  $R^n$ . Пусть  $\mathcal{L}_n$  - пространство линейных комбинаций выражений  $\hat{G}$  для фиксированного  $n$ . Рассмотрим прямую сумму  $\mathcal{L} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$

т.е. бесконечные наборы  $(z_0, z_1, \dots)$  элементов  $z_i \in \mathcal{L}_i$ ,  $z_0$  - константы.

Преобразим  $\mathcal{L}$  в алгебру, введя следующим образом (некоммутативное) произведение  $\hat{G}_1 * \hat{G}_2$ . Пусть

$$\hat{G}_1(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}_n, \quad \hat{G}_2(y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{L}_m.$$

Рассмотрим случайную величину

$$\hat{G}_1(x_1, \dots, x_n) \hat{G}_2(y_1, \dots, y_m) = \hat{G}_1 * \hat{G}_2$$

и разложим ее по мономам Вика. При этом мы используем следующее правило: произведение двух диаграмм (изображающих мономы Вика) есть сумма диаграмм, полученных объединением этих двух свободных отростков (возможно пустого) из разных диаграмм (см. [19]). Таким образом  $\hat{G}_1 * \hat{G}_2 \in \mathcal{L}_{n+m}$ . Так что  $\mathcal{L}$  есть алгебра и для любого  $S \in \mathcal{L}$  имеет смысл экспонента  $e^S \in \mathcal{L}$ .

Определим теперь ряд операций над диаграммами.

$M$ -операция. Рассмотрим связную диаграмму  $G$  без свободных отростков, с множеством вершин  $\{1, \dots, n\}$ . Пусть

$$V = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}, \quad i_1 < \dots < i_k.$$

Можно записать

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_e' C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)}) \prod_e'' C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)}),$$

где в  $\prod'$  произведение берется по всем ребрам  $e$  таким, что одна из вершин  $e(j(e))$  не принадлежит  $V$ , а вторая  $(i(e))$  совпадает с одной из вершин  $i_2, \dots, i_k$ ; в  $\prod''$  - по остальным ребрам. Определим операцию  $M(V)$ :

$$M(V)G(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n) \prod_e'' C_e(x_{i(e)} - x_{j(e)}), \quad (9)$$

где  $F$  - отрезок ряда Тейлора до порядка  $\omega(V)$  включительно разложения  $\prod'$  как функции  $x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$  в точке  $x_{i_2} = x_{i_1}, \dots, x_{i_k} = x_{i_1}$  (т.е. по  $(x_{i_1} - x_{i_2}), \dots, (x_{i_1} - x_{i_k})$ ).

Мы положим

$$M(V)G = 0,$$

если либо  $\omega(V) < 0$ , либо  $|V| = 1$ , либо  $V$  не является одночастично неприводимой (в частности, если  $V$  несвязна).

Если  $V = \{1, \dots, n\}$ , то  $M(V)G = G$ .  
 Удобно представлять себе  $M(V)G$  как элемент  $\mathcal{L}_n$

т.е.

$$M(V)G = \sum G'(x_1, \dots, x_n), \quad (10)$$

где сумма берется по нескольким диаграммам  $G'$ , которые получаются из  $G$  следующим образом:

1. Каждое ребро  $e$  из вершины  $v \in V$  в некоторую вершину  $i_m, m=2, \dots, k$ , становится ребром из  $v$  в  $i_1$ . При этом пропагатором этого ребра (т.е. множитель, соответствующий этому ребру) является производная  $C_e$  порядка  $\alpha_e$ .
2. Появятся новые ребра из  $i_1$  в  $i_m, m=2, \dots, k$ , с пропагаторами вида

$$\frac{1}{\beta_m!} (x_{i_m} - x_{i_1})^{\beta_m}$$

Например, в случае  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ,  $M(V)G = 0$  за исключением двух случаев; если  $G$  - расходящаяся вакуумная диаграмма, то  $M(V)G = G$ , а если  $V$  - массовая расходящаяся поддиаграмма  $G$ , то  $M(V)G$  есть  $G$ , где  $V$  заменяется на "головастик".

В общем случае  $M(V)$  также означает замену в  $G$  поддиаграммы  $V$  "головастиком".

$\Lambda$ -операция и  $R$ -операция.

Так как при применении  $M(V)$  вершины и их нумерация не меняются, то имеет смысл операции  $M(V_1) + M(V_2)$  и  $M(V_1)M(V_2)$ . Иначе говоря, для заданного множества вершин  $M(V)$  порождают алгебру, действующую в  $\mathcal{L}_n$ . Заметим, что  $M(V_1)$  и  $M(V_2)$  коммутируют, если

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

В этой алгебре положим

$$\Lambda(V) = 1, \text{ если } |V| = 1, \text{ а если } |V| \geq 2, \text{ то}$$

$$\Lambda(V) = -M(V) \sum_{\alpha} \Lambda(V_1) \dots \Lambda(V_m), \quad (11)$$

где сумма по всем разбиениям  $\alpha = \{V_1, \dots, V_m\}$  с  $m > 1$  множества  $V$ .

Лемма-определение 8.1.

Пусть  $N = \{1, \dots, n\}$ . Тогда следующие определения эквивалентны:

$$1. R = \sum_{\alpha} \Lambda(V_1) \dots \Lambda(V_m), \quad (12)$$

где сумма по всем разбиениям  $\alpha = \{V_1, \dots, V_m\}$  множества  $N$ ;

$$2. R = 1 + \sum_{\{V_1, \dots, V_k\}} (-1)^k M(V_1) \dots M(V_k), \quad (13)$$

где сумма по всем лесам, т.е. наборам  $\{V_1, \dots, V_k\}$  таким, что отсутствуют частично пересекающиеся пары (т.е. пары  $V_i, V_j$  такие, что

$$V_i \cap V_j, V_j - V_i, V_i - V_j$$

непусты) и порядок умножения таков: если  $V_i \supset V_j$ , то  $M(V_i)$  стоит левее  $M(V_j)$ , а в остальном порядок безразличен.

Доказательство очевидно.

Тем самым  $R$ -операция определена для всех диаграмм без свободных отростков. Мы определим теперь действие операций  $M, \Lambda, R$  на диаграммы общего вида. Достаточно определить действие  $M(V)$ , а оно определяется так же, как и раньше, только в множитель, подлежащий разложению в ряд Тейлора, т.е. в  $\Pi'$  включается и

$$:\prod_{z \in E} \xi_z(x_{i(z)}):$$

По линейности операции  $\Lambda$  и  $R$  определяются на любом элементе  $\mathcal{L}$ .

Определим перенормированное взаимодействие формулой

$$-U^{ren} = \Lambda(e^{-\lambda U} - 1). \quad (14)$$

Таким образом, в общем случае это формальный ряд по  $\lambda$ . Нетрудно видеть, что это определение согласуется с определением (7) в рассмотренном выше примере. Перейдем к доказательству теоремы 8.2. Докажем сначала, что

$$\langle \exp(-U^{ren}) \rangle_0 = R \langle \exp(-\lambda U) \rangle_0, \quad (15)$$

т.е. первую формулу (8).

Перепишем левую часть

$$\begin{aligned} & \langle \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \wedge(-U)^k\right) \rangle_0 = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \sum_{(k_1, \dots, k_s), k_1 + \dots + k_s = m} \frac{1}{k_1! \dots k_s!} \langle \wedge(-U)^{k_1} \dots \wedge(-U)^{k_s} \rangle_0 = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \sum_{\alpha} \langle \wedge(U^{k_1}) \dots \wedge(U^{k_s}) \rangle_0 = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-\lambda}{m!}\right) R(\langle U^m \rangle_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Для доказательства второй и третьей формул (8) достаточно заметить, что  $R$  мультипликативна в следующем смысле:

$$R(\langle U^m \rangle \langle U^n \rangle) = R(\langle U^m \rangle) R(\langle U^n \rangle)$$

и, следовательно,  $R \ln = \ln R$ . Отсюда вторая формула (8) следует, если взять  $\ln$  от обеих частей (15).

Теперь мы только вкратце скажем о доказательстве теоремы Боголюбова - Параскиа.

Заметим, во-первых, что в случае, когда в диаграмме отсутствуют частично пересекающиеся примитивно расходящиеся поддиаграммы (а так обстоит дело в нашей модели при  $\varepsilon > 0$ ), доказательство ее чрезвычайно просто. Действительно, правая часть формулы (13) в этом случае переписывается в виде

$$R = \prod_V (1 - M(V)), \quad (17)$$

где произведение по всем  $V$  с  $\omega(V) \geq 0$ , причем если  $V \supset V'$ , то  $1 - M(V)$  стоит левее  $1 - M(V')$ , в остальном порядок безразличен. Далее доказательство вполне аналогично приведенному выше доказательству для случая  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ .

Для общего случая доказательство на русском языке имеется в работах [15, 16]. Оно использует  $\alpha$ -представление и легко переводится в евклидову область. Идея доказательства такая же, как в теореме счета степеней - проверить отсутствие (в данном случае сокращения) расхождений в каждом опасном секторе.

## § 9. ОБЛАСТЬ $\frac{1}{3} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$

В этой области расходится одна вакуумная диаграмма

$$\text{---} \circ \text{---} \quad (1)$$

и согласно предписаниям § 8 мы рассмотрим взаимодействие

$$U_N^{ren} = U_N + E_N,$$

$$E_N = \langle \iint_{\wedge \wedge} \xi_{\leq N}^4(x) :: \xi_{\leq N}^4(y) : dx dy \rangle_0. \quad (2)$$

Мы снова докажем равномерную ограниченность

$$Z_N^{ren} = \langle \exp(-U_N - E_N) \rangle_0 \leq \text{const}. \quad (3)$$

Отсюда не следует, конечно, существования предельной меры  $\mu_{\wedge}$ , но совершенно аналогичное кластерное разложение для

$$\langle \exp(i \xi_{\varphi} - U_N^{ren}) \rangle_0 \quad (4)$$

показывает существование предела (3) для любой  $\varphi \in S(R^D)$  и для производящего функционала

$$\langle e^{i \xi_{\varphi}} \rangle_{\mu_{\wedge}} = \frac{\langle \exp(i \xi_{\varphi} - U_N^{ren}) \rangle_0}{\langle \exp(-U_N^{ren}) \rangle_0}. \quad (5)$$

Из кластерного разложения следуют также различные свойства непрерывности этого функционала по  $\varphi$ , откуда вытекает, что он определяет меру  $\mu_{\wedge}$ , сингулярную относительно  $\mu_0$ . Из кластерного разложения следует также  $OS$ -положительность поля, определяемого мерой  $\mu_{\wedge}$ .

Новая трудность возникает при доказательстве (3): при заключительной оценке диаграмм в них возникают связанные компоненты вида (1), и мы не получим множителя  $M_e^{-\varepsilon_0}$  в каждой

$P(e, \Delta)$  - вершине. Надо сократить эти компоненты. Для







$m_\alpha = 1$ , если  $|\Delta_\kappa|^{-1} \leq M_e^{\epsilon/2}$  (случай 2);

$m_\alpha = [M_e^\epsilon]$ , если  $|\Delta_\kappa|^{-1} > M_e^{\epsilon/2}$  (случай 1).

Определение  $C_\alpha$ .

Случай 1. Как только возникает  $P_\alpha$ -вершина, все ее отростки спариваются. Появляются новые  $C_\alpha$ -вершины, все отростки которых снова спариваются со следующими исключениями:  
 $a_1$ ) если  $P_\alpha$ -вершина получается из массового контрчлена, то отростки появившихся здесь  $C_\alpha$ -вершин не спариваются;

$a_2$ ) если  $P_\alpha$ -вершина оказывается спаренной три раза с одной новой  $C_\alpha$ -вершиной и один раз со второй новой  $C_\alpha$ -вершиной, образуя при этом массовую поддиаграмму, то четвертый отросток первой новой  $C_\alpha$ -вершины спаривается, а три отростка второй новой  $C_\alpha$ -вершины не спариваются;

$a_3$ ) если  $P_\alpha$ -вершина оказывается спаренной три раза с ранее появившимися вершинами и один раз - с новой  $C_\alpha$ -вершиной, то это последнее спаривание устраняется с помощью формулы (9.6), примененной в обратном направлении. Например,

$$\int \langle \xi_{i_1}(x) \xi(y_1) \rangle \langle \xi_{i_2}(x) \xi(y_2) \rangle \langle \xi_{i_3}(x) \xi(y_3) \rangle \times$$

$$\times \langle \xi_{i_4}(x) \xi(z) \rangle \cdot \left\langle \frac{\delta R}{\delta \xi(y_1) \delta \xi(y_2) \delta \xi(y_3)} \right\rangle \times$$

$$\times \left( -\frac{\delta U}{\delta \xi(z)} \right) e^{-U} > dy_1 dy_2 dy_3 dz =$$

$$= \int \langle \xi_{i_1}(x) \xi(y_1) \rangle \langle \xi_{i_2}(x) \xi(y_2) \rangle \langle \xi_{i_3}(x) \xi(y_3) \rangle \times$$

$$\times \langle \xi_{i_4}(x) \frac{\delta^3 R}{\delta \xi(y_1) \delta \xi(y_2) \delta \xi(y_3)} \rangle e^{-U} > \prod_{i=1}^3 dy_i$$

$$- \int \prod_{e=1}^4 \langle \xi_{i_e}(x) \xi(y_e) \rangle \left\langle e^{-U} \frac{\delta^4 R}{\prod_{e=1}^4 \delta \xi(y_e)} \right\rangle \prod_{e=1}^4 dy_e.$$

Случай 2. Каждый отросток  $P_\alpha$ -вершин  $\xi$  представляется в виде

$$\varphi = \varphi_h + \varphi_e,$$

где  $\varphi_h$  содержит лишь поля  $\xi_i$  с  $i \geq \kappa + 2$  ("хорошо локализованные" или "высокоимпульсные"), а  $\varphi_e$  - поля  $\xi_i$  с  $i < \kappa + 2$  (низкоимпульсные). Спариваются только  $\varphi_h$ -отростки  $P_\alpha$ -вершин (отростки  $C_\alpha$ -вершин не спариваются вообще).

#### §11. ПУТЕВОДИТЕЛЬ ПО ДАЛЬНЕЙШЕМУ ЧТЕНИЮ

В указанной в предисловии работе [3] (см. также [22]) завершается развитие техники, начатое в классических работах [1,2].

По существу те же идеи, но совершенно другая техника начала развиваться Галлаватти и др. [5,6] и продолжает сейчас развиваться в работах Балабана [8].

Инфракрасный вариант техники [1-3] имеется в статье [4], а инфракрасный вариант техники [5,6,8] - в работах Гавендзкого и Купайнена [7].

Новый вариант техники предложен Федербушем [9]. Все перечисленные работы рекомендуются как продолжение изучения ультрафиолетовых и инфракрасных проблем (см. также сборник [12]).

Относительно  $\varphi^4$ : наиболее принятая точка зрения состоит в том, что эта модель не существует. [11,12]. Однако есть и другие мнения [10,20].

Все остальные вопросы конструктивной теории поля отражены в монографии [13]. (Полную библиографию до 1976 года см. в [15] и [17].) По формальной теории перенормировок пока непревзойденной является книга [16]. По аксиоматической теории поля вводными книгами являются [23] и [24].

Физических книг много (последняя переводная из них [25]), но автору трудно судить о физической стороне дела.

ДОПОЛНЕНИЕ 1. ОДНОМЕРНЫЕ ПОЛЯ

Здесь размерность пространства - нуль, времени - 1. На простейшем примере показывается связь эвклидова и гамильтонова подхода, переход к бесконечному объему, связь со стохастическими дифференциальными уравнениями. **Подробнее см. [14, гл.5; 13].**

Процесс Орнштейна - Уленбека.

Рассмотрим стационарный гауссовский процесс,  $\xi(t), t \in R^1$ , со средним  $\langle \xi(t) \rangle_0 = 0$  и с ковариацией

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle_0 = \exp(-m|t-t'|), m > 0.$$

Пусть  $(\Omega, \Sigma, \mu_0)$  - соответствующее вероятностное пространство,  $\Sigma_t$  - наименьшая  $\sigma$ -алгебра, относительно которой измерима одна случайная величина  $\xi(t)$ .

Обозначим

$$\mathcal{H}_t = L_2(\Omega, \Sigma_t, \mu_0) \subset \mathcal{H} = L_2(\Omega, \Sigma, \mu_0).$$

Пусть  $P_t$  - ортогональный проектор на  $\mathcal{H}_t$ ,  $U_t$  - сдвиг в  $\mathcal{H}$ , переводящий  $\mathcal{H}_{t'}$  в  $\mathcal{H}_{t'+t}$  (можно считать, что  $\Sigma$  - наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая всю  $\Sigma_t$ ).  $\mathcal{H}_0$  называется еще физическим гильбертовым пространством.

Марковский оператор.

Определим операторы

$$\mathcal{T}_t : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$$

$$\mathcal{T}_t = P_0 U_t P_0. \quad (1)$$

$\mathcal{H}_0$  может быть естественным образом отождествлено с

$$L_2(R^1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx,$$

а  $\xi(0)$  с функцией  $x$  на  $R^1$ .

Ортогонализация последовательности  $1, \xi(0), \xi^2(0), \dots$  приводит к ортонормированному базису в  $\mathcal{H}_0$  (см. [14, 19]):

$$1, \xi(0), \dots, \frac{1}{\sqrt{n!}} : \xi^n(0); \dots$$

Мы имеем

$$\mathcal{T}_t (: \xi^n(0) :) = P_0 (: \xi^n(t) :) = : \xi^n(0) : \exp(-mn|t|). \quad (2)$$

В качестве следствия получаем марковское свойство

$$\mathcal{T}_{t_1} \mathcal{T}_{t_2} = \mathcal{T}_{t_1+t_2} \quad (3)$$

и дискретность спектра  $\mathcal{T}_t$ . Отсюда видно также, что  $\mathcal{T}_t$  самосопряжен:

$$\mathcal{T}_t = \mathcal{T}_t^* = U_{-t} P_t P_0. \quad (4)$$

Полугруппа  $\mathcal{T}_t$  сильно-непрерывна и допускает представление

$$\mathcal{T}_t = e^{-tH_0}, \quad (5)$$

где  $H_0$  - самосопряженный оператор с дискретным спектром (простые собственные значения  $0, m, 2m, 3m, \dots$ ).

Гармонический осциллятор.

Введем операторы рождения-уничтожения в  $L_2(R^1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2})$ :

$$a^* : x^n : = \sqrt{n+1} : x^{n+1} : ;$$

$$a : x^n : = \sqrt{n} : x^{n-1} : , n \geq 1 ;$$

$$a : 1 : = 0$$

со всюду плотной областью определения (все многочлены). Легко видеть, что на этой области определения

$$H_0 = ma^*a \quad (6)$$

Известно, что с точностью до константы  $H_0$  можно отождествить с квантовомеханическим оператором энергии гармонического осциллятора, причем  $\mathcal{H}_0$  отождествляется с  $L_2(R^1, dx)$  посредством

$$\xi^n(0) \leftrightarrow x^n \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} e^{-x^2/2}, \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{m} x + \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx})$$

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{m} x - \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \right),$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \left( - \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + m^2 x^2 - m \right).$$

Гиббсовская перестройка.

Рассмотрим новую меру  $\mu_N$  на  $(\Omega, \Sigma)$  с плотностью Радона - Никодима относительно меры  $\mu_0$ , равной

$$\frac{d\mu_N}{d\mu_0} = Z_N^{-1} \exp \left( -\lambda \int_{-N}^N \xi^4(t) dt \right), \quad (8)$$

где

$$Z_N = \left\langle \exp \left( -\lambda \int_{-N}^N \xi^4(t) dt \right) \right\rangle_0.$$

Относительно меры  $\mu_N$   $\xi(t)$  становится новым случайным процессом.

Теорема 1.

При  $N \rightarrow \infty$  существует слабый предел конечномерных распределений

$$\lim \mu_N (\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n).$$

По теореме Колмогорова это определяет меру  $\mu$  на  $(\Omega, \Sigma)$ . Получившийся новый процесс  $\xi(t)$  (по мере  $\mu$ ) является стационарным, марковским и имеет

Экспоненциальное убывание корреляций:

$$|\langle \xi(t) \xi(t_1) \rangle_\mu| \leq C \delta^{|t-t_1|}, \quad \delta < 1. \quad (9)$$

Для доказательства этой теоремы вводится

Трансфер-матрица.

Введем операторы  $T_t: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$

$$T_t = U_{-t} P_t \exp \left( -\lambda \int_0^t \xi^4(t) dt \right) P_0 \quad (10)$$

со свойствами:

$$(i) \quad T_{t_1} T_{t_2} = T_{t_1+t_2},$$

что следует из трансляционной инвариантности и марковости

$$\begin{aligned} T_{t_1} T_{t_2} &= U_{-t_1} P_{t_1} \exp \left( -\lambda \int_0^{t_1} \xi^4(t) dt \right) U_{-t_2} P_{t_2} \times \\ &\times \exp \left( -\lambda \int_0^{t_2} \xi^4(t) dt \right) P_0 = \quad (11) \\ &= U_{-(t_1+t_2)} P_{t_1+t_2} \exp \left( -\lambda \int_0^{t_1+t_2} \xi^4(t) dt \right) P_0 = \\ &= U_{-(t_1+t_2)} P_{t_1+t_2} \exp \left( -\lambda \int_0^{t_1+t_2} \xi^4(t) dt \right) P_0 = T_{t_1+t_2}; \end{aligned}$$

(ii)  $T_t$  есть сильно-непрерывная полугруппа самосопряженных ограниченных операторов и поэтому представима в виде

$$T_t = e^{-tH};$$

(iii)  $H = H_0 + V$ , где  $V$  - умножение на  $\lambda \xi^4(0)$ , что показывает формальное дифференцирование

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T_{\Delta t} - 1}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{U_{-\Delta t} P_{\Delta t} P_0 - 1}{\Delta t} + \right. \\ &+ \left. \frac{U_{-\Delta t} P_{\Delta t} (-\lambda \xi^4(0) \Delta t) P_0}{\Delta t} \right) = -H_0 - \lambda \xi^4(0) \end{aligned} \quad (12)$$

(подробнее см. [14, с. 151-152]).

Аналогично (7)  $H$  соответствует ангармоническому осциллятору

$$H = \frac{1}{2} \left( - \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + m^2 x^2 + \lambda x^4 - m \right). \quad (13)$$

Следствие 1.

$H$  имеет дискретный спектр, состоящий из простых собственных значений. Максимальное собственное значение  $E$

положительно и соответствующий ему собственный вектор  $\omega$  является строго положительной функцией из  $\mathcal{H}_0$ .

Первое утверждение хорошо известно [14], второе является аналогом теоремы Перрона - Фробениуса. Именно, надо доказать, что  $T_t$  усиливает положительность (т.е.

$$(T_t f, h)_0 > 0$$

для всех  $f, h \geq 0$  из  $L_2(\Omega, \mu_0)$ , не равных нулю (см. [14, с.156-157]). Действительно,  $\exp(-H_0 t)$  усиливает положительность (гауссовы скачки), т.е.

$$(P_t f, P_0 h)_0 > 0.$$

Но

$$\exp\left(-\int_0^t \xi^4(t) dt\right) > 0.$$

Поэтому

$$(P_t f, \exp\left(-\int_0^t \xi^4(t) dt\right) P_0 h)_0 > 0,$$

что и требовалось.  $(\cdot, \cdot)_0$  - скалярное произведение в  $L_2(\Omega, \mu_0)$ .

Для установления связи между гиббсовской перестройкой и трансфер-матрицей нужны

Формулы ФКН (Фейнмана - Каца - Нельсона).

Пусть  $\omega_0 \equiv 1$  собственный вектор  $H_0$  с собственным значением 0. Из положительности  $\omega$  следует, что

$$(\omega, \omega_0) > 0. \text{ Тогда}$$

$$Z_N = (\omega_0, T_{2N} \omega_0), \quad (14)$$

и для любых ограниченных комплексных функций  $F, F_1, \dots, \dots, F_n$  и всех  $-N < t_1 < \dots < t_n < N$

$$\begin{aligned} \langle F(\xi_0) \rangle_{\mu_N} &\equiv \\ &\equiv \frac{\langle F(\xi_0) \exp\left(-\lambda \int_{-N}^N \xi^4(t) dt\right) \rangle_0}{Z_N} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(\omega_0, T_N F(\xi_0) T_N \omega_0)_0}{(\omega_0, T_{2N} \omega_0)_0}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \langle F_1(\xi_{t_1}) \dots F_n(\xi_{t_n}) \rangle_{\mu_N} &= \\ &= Z_N^{-1} (\omega_0, T_{N-t_n} F_n(\xi(0)) T_{t_n-t_{n-1}} F_{n-1}(\xi(0)) \dots \\ &\dots F_1(\xi(0)) T_{t_1+N} \omega_0). \end{aligned}$$

Приведем, например, доказательство (14):

$$\begin{aligned} (\omega_0, T_{2N} \omega_0)_0 &= \langle P_0 \exp\left(-\lambda \int_0^{2N} \xi^4(t) dt\right) \cdot 1 \rangle_0 = \\ &= \langle \exp\left(-\lambda \int_0^{2N} \xi^4(t) dt\right) \rangle_0 = \langle \exp\left(-\lambda \int_{-N}^N \xi^4(t) dt\right) \rangle_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Доказательство слабой сходимости конечномерных распределений в теореме 1 проводится теперь просто, если использовать следствие 1. Например,

$$\langle F(\xi_0) \rangle_{\mu_N} = \frac{(1, e^{-NH} F(\xi_0) e^{-NH} 1)_0}{(1, e^{-2NH} 1)_0} \sim \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\sim \frac{e^{-2NE} (\omega_0, \omega)_0^2 (\omega, F(\xi(0)) \omega)_0}{e^{-2NE} (\omega_0, \omega)^2} \longrightarrow \\ &\longrightarrow (\omega, F(\xi(0)) \omega)_0. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается экспоненциальное убывание корреляций.

Связь со стохастическими уравнениями.

Мы видели в (17), что в  $L_2(R, dx)$

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V - E,$$

где  $\nabla$  - оператор умножения. Введем новую (стационарную) меру

$$d\nu = \omega^2(x) dx, \quad (18)$$

где  $\omega(x)$  - положительный собственный вектор  $H$  с нулевым собственным значением, причем нормировка выбрана так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2(x) dx = 1, \quad T_t \omega = \omega. \quad (19)$$

Заметим, что  $L_2(R, d\nu)$  и  $L_2(R, dx)$  унитарно эквивалентны, причем унитарная эквивалентность осуществляется умножением  $f \in L_2(R, d\nu)$  на  $\omega(x)$ . Таким образом, в  $L_2(R, d\nu)$  наш оператор переписывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{1}{\omega(x)} (-\frac{1}{2}\Delta + V - E) \omega(x) = \\ &= -\frac{1}{2}\Delta + \frac{\omega'}{\omega} \nabla - \frac{\Delta \omega}{2\omega} + V - E = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{\omega'}{\omega} \nabla; \end{aligned} \quad (20)$$

т.е.  $-\Delta \omega + (V - E)\omega = H\omega = 0$ .

Тогда  $-\tilde{H}$  определяет марковскую полугруппу с обратным уравнением Колмогорова

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial U}{\partial x},$$

где

$$a = 1, \quad b = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Это соответствует стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} dt + dW(t). \quad (21)$$

Пусть снова, как в §1,  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}_1$  - изоморфные линейные пространства. Обозначим  $G(\mathcal{L})$  алгебру Грассмана с единицей над  $\mathcal{L}$ , т.е. алгебру многочленов от антикоммутирующих переменных  $\psi(f)$ , где мы обозначаем через  $f$  элементы  $\mathcal{L}$ . Тогда  $\psi(f) \in \mathcal{L}_1 \subset G(\mathcal{L})$ .

Для того, чтобы определить действие (см. (5)), мы введем далее норму на  $\mathcal{L}$ . Пусть  $\bar{\mathcal{L}}$  - пополнение  $\mathcal{L}$  по этой норме. Рассмотрим теперь антисимметрическое пространство Фока  $\mathcal{F}_a(\bar{\mathcal{L}})$  над  $\bar{\mathcal{L}}$ . отождествим  $G(\mathcal{L})$  с алгеброй операторов рождения  $a^*(f)$  в  $\mathcal{F}_a(\bar{\mathcal{L}})$

$$a^*(f) = \psi(f), \quad f \in \mathcal{L}.$$

Операторы  $a^*(f)$  ограничены

$$\|a^*(f)\| = \|f\|, \quad (1)$$

и поэтому на  $G(\mathcal{L})$  определена норма, а замыкание  $G(\mathcal{L})$  алгебры  $G(\mathcal{L})$  по этой норме является банаховой алгеброй.

Гауссовские функционалы.

Линейный функционал  $\langle \cdot \rangle$  на  $G(\mathcal{L})$  называется гауссовским квазисостоянием, или обобщенно-свободным ферми-полем, если  $\langle 1 \rangle = 1$ , средние от произведения нечетного числа  $\psi(f)$  равны нулю и

$$\langle \psi(f_1) \dots \psi(f_{2n}) \rangle = \prod_{i,j} (-1)^{|\pi|} (f_{i_1}, f_{j_1}) \dots (f_{i_n}, f_{j_n}), \quad (2)$$

где произведение по всем подстановкам

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n \\ i_1 & j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

таким, что  $i_1 < j_1, \dots, i_n < j_n$ ;  $|\pi|$  - четность  $\pi$ .

Далее  $\mathcal{L}$  конкретизируется (это удобно для введения OS-положительности и из других соображений):  $\mathcal{L}$  будет прямой суммой  $2n$  экземпляров пространств Шварца  $S(R^{\nu})$ , а  $\mathcal{L}_1$  линейно порождается

$\Psi^\alpha(f), \bar{\Psi}^\alpha(f), f \in S(R^\nu), \alpha=1, \dots, n.$   
 Норма на  $\mathcal{L}$  обычно будет иметь вид нормы в  $L_2(R^\nu, dx).$   
 Иногда удобно пользоваться нормой

$$\|f\| = \int_{R^\nu} \frac{|\tilde{f}(k)|^2}{(k^2+1)^\alpha} dk \quad (3)$$

для достаточно больших  $\alpha$  таких, чтобы  $\delta$ -функции и их первые производные принадлежали  $\mathcal{L}$ . Часто  $\alpha$  при этом удобно связывать с рассматриваемым гауссовским квазисостоянием (например, с полем Дирака, см. ниже).

В данном случае среди двухчастичных функций Швингера могут быть отличны от нуля только

$$\langle \bar{\Psi}^\alpha(f) \Psi^\beta(g) \rangle,$$

и гауссовское квазисостояние полностью ими определяется ввиду (2). Примером могут служить фермиовский белый шум с  $m > 0$

и с 
$$\langle \bar{\Psi}^\alpha(f) \Psi^\beta(g) \rangle_m = \delta_{\alpha\beta}(f, g) \frac{1}{m} \quad (4)$$

и поле Дирака (см. ниже).

Урезанное поле.

Для заданной  $\mathcal{X} \in C_0^\infty(R^\nu)$  обозначим  $\mathcal{X}_x = \mathcal{X}(x - \cdot)$

$$\Psi_x(x) = \Psi(\mathcal{X}_x)$$

и аналогично для  $\bar{\Psi}$ .

Лагранжиан.

$$L(x, \mathcal{X}) = L(\Psi_{\mathcal{X}}^\alpha(x), \bar{\Psi}_{\mathcal{X}}^\alpha(x), \frac{\partial \Psi_{\mathcal{X}}^\alpha(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial \bar{\Psi}_{\mathcal{X}}^\alpha(x)}{\partial x_i}),$$

где  $L$  - многочлен или сходящийся ряд в  $\bar{G}(\mathcal{L}).$

Евклидово действие

в объеме  $\Lambda \subset R^\nu$

$$U_{\Lambda, \mathcal{X}} = \int_{\Lambda} L(x, \mathcal{X}) dx. \quad (5)$$

Интеграл имеет смысл, так как  $L(x, \mathcal{X})$  - непрерывная функция от  $\mathcal{X}$  со значениями в банаховой алгебре  $\bar{G}(\mathcal{L}).$

Гиббсовская перестройка

функционала  $\langle \cdot \rangle$  в  $\Lambda$  с урезанием  $\mathcal{X}$   
 Так называется линейный функционал на  $G(\mathcal{L})$

$$\langle A \rangle_{\Lambda, \mathcal{X}} = Z_{\Lambda, \mathcal{X}}^{-1} \langle A \exp(-U_{\Lambda, \mathcal{X}}) \rangle, \quad (6)$$

если

$$Z_{\Lambda, \mathcal{X}} = \langle \exp(-U_{\Lambda, \mathcal{X}}) \rangle \neq 0, \quad (7)$$

$$Z_{\Lambda, \mathcal{X}} \neq \infty.$$

Предельной гиббсовской перестройкой мы назовем функционал

$$\langle A \rangle_\infty = \lim_{\Lambda \rightarrow R^\nu} \lim_{\mathcal{X}} \langle A \rangle_{\Lambda, \mathcal{X}}, \quad (8)$$

если он существует.

Свободные поля определяются как обычно квадратичными лагранжианами. Мы построим

Поле Дирака на  $R^\nu (x = (x^0, x^1, x^2, x^3)).$   
 Оно состоит из 8 компонент

$$\Psi(x) = (\Psi^1(x), \dots, \Psi^4(x)), \bar{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}^1(x) \\ \vdots \\ \bar{\Psi}^4(x) \end{pmatrix}.$$

Лагранжиан его имеет вид

$$L(x) = m \bar{\Psi}(x) \Psi(x) + \frac{1}{2} \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu^E \Psi(x) - \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu^E \Psi(x), \quad (9)$$

где  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ , по  $\mu = 1, 2, 3, 0$  ведется суммирование,  $\bar{\Psi} \Psi = \bar{\Psi}^1 \Psi^1 + \dots + \bar{\Psi}^4 \Psi^4$ , и т.д. евклидовы матрицы Дирака самосопряжены и имеют вид

$$\gamma_0^E = \gamma_0, \quad \gamma_j^E = i \gamma_j,$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\gamma_\mu^E$  эрмитовы и удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (10)$$

Поле Дирака по определению есть

$$\langle A \rangle = \lim_{\Lambda \uparrow R^4} \lim_{\hbar \rightarrow 0} \lim_{m' \rightarrow 0} \frac{\langle A \exp(-U_\Lambda) \rangle_{m'}}{\langle \exp(-U_\Lambda) \rangle_{m'}} \quad (11)$$

(предел  $m' \rightarrow 0$  заменяет формальный функциональный интеграл, этот предел перестановочен с другими пределами).

С помощью семинвариантов (см., например, [19, гл. 7, §1])

(11) легко вычисляется. Например, для

$$A = \bar{\psi}^\alpha(x) \psi^\beta(y) \quad \text{имеем} \quad (12)$$

$$\frac{\langle A \exp(-U_\Lambda) \rangle_{m'}}{\langle \exp(-U_\Lambda) \rangle_{m'}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle \bar{\psi}^\alpha(x) \psi^\beta(y), U_\Lambda, \dots$$

$$\dots, U_\Lambda \rangle_{m'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{R^4} dx_1 \dots dx_n \langle \bar{\psi}^\alpha(x) S_1 \psi_{se}(x_1) \rangle_{m'} \times$$

$$\times \langle \hat{S}_1 \psi_{se}(x_1) S_2 \psi_{se}(x_2) \rangle_{m'} \dots \langle \hat{S}_n \bar{\psi}(x_n) \psi^\beta(y) \rangle_{m'},$$

$$\text{где либо } S_i \psi = m \psi, \quad \hat{S}_i \bar{\psi} = \bar{\psi}, \quad (13)$$

либо

$$S_i \psi = \frac{1}{2} \psi \gamma_\mu^E, \quad \hat{S}_i = \partial_\mu \bar{\psi};$$

либо

$$S_i \psi = -\frac{1}{2} \partial_\mu \psi \gamma_\mu^E, \quad \hat{S}_i \bar{\psi} = \bar{\psi}. \quad (13)'$$

Ряд (14) есть ряд из  $n$ -кратных сверток матриц-функций

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (S^n)^{\alpha\beta}(x-y), \quad (14)$$

где

$$S^{\alpha\beta}(x-x_1) = \langle \bar{\psi}^\alpha(x) (m \psi(x_1) - \partial_\mu \psi(x_1) \gamma_\mu^E)^{\beta} \rangle_{m'} =$$

$$= \frac{1}{m'} (d_{\alpha\beta}^0 \delta(x-x_1) - (\gamma_\mu^E)^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} \delta(x-x_1)). \quad (15)$$

Переходя к преобразованию Фурье, имеем

$$m' \| \hat{S}^{\alpha\beta}(p) \| = m - i \gamma_\mu^E p_\mu \stackrel{\text{def}}{=} m - i p^E. \quad (16)$$

Заметим теперь, что из (12) следует

$$(M + i p^E)(M - i p^E) = (M - i p^E)(M + i p^E) =$$

$$= M^2 + p^2, \quad p^2 = \sum_{\mu=0}^3 p_\mu^2, \quad M = m' + m. \quad (17)$$

После суммирования ряда (15)

$$\frac{1}{m'} \left( 1 - \frac{m - i p^E}{m'} + \dots + (-1)^n \left( \frac{m - i p^E}{m'} \right)^n + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{m'} \left( 1 + \frac{m - i p^E}{m'} \right)^{-1} = (M - i p^E)^{-1} =$$

$$= \frac{M + i p^E}{M^2 + p^2}$$

и перехода к пределам (11) нетрудно видеть, что

$$\langle \bar{\psi}^\alpha(x) \psi^\beta(y) \rangle = (2\pi)^{-4} \int e^{-ip(x-y)} \frac{(m+ip^E)^{\alpha\beta}}{m^2+p^2} d^4p \quad (18)$$

Предельные переходы под знаком  $\sum$  нетрудно обосновать, например, при достаточно большой массе  $m > 0$ , когда ряды сходятся равномерно по  $\Lambda, \infty, m'$ . Можно также рассмотреть периодические граничные условия в  $\Lambda$ . Но проще определить свободное поле Дирака формулой (18).

Положительность Остервальдера - Шредера.

Введем в алгебре  $G(\mathcal{L})$  инволюцию  $\theta$  соотношением

$$\theta\psi = \theta(\psi^1(x), \psi^2(x), \psi^3(x), \psi^4(x)) = (\bar{\psi}^1(\theta x), \bar{\psi}^2(\theta x), -\bar{\psi}^3(\theta x), -\bar{\psi}^4(\theta x)) \quad (19)$$

и так же для  $\bar{\psi}$ . Как инволюция,  $\theta$  удовлетворяет, например, соотношению

$$\theta(\psi^\alpha \bar{\psi}^\beta) = \theta(\bar{\psi}^\beta) \theta(\psi^\alpha) \quad (20)$$

и т.д.

Аксиомы евклидовой квантовой теории поля для ферми-полей таковы

I. Функции Швингера

$$\langle \bar{\psi}(f_1) \dots \bar{\psi}(f_n) \psi(g_1) \dots \psi(g_n) \rangle \quad (21)$$

являются умеренными распределениями (т.е. непрерывны в топологии пространства Шварца);

II. Положительность. Пусть  $G_+(\mathcal{L})$  - подалгебра  $G(\mathcal{L})$ , порожденная всеми  $\psi(f), \bar{\psi}(f)$ , где  $f \in C_0^\infty$  имеет носитель в  $\{x: x^0 > 0\} \subset R^D$ . Тогда для любого

$$F \in G_+(\mathcal{L}) \quad \langle (\theta F) F \rangle \geq 0. \quad (22)$$

III. Евклидова ковариантность, см. ниже.

Докажем свойство (22) для поля Дирака. Для этого докажем сначала, что

$$\langle (\theta F) F \rangle_{m'} = \langle \theta F \rangle_{m'} \langle F \rangle_{m'} \geq 0, \quad (23)$$

и достаточно доказать, что

$$\langle \theta F \rangle_{m'} = \langle F_n \rangle_{m'} \quad (24)$$

для любого монома

$$F = \bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1) \dots \bar{\psi}^{\alpha_n}(x_n) \psi^{\alpha_n}(x_n) \dots \psi^{\alpha_1}(x_1).$$

Но

$$\theta F = \bar{\psi}^{\alpha_1}(\theta x_1) \dots \bar{\psi}^{\alpha_n}(\theta x_n) \psi^{\alpha_n}(\theta x_n) \dots \psi^{\alpha_1}(\theta x_1).$$

Отсюда и следует (24). Из (23) следует (22), так как лагранжиан есть четный элемент грассмановой алгебры, инвариантный относительно  $\theta$ .

Евклидова ковариантность.

Пусть  $g$  - элемент группы евклидовых вращений  $R^4$ . Пусть  $\mathcal{D}_g$  - некоторое 4-х мерное представление группы Лоренца. Тогда преобразование

$$\psi(x) \rightarrow \mathcal{D}_g \psi(g^{-1}(x)), \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(g^{-1}(x)) \mathcal{D}_g^{-1} \quad (25)$$

порождает автоморфизм  $\alpha_g$  алгебры  $G(\mathcal{L})$ . Более того, этот автоморфизм сохраняет  $\langle \cdot \rangle_{m'}$ , т.е. для всех

$$F \in G(\mathcal{L}) \quad \langle \alpha_g F \rangle_{m'} \equiv \langle F \rangle_{m'}. \quad (26)$$

Мы хотим выбрать  $\mathcal{D}_g$  так, чтобы сохранялся и функционал  $\langle \cdot \rangle$ , определяющий поле Дирака. Для этого достаточно (что следует из разложения (14)) выбрать  $\mathcal{D}_g$  так, чтобы сохранялся лагранжиан, т.е.

$$\alpha_g L(x) \equiv L(g^{-1}x). \quad (27)$$

Имеем

$$\alpha_g L(x) = [\alpha_g \bar{\psi}(x)] \gamma_\mu^E \partial_\mu [\alpha_g \psi(x)] - \dots =$$



$$\begin{aligned}
 &= \bar{\psi}(g^{-1}x) \mathcal{D}_g^{-1} \gamma_\mu^E \mathcal{D}_g - \dots = \\
 &= \bar{\psi}(x') \mathcal{D}_g^{-1} g_\mu^\nu \gamma_\mu^E \mathcal{D}_g \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \psi(x') - \dots = \\
 &= \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \psi(x') - \dots
 \end{aligned}$$

и надо найти двузначное представление  $\mathcal{D}_g$ , удовлетворяющее условию

$$g_\mu^\nu \gamma_\mu^E = \mathcal{D}_g \gamma_\mu^E \mathcal{D}_g^{-1} \quad (28)$$

(мы отсылаем за исследованием (28) к книгам по спинорным представлениям).

Окончательно аксиому евклидовой ковариантности в нашем случае можно сформулировать так:

$\langle \cdot \rangle$  на  $G(\mathcal{L})$  трансляционно инвариантен и инвариантен относительно  $\alpha g$ .

Если рассматривается гиббсовская перестройка (7) поля Дирака, то условие (7) следует из того, что

$$\exp(-U_{1,x})$$

принадлежит пополнению грассмановой алгебры по надлежащей норме (см. замечание 1), которую можно определить на  $(S(R^p))^4$  как

$$(f_1, f_2) = \sum_{\mathcal{L}^p} \int e^{-ip(x-y)} f_1^{(\alpha)}(x) \overline{f_2^{(\beta)}}(y) \times$$

$$\times \left| \frac{(m + ip^E)^{\alpha\beta}}{m^2 + p^2} \right| d^4 p.$$

1. Glimm J. - Commun. Math. Phys., 1968, v.10, #1, p.1-47.
2. Glimm J., Jaffe A. - Fortsch. der Physik, 1973, v.21, p.327-376. (русский перевод в "Математика. Новое в зарубежной науке", #12. Евклидова квантовая теория поля. М.: Наука, 1978).
3. Magnen J., Sénéor R. - Commun. Math. Phys., 1977, v.56, p.237-276.
4. Magnen J., Sénéor R. - Ann. Phys., 1984, v.152, #1, p.130-202.
5. Gallavotti G., et al. - Memorie Accademia del Lincei, 1978, v. XV, p.23-59.
6. Benfatto G., Gallavotti G., Nikolo F. et. al. - Commun. Math. Phys., 1980, v.74, p.95-130; J. Funct. Anal., 1980, v.36, p.343-400.
7. Gawędzki K., Kupiainen A. - Commun. Math., Phys., 1984, v.92, N4, p.531-553.
8. Balaban T. - Commun. Math. Phys., 1983, v.88, p.411-445.
9. Federbush P., Battle G. - Commun. Math. Phys., 1983, v.88, p.263-293; J. Funct. Anal., 1983, v.51, p.312-325.
10. Gallavotti G., Rivasseau V. Field Theory in dimension 4: A Modern Introduction to its unsolved problems. Inst. Adv. Study. Princeton. N.J. 1983.
11. Aizenman M., - Commun. Math. Phys., 1982, v.86, N1, p.1-47. Frölich J., - Nucl. Phys., 1982, B200 (FS 4), p.281.
12. Scaling and Self-Similarity in Physics. Renormalization in Statistical Mechanics and Dynamics. (J. Frölich, ed.) Birkhäuser, 1983.
13. Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. М.: Мир, 1976.
14. Саймон Б. Модель  $P(\varphi)_2$  евклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
15. Хэпш К. Теория перенормировок. М.: Наука, 1974.
16. Завьялов О.И. Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.
17. Малышев В.А. - В кн.: Итоги науки и техники. Серия "Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика", т.14. М.: ВИНТИ, 1977.

18. Малышев В.А. Элементарное введение в математическую физику бесконечночастичных систем: лекции для молодых ученых. Дубна, вып.27, 1983.
19. Малышев В.А., Миндос Р.А. Гиббсовские случайные поля: кластерные разложения. М.:Наука, 1985.
20. Callan C. de, Rivasseau V. - Commun. Math. Phys., 1984, v82, p. 4-47.
21. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т.1-4. М.:Мир.
22. Feldman J., Osterwalder K. - Ann. Phys., 1976, p.80-135.
23. Йост Р. Общая теория квантованных полей. М.:Мир, 1967.
24. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
25. Ипксон К., Звбер Х.-Б. Квантовая теория поля, т.1,2. М.: Мир, 1984.

Издательство Московского университета

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Составитель: С.И.Завьяловский

Редактор: И.Терещук

Технический редактор: Е.Д.Захарова

Подготовлено к печати 18.10.84. Формат 60x90<sup>I</sup>/16.

Бумага офсетная. Объем 100 страниц.

Удостоверенная печать. Тираж 500 экз.

Заказ № 1000. Цена 10 руб. 50 коп. Заказное

Ордене "Знак Почета" Институт физики Московского университета

103000 Москва, ул. Воробьева, 5/7.

Типография "Мир" изд-ва МГУ.

119884 Москва, Вавилонские горы