ФГБОУ ВО
“Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова”
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Лебедев Алексей Викторович

Неклассические задачи стохастической теории экстремумов

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
д.ф.-м.н., профессор,
г.н.с. В.И.Питербарг

Москва — 2015

Содержание

Введение

Актуальность темы. Стохастическая теория экстремумов занимается изучением максимумов и минимумов (а также других порядковых статистик) систем случайных величин. Начало современного этапа развития этой теории принято датировать 1943 годом, с появления фундаментальной работы Б.В.Гнеденко [116], где была доказана знаменитая теорема об экстремальных типах (хотя ранее этот результат был кратко представлен в его статье 1941 года на русском языке [11]). А именно, было показано, что если для максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин существует невырожденное предельное распределение при линейной нормировке, то оно относится к одному из трех экстремальных типов (получивших впоследствии наименования законов Гумбеля, Фреше и Вейбулла).

В качестве предшественников Б.В.Гнеденко следует упомянуть М.Фреше [113], Р.Фишера и Л.Типпетта [111], Р. фон Мизеса [131].

Первым введением в теорию экстремумов с обзором результатов до 1970 года, опубликованным на русском языке, стала работа Э.Гумбеля [17]. В 1980-е гг. вышли две классические монографии по теории экстремумов Я.И.Галамбоша [9] и М.Лидбеттера, Г.Линдгрена, Х.Ротсена [54], до сих пор служащие настольными книгами для специалистов. Обзор Я.И.Галамбоша [10] был приурочен к 50-летию работы [116]. Более современное состояние теории и ее приложения в страховании и финансах отражены в книгах П.Эмбрехтса, К. Клюппельберг, Т.Микоша [107], А.Мак-Нила, Р.Фрея и П.Эмбрехтса [130, гл. 7], Л. де Хаана и А.Феррейры [118].

Современная стохастическая теория экстремумов весьма широка и разнопланова, однако в ее содержании и развитии можно заметить много аналогий с классической теорией суммирования. Так, теорема об экстремальных типах аналогична центральной предельной теореме. Имеются также слабые и усиленные законы больших чисел для экстремумов, правда, они бывают аддитивные и мультипликативные [9, гл. 4]. В обеих теориях важной задачей является получение оценок скорости сходимости. На основе предельных теорем строятся различные статистические оценки параметров. При отказе от независимости случайных величин, как и в теории суммирования, вводятся различные условия перемешивания для последовательностей и полей, позволяющие обобщить предельные теоремы [54, ч. 2]. Далее, в теории случайных процессов, процессам авторегрессии и скользящего среднего можно сопоставить процессы максимум-авторегрессии и скользящего максимума [106], устойчивым процессам — экстремальные процессы [9, §6.5], ветвящимся процессам — максимальные ветвящиеся процессы [123] и т.д. Многомерным устойчивым законам соответствуют многомерные максимум-устойчивые, и как и в первом случае, помимо частных распределений оказывается важна структура зависимости компонент, для описания которой в теории экстремумов активно используются копулы. Современный аппарат копул хорошо изложен в книге Р.Нельсена [134]. Заметим, что теория экстремумов и теория суммирования представляют собой как бы два "параллельных мира", которые в чем-то похожи, а в чем-то отличаются друг друга.

Остановимся лишь на некоторых направлениях, разрабатываемых в настоящее время российскими учеными. Экстремумами гауссовских случайных процессов и полей много лет занимаются В.И.Питербарг и его школа. Отметим его классическую монографию [64]. Одним из важных направлений в теории экстремумов является теория рекордов, которая активно разрабатывается В.Б.Невзоровым и его школой. Отметим его цикл лекций [57]. Исследованиями экстремумов и превышений высокого уровня в связи с моделями телекоммуникаций занимается Н.М.Маркович [127, 128]. В соавторстве с К.Авраченковым и Дж.Сридхараном ею изучались распределения и зависимость экстремумов в процессах выборочного исследования информационных сетей (network sampling processes) [90, 91]. Ее перу также принадлежит книга [126] о непараметрическом анализе с помощью порядковых статистик. Недавняя докторская диссертация С.Ю.Новака [60] посвящена разнообразным задачам современной теории экстремумов, доказаны различные предельные теоремы и получены оценки скоростей сходимости, с приложениями в финансах. Докторская диссертация А.В.Степанова [74] посвящена предельным теоремам и статистическим процедурам для величин, связанных с рекордами и экстремальными порядковыми статистиками. Под руководством А.В.Лебедева в 2014 году защищена кандидатская диссертация А.А.Голдаевой [13], посвященная тяжелым хвостам, экстремумам и кластерам линейных стохастических рекуррентных последовательностей.

Теория ветвящихся процессов восходит к исследованиям Ф.Гальтона и Г.Ватсона, обеспокоенных вырождением старинных дворянских фамилий в Англии XIX века. Однако аксиоматические основы этой теории были заложены лишь в середине XX века в фундаментальных исследованиях А.Н.Колмогорова, Б.А.Севастьянова, Р.Беллмана и Т.Харриса и получили развитие в многочисленных публикациях современных авторов. Отметим здесь классические книги Б.А.Севастьянова [70] и Т.Харриса [77], а также обстоятельные обзоры В.А.Ватутина и А.М.Зубкова [7, 145]. В настоящее время передовые исследования в этой области ведутся В.А.Ватутиным, В.А.Топчим, В.И.Афанасьевым, Е.Е.Дьяконовой и др. Упомянем также недавнюю работу В.И.Вахтеля, Д.Э.Денисова, Д.А.Коршунова [8], посвященную надкритическим ветвящимся процессам с тяжелыми хвостами.

В обеих теориях существуют свои классические задачи, которые много лет глубоко исследуются специалистами, однако представляется иногда полезным расширить круг задач, как в связи с теоретическим обобщением некоторых понятий, так и в связи с потребностями практики. К сожалению, многие интересные начинания оказываются малоизвестными.

В теории вероятностей достаточно традиционно изучаются максимумы сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, когда речь идет о последовательных суммах (например, неравенство Колмогорова) или о суммах членов последовательности, попадающих в скользящее окно (максимумы частичных сумм Эрдеша-Реньи, см. например, работы С.Ю.Новака [59], В.И.Питербарга и А.М.Козлова [65]). Но можно поставить вопрос более широко, о максимумах сумм по произвольному семейству подмножеств некоторого растущего множества случайных величин.

В работе Г.И.Ивченко [22] изучалось поведение крайних членов вариационного ряда для независимых случайных сумм, где число сумм и число слагаемых в каждой сумме росли одновременно, причем распределение слагаемых удовлетворяло двустороннему условию Крамера. В силу асимптотической нормальности сумм, как и следовало ожидать, для максимумов возникал двойной показательный закон (Гумбеля). Серьезного развития эти исследования в то время, к сожалению, не получили.

А.В.Лебедевым в [29, 36] была рассмотрена аналогичная задача в некрамеровском случае, когда известно, что распределение имеет лишь конечное число моментов либо является субэкспоненциальным. Отметим, что субэкспоненциальные распределения были введены В.П.Чистяковым [78] в 1964 году, но стали популярны только в последние десятилетия XX века, в связи с осознанием необходимости изучения тяжелых хвостов (см. обзор Ч.М.Голди и К.Клюппельберг [117] и книгу С.Фосса, Д.Коршунова, С.Захари [114]). В случае правильно меняющихся хвостов А.В.Лебедевым показано, что в зависимости от соотношения скоростей роста числа сумм и числа слагаемых может иметь место как предельный закон Гумбеля, так и Фреше. Некоторые обобщения и уточнения проведены в работах Т.В.Кузнецовой [26, 27]. В качестве приложений можно указать, например, время выполнения однотипных работ, проводимых параллельно, если каждая из них делится на множество фаз. Модель параллельных вычислений на компьютере с большим числом процессоров изучалась С.Кангом и Р.Ф.Серфозо [121]. Степенные хвосты распределения числа операций возникают при последовательном декодировании [24, §6.4].

Иногда возникают ситуации, когда суммы приходится брать нерегулярным образом. Например, имеется случайный граф, где с вершинами связаны случайные величины и нас интересуют максимумы сумм по вершинам и их соседям. Еще более общая ситуация может быть описана гиперграфом, где ребрами считаются произвольные подмножества всего множества вершин, и можно брать суммы по этим подмножествам. Подобные задачи изучались А.В.Лебедевым [40, 45, 52] применительно к моделям активности в информационных сетях (в том числе, социальных), что весьма актуально в наше время. Предполагалось, что информационные активности узлов сети имеют тяжелые (правильно меняющиеся) хвосты. Некоторые модели случайных графов и гиперграфов являются авторскими.

При изучении случайных графов используются различные модели: классические, исследование которых восходит к работе П.Эрдеша и А.Реньи [108], и степенные (power law, scale-free), активное исследование которых в последние десятилетия было инициировано работой А.Барабаши и Р.Альберта [94] (и которые в отечественной литературе также называют графами Интернет-типа или Интернет-графами). В степенных графах предельное распределение степени вершины имеет вид $p_k \sim ck^{-\beta}$, $\beta > 0$. Оказалось, что подобные модели хорошо описывают многие информационные, технические и биологические системы. Исследованиями Интернет-графов в России активно занимаются Ю.Л.Павлов и его коллеги (см. например, [53, 61, 62]), а также А.М.Райгородский (см. его обзор [66]).

Отметим классические книги по случайным графам В.Ф.Колчина [25] и Б.Боллобаса [99], а также современный электронный учебник Р. ван дер Хофстеда [119]. В качестве недавних отечественных работ о случайных гиперграфах можно указать [4, 28, 80].

Интересным направлением междисциплинарных исследований на стыке теории экстремумов и теории ветвящихся процессов является изучение максимумов случайных признаков частиц в ветвящихся процессах (по поколениям или за все время). Отметим фундаментальные в этой области работы Б.Арнольда и Дж.Вилласенора [89] и А.Пейкса [136]. В качестве признаков часто изучаются числа потомков частиц. Отметим обзор Дж.Янева [146] и недавние работы Дж.Бертоина [96, 97]. В качестве исторической предшественницы можно указать модель М.Йенга [147], в которой популяция растет детерминированным образом (в геометрической прогрессии), и нас интересуют промежутки между рекордами, а также классическую F^{α}-модель (см. [57, лекция 25]) и ее дальнейшее обобщение в работе П.Деовельса и В.Б.Невзорова [18].

В ситуации, когда признаки частиц независимы и одинаково распределены, причем их распределение принадлежит области притяжения одного из максимум-устойчивых законов (экстремальных типов), а число частиц ветвящегося процесса, должным образом нормированное, также имеет некоторое предельное распределение, задача сводится к давно известной [9, теорема 6.2.1] и представляется банальной. Возможно, это и затормозило дальнейшие исследования. Однако если отказаться хотя бы от одного из предположений (независимости признаков или принадлежности области притяжения), как возникает много новых задач и результатов.

При отказе от предположения о принадлежности распределения признака области притяжения какого-либо максимум-устойчивого закона А.В.Лебедевым в [41, 49] был получен обширный класс возможных предельных законов для максимумов в случае бессмертных надкритических ветвящихся процессов с дискретным временем. Этот класс обобщает максимум-полуустойчивые распределения, введенные и изучавшиеся И.В.Гриневич [16] и Е.Панчевой [137] (см. также недавний обзор [138]), а впоследствии Л.Канто э Кастро, Л. де Хааном и М.Темидо [104]. В случае непрерывного времени новых законов не возникает [125]. Во многомерном случае (нескольких признаков) изучена предельная зависимость максимумов, порождаемая как возможно исходной зависимостью признаков частицы, так и влиянием ветвящегося процесса [49, 125].

С другой стороны, при отказе от предположения о независимости признаков возникает две основные задачи: выяснить, когда зависимость не влияет на асимптотику максимумов, и напротив, когда она существенно влияет, и это влияние необходимо описать. Первая задача решалась А.В.Лебедевым в [44, 51] для нормальных признаков (когда признаки частиц в поколении имеют многомерное нормальное распределение при известном генеалогическом дереве поколения), а вторая для признаков с тяжелыми (правильно меняющимися) хвостами. Во всех случаях предполагалось, что зависимость признаков пары частиц определяется дальностью их родства, т.е. сколько поколений назад они имеют ближайшего общего предка. Рассмотрены критические, околокритические и надкритические ветвящиеся процессы. При этом использовались книги В.А.Ватутина [6] и Т.Харриса [77], а также известные работы К.Фляйшмана и Р.Зигмунда-Шульце [112] и А.Л.Якымива [84, 85] о редуцированных критических ветвящихся процессах. Заметим, что частицы поколения с введенным расстоянием по дальности родства представляют собой ультраметрическое пространство, в котором для любых трех расстояний между точками (частицами) либо равны все три расстояния, либо два равны, а третье — меньше [82, с.131–132]. Поэтому их нельзя расположить соответственно на прямой или в обычном пространстве.

Следует отметить, что модели, в которых частицы ветвящегося процесса обладают некоторым признаком (весом, энергией и т.п.) рассматриваются давно [77, гл. 3], но не с точки зрения экстремумов. Например, в работе У.Рослера, В.А.Топчего, В.А.Ватутина [67] вес частицы формируется умножением веса матери на случайный множитель, и изучается асимптотика суммарного веса частиц по поколениям или за все время. Таким образом, мы видим еще одну аналогию между теорией экстремумов и теорией суммирования. Однако как мультипликативная модель [67], так и модели дробления массы или энергии [77, гл. 3] исключают невырожденное стационарное распределение признаков частиц, которое было важным предположением в работах А.В.Лебедева и других упомянутых выше.

При изучении влияния зависимости на поведение максимумов стационарных последовательностей используется понятие экстремального индекса $\theta \in [0,1]$. Бывает, что максимум n членов последовательности асимптотически растет как максимум $[\theta n]$ независимых случайных величин с тем же распределением. При этом превышения высокого уровня образуют кластеры со средним размером $1/\theta$. Эта тематика широко представлена в [54, 107] и др. Некоторые новые результаты об экстремальных индексах линейных стохастических рекуррентных последовательностей недавно получены А.А.Голдаевой [14, 15].

Однако на практике существует необходимость в изучении максимумов зависимых случайных величин на более сложных структурах, чем множество натуральных чисел. Связанные с этим трудности обсуждались еще в [9, §3.9, §3.12]. В диссертации Г.Чои [105] экстремальный индекс был обобщен на случайные поля на решетках $\mathbf{N}^d$, $d \geq 2$. Эта идея получила дальнейшее развитие в работах Х.Феррейры и Л.Перейры [110, 139]. Однако и этого недостаточно для менее регулярных случаев. Поэтому в работе А.В.Лебедева [50] введены два новых экстремальных индекса в схеме серий для произвольных систем случайных величин (одинаково распределенных в каждой серии), взятых в случайном количестве. Их применение продемонстрировано на различных примерах: как упомянутых выше моделях активности в информационных сетях и признаков частиц в ветвящихся процессах, так и на моделях с копулами и пороговых моделях. При этом обнаружен ряд интересных эффектов, не характерных для максимумов стационарных последовательностей.

Отметим, что максимумы независимых разнораспределенных случайных величин в схеме серий ранее изучались, например, в работах Е.Панчевой [63] и А.Н.Чупрунова [79], а максимумы в моделях с копулами в работе Е.А.Савинова [69].

Максимальные ветвящиеся процессы (МВП) представляют собой экстремальные аналоги классических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона. А именно, мы заменяем суммирование числа потомков частиц (при определении численности очередного поколения) на максимум. Можно сказать, что в максимальных ветвящихся процессах в каждом поколении выживают потомки только одной частицы, имеющей больше всего потомков. МВП были введены и изучались Дж.Ламперти [123, 124] в 1970–72 гг., однако в дальнейшем были совершенно заброшены (хотя и упомянуты в обзоре [145]). Новый этап исследования был начат А.В.Лебедевым с 2001 года. В [39] проведено обобщение процессов с целочисленных значений на произвольные борелевские множества в $\mathbf{R}_+$ (аналогичные обобщения процессов Гальтона-Ватсона на непрерывное множество значений представляют собой процессы Иржины [23, 120]), изучены различные их свойства и доказана эргодическая теорема. При этом использовалось свойство ассоциированности случайных величин, которому посвящена книга А.В.Булинского и А.П.Шашкина [5], а при доказательстве эргодичности (и в дальнейшем, предельных теорем для стационарных распределений) — теоремы из книги А.А.Боровкова [3].

Следует подчеркнуть важное отличие МВП от процессов Гальтона-Ватсона (или Иржины): те либо вырождаются, либо уходят на бесконечность, а МВП могут иметь невырожденное стационарное распределение. Именно на изучении эргодических МВП были сосредоточены дальнейшие исследования А.В.Лебедева. В [32] были доказаны предельные теоремы для стационарных распределений ограниченных МВП, в [33] для неограниченных с относительно легкими (до лог-вейбулловских с показателем $\alpha > 2$) хвостами, в [37] — с тяжелыми (степенными) хвостами распределений числа потомков. Асимптотика хвостов стационарных распределений изучалась в [43]. В качестве приложений рассмотрены вентильные бесконечнолинейные системы массового обслуживания [34, 35]. Такие системы ранее изучались С. Брауни и др. [101, 102], Ч.Кнесслом и З.Таном [122], Д.Пинотци и М.Зазанисом [141] другими методами. Обзор результатов А.В.Лебедева для МВП с одним типом частиц представлен в [42].

Дальнейшее развитие теории МВП связано с введением нескольких типов частиц. Предполагается, что число частиц каждого типа формируется как максимум чисел потомков данного типа от каждой частицы предыдущего поколения. Обобщение с целочисленных значений на произвольные неотрицательные проводится аналогично случаю одного типа частиц. В [49] доказана основная эргодическая теорема, в [46, 47] доказаны предельные теоремы для стационарных распределений. Одной из трудностей, возникающих в определении МВП с несколькими типами частиц и нецелыми значениями, является тот факт, что не всякая положительная степень многомерной функции распределения также является многомерной функцией распределения. Эта проблема полностью снимается только для класса максимум-безгранично делимых многомерных распределений (одномерные распределения все являются максимум-безгранично делимыми). Такие распределения изучались, например, в работах А.А.Балкема и С.И.Резника [93] и А.Земплени [20].

Примечательно, что исследования автора оказались подхвачены в работе О.Айдогмуса, А.П.Гхоша, С.Гхоша и А.Ройтерштейна [92], где были введены раскрашенные максимальные ветвящиеся процессы. Их отличие от многотипных МВП заключается в том, что типы (цвета) частиц определяются уже после формирования поколения, случайным образом, причем тип влияет на дальнейшую плодовитость. Другим отличием от подхода автора стало рассмотрение только процессов, уходящих в бесконечность. На эту тему С.Гхошем была даже написана диссертация [115].

В заключение заметим, что настоящая диссертация не закрывает какие-то известные вопросы и проблемы или углубляет и уточняет ранее известные результаты, а скорее открывает целый ряд перспективных научных направлений.

Цель работы. Целью диссертационной работы является формулирование новых современных задач и понятий в стохастической теории экстремумов, получение основных результатов о поведении экстремумов систем случайных величин и максимальных ветвящихся процессов, доказательство соответствующих предельных и эргодических теорем.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные из них состоят в следующем:

1. Получено достаточное условие асимптотической эквивалентности максимумов в общей схеме максимумов сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с тяжелыми хвостами и продемонстрировано его применение к максимумам частичных сумм Эрдеша-Реньи, полей дробового шума и суммарных активностей в моделях информационных сетей. Для различных моделей получены достаточные условия в виде ограничений сверху на хвостовой индекс распределений слагаемых.

2. Доказаны новые предельные теоремы об экстремумах признаков частиц в ветвящихся процессах при отказе от классических предположений. Для бессмертных надкритических процессов получен и исследован широкий класс предельных распределений максимумов признаков частиц. Для различных ветвящихся процессов изучено влияние зависимости признаков частиц, связанной с их родством, на асимптотическое поведение максимумов. В случае нескольких признаков получены многомерные предельные распределения и изучены их копулы.

3. Введены два новых экстремальных индекса в схеме серий для систем зависимых случайных величин, взятых в случайном количе-

стве, изучены их свойства, взаимосвязи и связь с классическим экстремальным индексом. Вычислены индексы для суммарных активностей в моделях информационных сетей, признаков частиц в ветвящихся процессах, а также для моделей с копулами и пороговых моделей.

4. Введены максимальные ветвящиеся процессы с одним и несколькими типами частиц (с произвольными неотрицательными значениями), представляющие собой экстремальные аналоги ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона и Иржины, доказаны эргодические и предельные теоремы для них, рассмотрены приложения в теории массового обслуживания.

Методы исследования. В работе используются классические и современные методы теории вероятностей, в том числе, теории случайных процессов, стохастической теории экстремумов, теории ветвящихся процессов, а также методы комбинаторики и математического анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Результаты и методы могут быть полезны в исследованиях сложных систем случайных величин, процессов и полей. Они могут быть интересны специалистам, работающим в МГУ имени М.В.Ломоносова, СПбГУ, КФУ, МИАН имени В.А.Стеклова, ИПУ РАН имени В.А.Трапезникова, ИППИ РАН имени А.А.Харкевича, ИМ СО РАН имени С.Л.Соболева, ЯГПУ имени К.Д.Ушинского и других высших учебных заведениях и научных центрах. Результаты диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на семинарах:

- Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (Москва, МГУ, руководитель — академик РАН профессор А.Н.Ширяев)

- Городской семинар по теории вероятностей и математической статистике (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН, руководитель — академик РАН профессор И.А.Ибрагимов)

- Статистика экстремальных событий (Москва, ИПУ РАН, руководитель — д.ф.-м.н., г.н.с. Н.М.Маркович) а также на следующих конференциях:

- Международная конференция "Колмогоров и современная математика", посвященная 100-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова (Москва, 2003)
- Международная конференция "Теория вероятностей и ее приложения", посвященная 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко (Москва, 2012)
- VII Международная Петрозаводская конференция "Вероятностные методы в дискретной математике" (2008)
- VI Международный Санкт-Петербургский семинар по моделированию (2009)
- Международная конференция "Стохастический анализ и случайная динамика" (Львов, 2009)
- II, V, VI, IX Международные Колмогоровские чтения (Ярославль, 2004, 2007, 2008, 2011)
- IV, V, VI Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике (2003, 2004, 2005)
- VIII, X, XI Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам (2001, 2003, 2004)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 25 работ, представленных в списке литературы [29]–[52] и [125], из них 21 в журналах, входящих в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий. Все работы выполнены автором самостоятельно.

Краткое содержание диссертации. Диссертация состоит из введения и пяти глав. Представим здесь наиболее интересные результаты.

В главе 1 решены две неклассические задачи о максимумах сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с тяжелыми хвостами.

В разделе 1.1 изучены максимумы независимых случайных сумм, когда число сумм и число слагаемых в каждой из них растут. А именно, рассмотрены экстремумы вида

$$Y_{mn} = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}, \quad m, n \ge 1,$$

где X_{ij}, $i, j \geq 1$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины. Обозначим общую функцию распределения X_{ij} через F. Введем случайную величину X, имеющую то же распределение.

Предположим, что $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$.

Заметим, что суммы $S_{in} = \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ асимптотически нормальны при $n \to \infty$; асимптотика же максимумов нормальных случайных величин известна. Получаем повторный предел

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{a_m \left(Y_{mn} n^{-1/2} - b_m\right) \leq x\right\} = \exp\{-e^{-x}\}, \tag{1}$$

где $a_m = (2 \ln m)^{1/2}$, $b_m = (2 \ln m)^{1/2} - (2 \ln m)^{-1/2} \ln(4\pi \ln m)^{1/2}$.

А что происходит, если m и n стремятся к бесконечности одновременно? На этот счет автором доказан ряд теорем, из которых наиболее интересна следующая.

Пусть $\bar{F}(u) \sim u^{-\alpha} L(u)$, $u \to \infty$, где $\alpha > 0$ и $L(u)$ — медленно меняющаяся функция. Введем числа c_n такие, что $n\bar{F}(c_n) \to 1$, $n \to \infty$. Тогда $c_n \sim n^{1/\alpha} L^*(n)$, $n \to \infty$, где $L^*(u)$ — медленно меняющаяся функция, зависящая от L.

Теорема 1.1.4. *Пусть* $\alpha > 2$ *и* $\mathbf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$, $\delta > 0$, *тогда:*

1) *если*

$$\limsup_{m,n\to\infty} \frac{\ln m}{\ln n} < \frac{\alpha}{2} - 1,$$

то верно

$$\mathbf{P}\left\{a_m \left(Y_{mn} n^{-1/2} - b_m\right) \leq x\right\} \to \exp\{-e^{-x}\};$$

2) *если*

$$\liminf_{m,n\to\infty} \frac{\ln m}{\ln n} > \frac{\alpha}{2} - 1,$$

то верно

$$\mathbf{P}(Y_{mn}/c_{mn} \leq x) \to \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad x > 0,$$

Таким образом, в зависимости от соотношения скоростей роста m, n и свойств распределений слагаемых могут возникать различные предельные законы (Гумбеля и Фреше).

В разделе 1.2. изложена общая схема максимумов сумм. А именно, рассматривается семейство проиндексированных независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, и случайный процесс, значениями которого являются конечные классы конечных множеств индексов. Случайные величины, чьи индексы вошли в одно множество, складываются, а затем из этих сумм берется максимум. При определенных условиях этот максимум растет асимптотически эквивалентно максимуму всех случайных величин с индексами по объединению множеств.

Пусть задан случайный процесс $\Upsilon = \{\Upsilon(t), t \in T\}$, значения которого — конечные классы конечных подмножеств $\mathbf{N}$.

Пусть задано семейство $\Xi = \{\xi_{i,t}, i \in \mathbf{N}, t \in T\}$ неотрицательных с.в., н.о.р. при любом $t \in T$.

Полагаем, что Υ и Ξ независимы.

Для любых $A \subset \mathbf{N}$, $t \in T$ обозначим максимум набора случайных величин $\{\xi_{i,t},\ i \in A\}$ через $M_t(A)$, r-ый максимум (т.е. число, стоящее r-ым с конца в вариационном ряду) через $M_t^{(r)}$, сумму через $S_t(A)$.

Пусть $U(t) = \bigcup_{A \in \Upsilon(t)} A$.

Введем случайные процессы, порожденные Υ и Ξ:

$$\zeta(t) = \sup_{A \in \Upsilon(t)} S_t(A), \quad \kappa(t) = \sup_{A \in \Upsilon(t)} |A|, \quad \nu(t) = |U(t)|,$$
$$\mu_1(t) = M_t(U(t)), \quad \mu_r(t) = M_t^{(r)}(U(t)),$$

где через $|A|$ обозначается число элементов множества A.

Предполагается, что $\nu(t) < \infty$ п.н. при любом $t \in T$.

Пусть существует случайный процесс $\rho(t)$ со значениями в $\mathbf{Z}_+$, измеримый относительно Υ, такой, что $\rho(t) \geq 1$ при $\nu(t) \geq 1$, $\rho(t) \leq \nu(t)$ п.н. при всех $t \in T$.

Обозначим через $\pi(t)$ вероятность того, что для множества B, равновероятно выбранного среди всех подмножеств $U(t)$, состоящих из $\rho(t)$ элементов, имеет место $\sup_{A \in \Upsilon(t)} |A \cap B| > 1$.

Теорема 1.2.1. *Пусть выполнены условия:*

$$(\kappa(t) - 1)\mu_{\rho(t)}(t)/\mu_1(t) \xrightarrow{P} 0, \quad \pi(t) \to 0, \quad t \to \infty,$$

тогда верно

$$\zeta(t)/\mu_1(t) \xrightarrow{P} 1, \quad t \to \infty. \tag{2}$$

Применять теорему в общем виде бывает сложно, поэтому доказано также полезное следствие в случае тяжелых хвостов.

Пусть $T = \mathbf{N}$ и все случайные величины из Ξ имеют одинаковое распределение F, удовлетворяющее условиям

$$F(-0) = 0, \quad \bar{F}(x) \sim x^{-\alpha} L(x), \quad x \to \infty.$$

Следствие 1.2.3. *Пусть* $\nu(n) = n$, $\kappa(n) = O_p(n^\delta)$, $0 < \delta < 1$, $n \to \infty$, *и* $\pi(n) \to 0$ *при* $\rho(n) = [n^\gamma]$, $0 < \gamma < 1$, $n \to \infty$, *тогда при* $0 < \alpha < \gamma/\delta$ *верно* (2).

Пусть c_n такие, что $n\bar{F}(c_n) \to 1$, $n \to \infty$, тогда

$$\mathbf{P}(\zeta(n)/c_n \le x) \to \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad x > 0.$$

Приведены примеры приложения теоремы 1.2.1 для больших скачков случайных блужданий (максимумов сумм Эрдеша-Реньи) и экстремумов полей дробового шума.

В разделе 1.3 представлены приложения общей схемы из раздела 1.2 для максимумов суммарной активности в информационных сетях, описываемых случайными графами и гиперграфами.

Задача об асимптотическом поведении максимумов суммарных активностей в информационных сетях поставлена автором следующим образом:

- сеть описывается случайным графом;
- узлы обладают индивидуальными информационными активностями (н.о.р.с.в. с правильно меняющимися хвостами распределений, с показателем $a > 0$);
- суммарная активность в узле — сумма его собственной и его соседей (входящих соседей), от которых он получает информацию;
- нас интересует максимум суммарной активности по сети.

Вопрос в том, когда максимум суммарной активности растет асимптотически как максимум индивидуальных активностей.

В качестве примера приведем модель 1 со случайными весами (раздел 1.3.3). Пусть w_i, $1 \le i \le n$ — независимые случайные величины, одинаково распределенные как $W \ge 0$ (не зависящие от индивидуальных активностей), и $\mathbf{E}W^\beta < \infty$, $\beta \ge 1$.

Обозначим $p_i = \varphi(w_i n^{-s/2})$, где $0 < s \le 1$, и для φ на $\mathbb{R}_+$ верно $0 \le \varphi(x) \le \min\{1, x\}$, $\varphi(x) \sim x$, $x \to 0$. Пусть при известных w_i, $1 \le i \le n$, каждая пара вершин i и j соединяется ребром с вероятностью $p_i p_j$ независимо от других пар. Применительно к социальным сетям веса могут отражать общительность пользователей.

Теорема 1.3.3.1. *В модели 1 верно* (2) *при* $\beta \ge 2$, *если*

$$a < \frac{2s - 1}{2(1 - (s - 1/\beta)_+)}, \quad s > 1/2,$$

и при $1 \le \beta < 2$, *если*

$$a < \frac{(1 + \beta/2)s - 1}{2(1 - (s - 1/\beta)_+)}, \quad s > \frac{1}{1 + \beta/2}.$$

В главе 2 получены новые результаты о максимумах признаков частиц в ветвящихся процессах при отказе от классических условий (принадлежности распределения признака области притяжения максимум-устойчивого закона либо независимости признаков в популяции).

В разделе 2.1 рассмотрены максимумы независимых признаков в бессмертных надкритических процессах с дискретным и непрерывным временем, для одного или нескольких признаков частицы. Получен обширный класс возможных предельных законов для максимумов в случае дискретного времени. Этот класс обобщает максимум-полуустойчивые распределения. В случае непрерывного времени новых законов не возникает. Во многомерном случае (нескольких признаков) изучена предельная зависимость максимумов, порождаемая как возможно исходной зависимостью признаков частицы, так и влиянием ветвящегося процесса.

Для краткости приведем лишь простейший одномерный случай с дискретным временем (раздел 2.1.1). Рассмотрим надкритический процесс Гальтона–Ватсона Z_n, $n \geq 0$, $Z_0 = 1$, с производящей функцией числа потомков $f(s)$:

$$f(0) = 0, \quad f(s) < s, \quad \forall s \in (0, 1).$$

Каждая частица имеет одного или более потомков, так что процесс не вырождается (бессмертный).

Теорема 2.1.1.1. *Пусть для некоторых числовых последовательностей $a_n > 0$, b_n имеет место слабая сходимость*

$$\mathbf{P}(M_n \leq a_n x + b_n) \xrightarrow{w} \Psi(x), \quad n \to \infty,$$

к невырожденной ф.р. $\Psi(x)$. Тогда Ψ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Psi(ax + b) = f(\Psi(x)), \tag{3}$$

для некоторых чисел $a > 0$, b.

Теорема 2.1.1.2. *Любая невырожденная ф.р. Ψ, удовлетворяющая функциональному уравнению (3), является предельной в указанной схеме для подходящих f и F.*

Введем обозначения $x_0 = \inf\{u : \Psi(u) > 0\}$, $x_\omega = \sup\{u : \Psi(u) < 1\}$.

Теорема 2.1.1.3. *Для невырожденных распределений Ψ, удовлетворяющих уравнению (3), возможны только следующие варианты:*

1) $0 < a < 1$, $x_0 = b/(1-a)$, $x_\omega = +\infty$;

2) $a = 1$, $b < 0$, $x_0 = -\infty$, $x_\omega = +\infty$;

3) $a > 1$, $x_0 = -\infty$, $x_\omega = b/(1-a)$.

Теорема 2.1.1.4. *Решение $\Psi(x)$ функционального уравнения (3) однозначно определяется его сужением на любой полуинтервал вида $[c, (c-b)/a)$.*

Следствие 2.1.1.1. *Для любого $a > 0$ и непрерывной справа неубывающей функции $\psi(x)$ на $[c_1, c_2)$, такой, что*

$$0 < f(\psi(c_2 - 0)) \leq \psi(c_1) < 1,$$

существует распределение Ψ, удовлетворяющее (3) с заданным a и $b = c_1 - ac_2$, такое, что $\Psi(x) = \psi(x)$ на $[c_1, c_2)$.

В разделе 2.2. рассмотрены максимумы зависимых признаков в различных процессах с дискретным временем. Предполагалось, что ветвящийся процесс влияет на признаки частиц только через определяемую им структуру зависимости признаков в популяции, а признаки частиц не влияют на ветвящийся процесс (тем самым исключен естественный отбор). При этом зависимость признаков пары частиц определяется дальностью их родства, т.е. сколько поколений назад они имеют ближайшего общего предка. Рассмотрены критические, околокритические и надкритические ветвящиеся процессы. В гауссовском случае найдены ограничения на корреляции, при которых максимумы растут асимптотически так же, как при независимых признаках. В случаях тяжелых хвостов и сестринской зависимости доказаны предельные теоремы, описывающие влияние зависимости признаков на асимптотическое поведение максимумов с помощью некоторого показателя, который может быть интерпретирован как экстремальный индекс (см. раздел 3.2).

В гауссовском случае (раздел 2.2.1) автор предполагает, что

- совместное распределение признаков частиц в поколении (при известном генеалогическом дереве поколения) является многомерным нормальным;
- частные распределения признаков — стандартные нормальные;
- коэффициент корреляции признаков пары частиц мажорируется (по модулю) величиной $0 \leq r_k < 1$, если эти частицы имеют ближайшего общего предка k поколений назад.

Вопрос в том, когда максимумы растут асимптотически как в случае независимых признаков.

Отметим, что для стандартного нормального распределения Φ верно:

$$\Phi^s(a(s)x + b(s)) \to \exp\{-e^{-x}\}, \quad s \to \infty,$$
$$a(s) = (2\ln s)^{-1/2}, \quad b(s) = (2\ln s)^{1/2} - \tfrac{1}{2}(2\ln s)^{-1/2}(\ln\ln s + \ln 4\pi).$$

Предполагается, что дисперсия числа потомков $\sigma^2 < \infty$, $B = \sigma^2/2$.

Теорема 2.2.1.1. (для критического процесса) *Пусть* $\sup r_k = \delta < 1$ *и* $r_k \ln k \to 0$, $k \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(M_n \le a(n)x + b(n)|Z_n > 0) \to \left(1 + Be^{-x}\right)^{-1}, \quad n \to \infty.$$

Для надкритического процесса со средним числом потомков $\mu > 1$ верно:

$$\frac{Z_n}{\mu^n} \xrightarrow{\text{п.н.}} W, \quad n \to \infty; \quad \mathbf{P}(W > 0) > 0.$$

Теорема 2.2.1.3. (для надкритического процесса) *Пусть* $\sup r_k = \delta < 1$ *и* $r_k = o(1/k)$, $k \to \infty$, *тогда*

$$\mathbf{P}(M_n \le a(\mu^n)x + b(\mu^n)|Z_n > 0) \to \mathbf{E}(\exp\{-e^{-x}W\}|W > 0), \quad n \to \infty.$$

В случае тяжелых хвостов (раздел 2.2.2) автором введена максимум-линейная модель формирования признаков и установлено влияние зависимости на предельное распределение максимумов.

Пусть $\kappa(i, n, m)$ — номер предка i-ой частицы n-го поколения в m-ом поколении, $0 < m < n$, $1 \le i \le Z_n$. Положим также $\kappa(i, n, n) = i$ и $\kappa(i, n, m) = 1$ при $m < 0$. Пусть задано распределение A на $\mathbf{R}_+$ с $\bar{A}(x) \sim x^{-\gamma}L(x)$, $x \to \infty$, $\gamma > 0$, и $v(s)$ — положительная функция такая, что $s\bar{A}(v(s)) \to 1$, $s \to \infty$.

Предположим, что признак i-ой частицы n-го поколения задан формулой

$$\xi_{n,i} = \bigvee_{k=0}^{\infty} a_k \eta_{n-k,\kappa(i,n,n-k)},$$

где $\eta_{n,i}$, $n \in \mathbf{Z}$, $i \ge 1$, н.о.р.с.в. с ф.р. A, и

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\gamma} = 1.$$

Тогда все признаки частиц имеют одинаковое распределение $F(x) = \prod_{k=0}^{\infty} A(x/a_k)$ с хвостом $\bar{F}(x) \sim \bar{A}(x)$, $x \to \infty$, а при $A(x) = \exp\{-(x/c)^{-\gamma}\}$, $x > 0$, $c > 0$ верно равенство $F = A$.

Пусть $Z(m, n)$ — число частиц ветвящегося процесса в момент $m \le n$, которые имеют непустое потомство в момент n. Процесс $Z(m, n), 0 \le m \le n$ называется редуцированным процессом.

Теорема 2.2.2.3. *Пусть для любого* $K \ge 1$ *верно*

$$((Z(n-k, n)/c_n)_{0 \le k \le K}|Z_n > 0) \xrightarrow{d} \zeta(b_k)_{0 \le k \le K}, \quad n \to \infty,$$

где ζ — положительная случайная величина, $b_k \geq 0$, $k \geq 0$, и $c_n > 0$, $n \geq 1$, — некоторые числовые последовательности, $c_n \to +\infty$, $n \to \infty$, и $u_n = xv(c_n)$, $n \geq 1$, $x > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n | Z_n > 0) \to \mathbf{E} \exp\{-\theta x^{-\gamma} \zeta\}, \quad n \to \infty,$$

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\gamma} b_k.$$

Разобраны примеры критических процессов (с конечной и бесконечной дисперсией числа потомков) и надкритических процессов.

В главе 3 введены новые экстремальные индексы в схеме серий со случайными длинами, применимые к широкому классу систем случайных величин, взятых в случайном количестве. Показано, как с помощью экстремальных индексов можно интерпретировать результаты предыдущих глав, а также получены новые результаты для моделей с копулами и пороговых моделей. Тем самым сделан новый шаг в обобщении и развитии понятия экстремального индекса как средства описания влияния зависимости случайных величин на асимптотическое поведение их максимумов.

В разделе 3.1 даны определения и основные свойства экстремальных индексов.

Рассмотрим сначала классическое определение для стационарных в узком смысле последовательностей.

Определение A *Пусть ξ_n, $n \geq 1$, имеют распределение F и $M_n = \vee_{k=1}^{n} \xi_k$. Если для каждого $\tau > 0$ существует такая числовая последовательность $u_n(\tau)$, что $n\bar{F}(u_n(\tau)) \to \tau$ и $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(\tau)) \to e^{-\theta\tau}$, то θ называется экстремальным индексом.*

Интерпретации его в том, что максимумы n зависимых величин асимптотически растут как максимумы $[\theta n]$ независимых, а превышения высокого уровня образуют кластеры среднего размера $1/\theta$. Бывают любые значения $\theta \in [0, 1]$.

Если взять максимумы $\hat{M}_n$ последовательности независимых случайных величин с тем же распределением F, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \leq u_n(\tau)) = e^{-\tau}$, откуда следует:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \leq u_n(\tau)) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \leq u_n(\tau))\right)^{\theta}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \leq u_n(\tau)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_{[\theta n]} \leq u_n(\tau)), \quad \theta > 0$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \leq u_n(\tau)) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \leq u_n(\tau))$.

Далее новое определение 1 обобщает свойство 1, определение 2 — свойство 2, а свойство 3, как выяснилось, в схеме серий может нарушаться.

Пусть задан набор случайных величин $\xi_{n,m}$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, с распределениями F_n, а также последовательность целочисленных случайных величин $\nu_n \xrightarrow{P} +\infty$, $n \to \infty$, и $M_n = \vee_{m=1}^{\nu_n} \xi_{n,m}$.

Определение 1. *Пусть для каждого $s \in (0,1)$ существует такая последовательность $u_n(s)$, что $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\nu_n} \to s$, и $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) \to \psi(s)$, $n \to \infty$. Тогда ψ назовем экстремальной функцией. Если $\psi(s) = s^\theta$, то θ назовем экстремальным индексом.*

В общем случае определим частичные индексы

$$\theta^+ = \sup_{s \in (0,1)} \log_s \psi(s), \quad \theta^- = \inf_{s \in (0,1)} \log_s \psi(s),$$

тогда $\theta^+ \geq \theta^-$ и $s^{\theta^+} \leq \psi(s) \leq s^{\theta^-}$, $s \in (0,1)$.

Индексы, как и ранее, принимают неотрицательные значения, однако ограничение сверху единицей снимается, по крайней мере, для θ^+.

Определение 2. *Пусть для каждого $s \in (0,1)$ существует такая последовательность $u_n(s)$, что $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\nu_n} \to s$, и $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) - \mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n} \to 0$, $n \to \infty$, тогда θ назовем экстремальным индексом.*

Существование экстремального индекса по определению 2 означает, что экстремальная функция из определения 1 допускает представление:

$$\psi(s) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n}.$$

Доказан ряд свойств экстремальных индексов (теорема 3.1.1), связывающих их с классическим экстремальным индексом (по определению А) и между собой.

Возникает вопрос, зачем давать два определения, нельзя ли обойтись каким-то одним. Действительно, во многих случаях оба индекса эквивалентны: они существуют и равны между собой (теорема 3.1.1: свойства 1, 3, 6). Но бывает также, что обоих индексов не существует, а по определению 1 существует экстремальная функция и частичные индексы (примеры 3.3.2–3.3.4, 3.4.1–3.4.3); бывает, что существует индекс по определению 2, и не существует индекс по определению 1, а экстремальная функция и частичные индексы по-прежнему существуют (раздел 3.2: признаки частиц); наконец, бывает удивительная ситуация, когда оба индекса существуют, но принимают *различные* значения (пример 3.3.5). Таким образом, это действительно две разные характеристики системы, не сводящиеся к одной.

Для определенности терминологии, далее будем говорить об экстремальных индексах *системы* (случайных величин), обозначаемой через $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$.

Утверждения об экстремальных индексах системы представляют собой фактически утверждения о совместных распределениях случайных величин, поэтому их можно распространить и на условные совместные распределения.

Пусть каждая серия рассматривается при некотором условии A_n, где $\mathbf{P}(A_n) > 0$, $n \geq 1$, тогда будем говорить об *условной системе* $\{\xi_{n,m}; \nu_n | A_n\}$. Для нее можно аналогично сформулировать определения 1 и 2, заменив вероятности $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s))$ на условные вероятности $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)|A_n)$, а математические ожидания $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\nu_n}$ и $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n}$ на условные математические ожидания $\mathbf{E}(F_n(u_n(s))^{\nu_n}|A_n)$ и $\mathbf{E}(F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n}|A_n)$. При этом, конечно, предполагается, что условное одномерное распределение случайных величин в серии остается равным F_n (не зависит от A_n).

Таким образом, понятия экстремальных индексов и функции применимы также к условным системам случайных величин.

В разделе 3.2 показано, что некоторые результаты предыдущих глав можно интерпретировать в терминах новых экстремальных индексов. Например, в модели 1 со случайными весами при $s = 1$ (раздел 1.3.3) получаем, что система суммарных активностей имеет экстремальный индекс $\theta = 1/(1+(\mathbf{E}W)^2)$ по обоим определениям, а показатель θ в теореме 2.2.2.3 представляет собой экстремальный индекс условной системы признаков частиц (при условии невырождения $Z_n > 0$) по определению 2.

В разделе 3.3. изучены экстремальные индексы в моделях с копулами.

Определение. *Копулой (m-мерной) называется функция многомерного распределения на $[0,1]^m$ с равномерными частными распределениями. Копулой распределения F в $\mathbf{R}^m$ называется копула C, удовлетворяющая*

$$F(x_1, \ldots, x_m) = C(F_1(x_1), \ldots, F_m(x_m)),$$

где $F_1, \ldots, F_m$ — частные функции распределения.

Такое представление существует по знаменитой теореме Скляра и единственно в случае непрерывных частных распределений.

Далее мы для простоты будем полагать, что $\nu_n = n$ (треугольная схема), $F_n(x) \equiv x$, $x \in [0,1]$, а случайные величины $\xi_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, связаны n-мерной копулой C_n. К равномерному распределению можно перейти от любого непрерывного в силу свойства 2 из теоремы 3.1.1.

Разобран ряд примеров. Доказаны теоремы для архимедовых копул. Напомним, что строго архимедовой называется копула вида

$$C_d(y_1, \ldots, y_d) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{d} \varphi(y_i)\right), \tag{4}$$

где φ — убывающая функция на $[0, 1]$, называемая генератором, $\varphi(0) = +\infty$, $\varphi(1) = 0$. При $d = 2$ достаточно, чтобы эта функция была выпуклой. Если потребовать, чтобы функция φ^{-1} была вполне монотонной на $(0, +\infty)$, то формула (4) определяет копулу при любом $d \geq 2$ [134, теорема 4.6.2]. Далее будем считать это условие на φ выполненным.

С другой стороны, функция f является преобразованием Лапласа-Стилтьеса некоторого распределения тогда и только тогда, когда f вполне монотонна и $f(0) = 1$ [76, гл. 13, §4, теорема 1]. Отсюда следует, что функция φ^{-1} должна быть преобразованием Лапласа-Стилтьеса некоторого распределения, причем в силу условия $\varphi(0) = +\infty$, а значит, и $\varphi^{-1}(+\infty) = 0$, это распределение не должно иметь атомов в нуле. Таким образом, существует некоторая случайная величина $\zeta > 0$ п.н. такая, что

$$\varphi^{-1}(u) = \mathbf{E}e^{-u\zeta}, \quad u \geq 0.$$

Введем обозначения

$$x_0 = \inf\{x > 0 : \mathbf{P}(\zeta \leq x) > 0\}, \quad \mu = \mathbf{E}\zeta.$$

Будем для краткости обозначать $f(u) = \varphi^{-1}(u)$.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\mu < \infty$, тогда экстремальная функция $\psi(s) = f(-(\ln s)/\mu) = \mathbf{E}s^{\zeta/\mu}$, $\theta^+ = 1$, $\theta^- = x_0/\mu$.*

Теорема 3.3.2. *Пусть n-мерная копула C_n имеет генератор $\varphi_n(t) = \varphi(t)^{\beta_n}$, где $\beta_n \geq 1$, $(\beta_n - 1)\ln n \to \gamma \geq 0$, и для генератора $\varphi(t)$ верно $\mu < \infty$. Тогда $\psi(s) = f(-e^{-\gamma}(\ln s)/\mu)$, $\theta^- = (x_0/\mu)e^{-\gamma}$, $\theta^+ = e^{-\gamma}$.*

Приведем еще пару интересных примеров.

Пример 3.3.1. Копула Гумбеля-Хоугаарда имеет вид

$$C(y_1, \ldots, y_d) = \exp\left\{-\left(\sum_{i=1}^{d}(-\ln y_i)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\right\}, \quad \alpha \geq 1.$$

При $\nu_n = n$, $(\alpha_n - 1)\ln n \to \gamma \geq 0$, $n \to \infty$, получаем $\theta = e^{-\gamma}$ (по обоим определениям).

Пример 3.3.5. При копуле Гумбеля-Хоугаарда с $(\alpha_n - 1)\ln n \to \gamma \geq 0$, $\nu_n/n \xrightarrow{d} \zeta$, $n \to \infty$, где ζ имеет устойчивое распределение с $\mathbf{E}e^{-u\zeta} = e^{-u^\beta}$, $0 < \beta < 1$, получаем $\theta = e^{-\gamma\beta}$ по определению 1, $\theta = e^{-\gamma}$ по определению 2.

В разделе 3.4 изучены экстремальные индексы для пороговых моделей.

Пусть длина серии ν_n представляет собой момент остановки относительно последовательности $\{\xi_{n,m},\, m \geq 1\}$, где $\xi_{n,m}$, $m \geq 1$ независимы и имеют равномерное распределение на $[0,1]$, причем остановка происходит в момент превышения очередной случайной величиной некоторого порога ζ_n, не зависящего от $\{\xi_{n,m},\, m \geq 1\}$; $0 < \zeta_n < 1$ п.н.

Для числовых порогов $\zeta_n = a_n \to 1$, $n \to \infty$, получаем $\psi(s) = (2 - 1/s)_+$ по определению 1. В этом случае $\theta^- = 1$, $\theta^+ = +\infty$. Удивительно, что результат совершенно не зависит от выбора последовательности a_n, $n \geq 1$.

Доказана следующая теорема для некоторого класса случайных порогов.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $n(1-\zeta_n) \xrightarrow{L_1} \zeta > 0$, $n \to \infty$, $\mathbf{E}\zeta = 1$. *Тогда* $\psi(s) = g(f^{-1}(s))$, *где* $f(t) = \mathbf{E}(1 + t/\zeta)^{-1}$ *и* $g(t) = \mathbf{E}(\zeta - t)_+$.

Примеры показывают большое разнообразие поведения экстремальных функций в этом случае.

В главе 4 изучены общие максимальные ветвящиеся процессы (МВП) с одним типом частиц. Такие процессы представляют собой экстремальные аналоги ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона (в целочисленном случае) и процессов Иржины (для произвольных неотрицательных значений).

В разделе 4.1 даны определения и доказаны основные свойства МВП.

Первоначально [123] процессы определялись стохастически рекуррентной формулой

$$Z_{n+1} = \bigvee_{m=1}^{Z_n} \xi_{m,n},$$

где $\xi_{m,n}$, $m \geq 1$, $n \geq 0$, — независимые случайные величины с общим распределением F на $\mathbf{Z}_+$. Результат взятия максимума "ноль раз" (при $Z_n = 0$) равен нулю.

Автором они были обобщены с $\mathbf{Z}_+$ на произвольные множества $T \subset$

$\mathbf{R}_+$ с помощью формулы переходных вероятностей

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} \le y | Z_n = x) = F^x(y), \quad x, y \in T, \tag{5}$$

где F сосредоточено на T. Отсюда следует также конструктивное представление:

$$Z_{n+1} = \begin{cases} F^{-1}(U_n^{1/Z_n}), & Z_n > 0 \\ 0, & Z_n = 0 \end{cases}, \quad n \ge 0,$$

где $F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \ge y\}$ и U_n, $n \ge 1$, — независимые равномерно распределенные на $(0, 1)$ с.в.

Доказаны различные свойства МВП (преобразование подобия, ассоциированность, монотонность по параметрам и др.) и следующая эргодическая теорема.

Теорема 4.1.1. *Если для* МВП(T), $T \subset (0, +\infty)$, *выполнено*

$$\limsup_{x \to +\infty} x(1 - F(x)) < e^{-\gamma}, \quad \liminf_{x \to 0} x(-\ln F(x)) > e^{-\gamma},$$

где $\gamma = 0,577...$ *— константа Эйлера, то процесс* Z_n *эргодический.*

Возможность эргодичности является важным отличием МВП от процессов Гальтона-Ватсона и Иржины, которые с вероятностью единица либо вырождаются, либо уходят на бесконечность. Поэтому далее автором изучались эргодические МВП в плане исследования их стационарных распределений.

В разделе 4.2 доказаны предельные теоремы для стационарных распределений для некоторых семейств распределений числа потомков, когда это число стохастически стремится к бесконечности (семейства на растущих отрезках, степенные семейства с легкими и тяжелыми хвостами). Для МВП с функцией распределения числа потомков $F^{(\lambda)}$ стационарное распределение обозначаем через $\Psi^{(\lambda)}$, а случайную величину с таким распределением через $\tilde{Z}^{(\lambda)}$. Нас интересуют пределы при $\lambda \to \infty$.

Для краткости, приведем здесь лишь случай тяжелых хвостов, в котором возникает новый интересный класс предельных распределений.

Пусть задано степенное семейство распределений $F^{(\lambda)}(x) = F(x)^\lambda$, где распределение F сосредоточено на $(0, +\infty)$ и имеет степенной хвост, а следовательно, принадлежит области притяжения предельного закона Фреше для максимумов.

Введем сначала трехпараметрическое семейство распределений Фреше

$$\Phi_{\alpha,b,c}(x) = \begin{cases} \exp\{-c(x-b)^{-\alpha}\}, & x > b; \\ 0, & x \le b, \end{cases}$$

где $\alpha, c > 0$.

Обозначим $F_1 \succ F_2$, если $\bar{F}_1(x) \geq \bar{F}_2(x)$ для всех x.

Согласно теореме 4.1.1, любой МВП с $F = \Phi_{\alpha,b,c}$ при $\alpha > 1$, $b \geq 0$, $c > 0$ эргодический. Его стационарное распределение обозначим через $\Psi_{\alpha,b,c}$.

Теорема 4.2.3.1. *Пусть существуют такие числа* $\alpha > 1$, $c, c_1 > 0$, *что* $F \succ \Phi_{\alpha,0,c_1}$ *и* $\bar{F}(x) \sim cx^{-\alpha}$, $x \to \infty$. *Тогда*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Psi^{(\lambda)} \left(x\lambda^{1/(\alpha-1)} \right) = \Psi_{\alpha,0,c}(x).$$

Заметим, что рекуррентная случайная последовательность

$$Z_{n+1} = Z_n^{1/\alpha} \xi_{n+1},$$

где ξ_n, $n \geq 0$, независимы и имеют распределение $\Phi_{\alpha,0,1}$, удовлетворяет (5) с $F = \Phi_{\alpha,0,1}$. Отсюда следует, что случайная величина $\tilde{Z}$, заданная бесконечным произведением

$$\tilde{Z} = \prod_{n=0}^{\infty} \xi_n^{\alpha^{-n}}$$

(сходящимся при $\alpha > 1$ почти наверное), будет иметь распределение $\Psi_{\alpha,0,1}$.

В разделе 4.3 рассматриваются приложения МВП к вентильным бесконечнолинейным системам.

Напомним, что вентильными бесконечнолинейными системами массового обслуживания называют системы с бесконечным числом приборов, в которых доступ заявок к обслуживанию регулируется вентилем. Предполагается, что вентиль открыт только в том случае, когда все приборы свободны. Заявки поступают в очередь с бесконечным числом мест ожидания, а обслуживание происходит по стадиям. В начале стадии, когда вентиль открывается, все заявки из очереди мгновенно получают доступ к приборам и далее обслуживаются параллельно и независимо, до полного освобождения всех приборов. В момент освобождения всех приборов вентиль вновь открывается для новой партии заявок (пришедших за это время) и следующей стадии. Если очередь пуста, система ждет поступления заявки.

Как отмечено в разделе 4.1, поведение вентильных бесконечнолинейных систем массового обслуживания на периоде занятости может быть описано максимальными ветвящимся процессами. В этом можно увидеть аналогию с описанием однолинейной системы на периоде занятости ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона. Для полного описания работы системы необходимо рассмотреть максимальные ветвящиеся процессы с иммиграцией в момент обнуления (специального вида), для которых доказаны предельные теоремы, аналогичные доказанным в разделе 4.2.

В разделе 4.4 изучена асимптотика хвостов стационарных распределений МВП, в случаях конечного и бесконечного среднего числа потомков.

Для краткости, приведем лишь случай конечного среднего. Обозначим математические ожидания распределений F и Ψ через μ_F и μ_Ψ соответственно. Оба распределения имеют одну крайнюю правую точку x_ω. Введем функцию

$$\varphi(x) = \mathbf{E}(Z_{n+1}|Z_n = x) = \int_0^{+\infty} (1 - F(u)^x)\, du,$$

которая определена при $\mu_F < \infty$ для всех $x > 0$, и $\varphi(0) = x_0$.

Лемма 4.4.1. *Положительное решение μ^* уравнения $\varphi(x) = x$ существует и единственно; числовая последовательность $v_{n+1} = \varphi(v_n)$ сходится к нему при любом начальном условии $v_0 > 0$.*

Теорема 4.4.1. *$\mu_\Psi < \infty$ тогда и только тогда, когда $\mu_F < \infty$. При этом $\mu_\Psi \le \mu^*$ и верно*

$$\bar{\Psi}(x) \sim \mu_\Psi \bar{F}(x), \quad x \to x_\omega - 0.$$

В главе 5 изучены общие максимальные ветвящиеся процессы (МВП) с несколькими типами частиц.

В разделе 5.1 даны определения и получены основные свойства.

Пусть заданы случайные векторы $\xi^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_d^{(k)})$, $1 \le k \le d$, со значениями в $\mathbf{Z}_+^d$. Определим МПВ с d типами частиц как многомерную цепь Маркова $Z(n) = (Z_1(n), \dots, Z_d(n))$, $n \ge 0$, со значениями в $\mathbf{Z}_+^d$, заданную следующей рекуррентной формулой:

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^{d} \bigvee_{i=1}^{Z_j(n-1)} \xi_{i,k}^{(j)}(n), \tag{6}$$

где случайные векторы $\xi_i^{(j)}(n) = (\xi_{i,1}^{(j)}(n), \dots, \xi_{i,d}^{(j)}(n))$, $n \ge 1$, независимы и $\xi_i^{(j)}(n) \stackrel{d}{=} \xi^{(j)}$, $1 \le j \le d$. Имеется в виду, что i-ая частица j-го типа ($n-1$)-го поколения порождает $\xi_{i,k}^{(j)}(n)$ частиц k-го типа в n-ом поколении.

Содержательный смысл заключается в следующем: каждая частица может порождать потомков разных типов, распределение численностей которых зависит от типа частицы. Далее по численностям потомков каждого типа берется максимум. Таким образом, предполагается, что частицы разных типов не взаимодействуют между собой.

Обозначим функции многомерного распределения векторов $\xi^{(k)}$ через F_k, $1 \le k \le d$, тогда из (6) следует формула для переходных вероятностей:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(Z_1(n) \le j_1, \ldots, Z_d(n) \le j_d | Z_1(n-1) = i_1, \ldots, Z_d(n-1) = i_d) = \\ &= F_1^{i_1}(j_1, \ldots, j_d) \ldots F_d^{i_d}(j_1, \ldots, j_d), \quad i_k, j_k \in \mathbf{Z}_+.\end{aligned} \tag{7}$$

Вводя произвольные распределения F_k векторов $\xi^{(k)}$ уже не в $\mathbf{Z}_+^d$, а в $\mathbf{R}_+^d$, обобщаем формулу (7) до следующей:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(Z_1(n) \le y_1, \ldots, Z_d(n) \le y_d | Z_1(n-1) = x_1, \ldots, Z_d(n-1) = x_d) = \\ &= F_1^{x_1}(y_1, \ldots, y_d) \ldots F_d^{x_d}(y_1, \ldots, y_d), \quad x_k, y_k \in \mathbf{R}_+.\end{aligned} \tag{8}$$

Естественным представляется определить МВП с d типами частиц и значениями в $\mathbf{R}_+^d$ как многомерную цепь Маркова с помощью (8).

Однако здесь возникает одна проблема, связанная с многомерностью. В одномерном случае, если $F(y)$ — функция распределения, то $F^s(y)$ — тоже функция распределения, при любом $s > 0$. В многомерном случае, если $F(y_1, \ldots y_d)$ — функция распределения, то $F^s(y_1, \ldots y_d)$ совсем не обязательно является таковой.

Решением этой проблемы является либо введение набора дополнительных условий на области возможных значений векторов чисел потомков, либо рассмотрение максимум-безгранично делимых распределений (функции распределения которых в любой положительной степени остается функцией распределения). В разделе 5.1 эргодическая теорема доказана для $d = 2$ при дополнительных условиях, а в разделе 5.3 для $d \ge 2$ для максимум-безгранично делимых распределений.

В разделе 5.2 доказаны предельные теоремы для стационарных распределений МВП с несколькими типами частиц, обобщающие соответствующие теоремы раздела 4.2 на многомерный случай.

В разделе 5.3 изучены МВП с несколькими типами частиц, у которых распределения векторов чисел потомков имеют копулы экстремальных значений. Тогда они заведомо являются максимум-безгранично делимыми, а процессы оказываются более удобны для исследования.

Напомним, что максимум-устойчивые копулы (копулы экстремальных значений) удовлетворяют условияю:

$$C^s(u_1, \ldots, u_d) = C(u_1^s, \ldots u_d^s), \quad \forall s > 0.$$

При этих условиях удается доказать ряд свойств и эргодическую теорему.

Пусть распределения векторов $\xi^{(k)}$ имеют носители $T_k \subset \mathbf{R}_+^d$. Обозначим через $T_{k,l}$ проекции T_k на ось Ox_l. Тогда множеством возможных значений компоненты $Z_k(n)$ будет $T_k^* = \bigcup_{j=1}^d T_{j,k} \subset \mathbf{R}_+$. Предположим, что выполнено условие

$$\bigwedge_{k=1}^d \inf T_k^* \geq x_0 > 0. \tag{9}$$

За множество состояний цепи Маркова $Z(n)$ можно принять

$$S = \left\{ \bigvee_{k=1}^d x^{(k)} : x^{(k)} \in T_k, 1 \leq k \leq d \right\},$$

поскольку при любом $Z(0) \in \mathbf{R}_+^d \backslash \{0\}$ получаем $Z(n) \in S$ для всех $n \geq 2$ п.н. Множество S является носителем условного распределения $Z(n)$ при условии $Z(n-1) = x$ для любого $x \in (0, +\infty)^d$.

Будем предполагать, что S состоит более чем из одной точки (в противном случае стационарное распределение сосредоточено в этой точке и эргодичность тривиальна).

Обозначим $x^0 = (x_0, \ldots, x_0)$. Предположим также, что существует точка $a = (a_1, \ldots, a_d)$ такая, что для множеств $A = [a_1, +\infty) \times \cdots \times [a_d, +\infty)$ и $A^* = (0, a_1] \times \cdots \times (0, a_d]$ верно

$$\mathbf{P}(Z(n) \in A | Z(n-1) = x^0) > 0, \quad \mathbf{P}(Z(n) \in A^* | Z(n-1) = x^0) > 0. \tag{10}$$

Введем норму в $\mathbf{R}^d$: $\|(x_1, \ldots, x_d)\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$.

Для случайных векторов $\xi^{(k)}$ с распределениями F_k определим характеристики

$$\rho_k = \limsup_{u \to \infty} u \mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| > u), \quad 1 \leq k \leq d.$$

Теорема 5.3.1. *Если выполнены условия* (9), (10) *и* $\sum_{k=1}^d \rho_k < e^{-\gamma}$, *то процесс* $Z(n)$ *эргодический.*

Далее, теорема 5.3.2 обобщает теорему 4.2.3.1 на многомерный случай.

Автор благодарен научному консультанту доктору физико-математических наук профессору Владимиру Ильичу Питербаргу за полезные обсуждения и поддержку.

Глава 1

Максимумы сумм независимых случайных величин с тяжелыми хвостами

В этой главе мы рассмотрим две неклассические задачи о максимумах сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с тяжелыми хвостами.

В разделе 1.1. изучаются максимумы независимых случайных сумм, когда число сумм и число слагаемых в каждой из них растут. При этом в зависимости от соотношения их скоростей роста и свойств распределений слагаемых могут возникать различные предельные законы (Гумбеля и Фреше). Подобная задача ранее ставилась Г.И.Ивченко [22], и результаты данного раздела дополняют его результаты при отказе от классических условий.

В разделе 1.2. изложена общая схема максимумов сумм. А именно, рассматривается семейство проиндексированных независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, и случайный процесс, значениями которого являются конечные классы конечных множеств индексов. Случайные величины, чьи индексы вошли в одно множество, складываются, а затем из этих сумм берется максимум. При определенных условиях этот максимум растет асимптотически эквивалентно максимуму всех случайных величин с индексами по объединению множеств.

Отметим, что асимптотическая эквивалентность хвостов распределений суммы и максимума конечного числа независимых одинаково распределенных случайных величин в случае тяжелых хвостов представляет собой давно известный факт, обусловленный тем, что основной вклад в сумму дает самое большое слагаемое (максимум), а сумма остальных слагаемых по сравнению с ним оказывается мала. Далее это свойство обобщается на модель, где имеется набор случайных сумм со случайными числами слагаемых и от сумм берется максимум. По-прежнему оказывается, что основной вклад (в одну или несколько сумм, а значит, и в их максимум) дает только одно, максимальное слагаемое. Однако для этого хвост распределения слагаемых должен быть достаточно тяжелым, и требуется определить ограничения на его показатель. Такая задача является новой.

Рассмотрены примеры для больших скачков случайных блужданий и экстремумов полей дробового шума, ранее изучавшихся другими методами.

Понятно, что эта схема допускает также интерпретацию в терминах теории графов, где каждому индексу соответствует вершина, а множеству — вершина и ее соседи (для неориентированных графов) или входящие соседи (для ориентированных графов). При этом количество множеств не превосходит числа вершин, и оказывается меньше его, только если некоторые множества случайно совпадают. Другая интерпретация возможна в более общей теории гиперграфов, где в качестве ребер допускаются произвольные подмножества множества вершин. Тогда в качестве множеств можно рассматривать эти гиперребра, причем их количество более произвольно.

В разделе 1.3. представлены приложения общей схемы из раздела 1.2. для максимумов суммарной активности в информационных сетях, описываемых случайными графами и гиперграфами. Такому описанию посвящена обширная литература (см. обзор А.М.Райгородского [66], учебник Р. ван дер Хофстеда [119] и др.), однако задача изучения максимумов суммарных активностей является новой.

1.1 Максимумы независимых растущих сумм

Рассмотрим экстремумы вида

$$Y_{mn} = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}, \quad m, n \geq 1, \tag{1.1}$$

где X_{ij}, $i, j \geq 1$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины. Обозначим общую функцию распределения X_{ij} через F. Введем случайную величину X, имеющую то же распределение.

Выражение (1.1) может описывать, например, время выполнения однотипных работ, проводимых параллельно, если каждая из них делится на множество фаз [121]. Особый интерес здесь представляет модель параллельных вычислений на компьютере с большим числом процессоров. Степенные хвосты распределения числа операций возникают при последовательном декодировании [24, §6.4].

Формулу (1.1) можно также рассматривать как дискретизацию (по времени) максимума m случайных процессов с независимыми приращениями. Подобная модель для гауссовских процессов с непрерывным временем изучалась в [56].

Предположим сначала, что $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$.

Заметим, что суммы $S_{in} = \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ асимптотически нормальны при $n \to \infty$; асимптотика же максимумов нормальных случайных величин известна [54, теорема 1.5.3]. Получаем повторный предел

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{a_m \left(Y_{mn} n^{-1/2} - b_m\right) \le x\right\} = \exp\{-e^{-x}\}, \qquad (1.2)$$

где $a_m = (2\ln m)^{1/2}$, $b_m = (2\ln m)^{1/2} - (2\ln m)^{-1/2} \ln(4\pi \ln m)^{1/2}$.

Возникают вопросы:

- при каких условиях можно перейти от повторного предела (1.2) к двойному (по $m, n \to \infty$) без изменения нормировки?

- при каких условиях можно перейти к двойному пределу, возможно, с изменением нормировки или самого предельного закона?

- при каких условиях возможна сходимость к невырожденному предельному распределению (при некоторой нормировке) независимо от порядка стремления m и n к бесконечности?

Будем обозначать $F_n(x) = \mathbf{P}\left\{S_{in} n^{-1/2} \le x\right\}$.

Заметим, что $\mathbf{P}(Y_{mn} n^{-1/2} \le x) = F_n^m(x)$.

Обозначим через $f(t)$ характеристическую функцию F.

Предположим сначала, что $f(t)$ аналитична в некоторой окрестности нуля (это эквивалентно двустороннему условию Крамера $\mathbf{E}e^{tX} < \infty$, $t \in (t_1, t_2)$ для некоторых $t_1 < 0 < t_2$). Автором были получены результаты для этого случая в [29], однако впоследствии выяснилось, что они покрываются результатами [22], где были доказаны более общие теоремы (при тех же условиях), не только для максимумов, но и для m-ых левых и правых крайних членов вариационного ряда. Коротко говоря, оказывается, что при $\ln m = o(n^{1/3})$ от повторного предела (1.2) можно перейти к двойному (по $m, n \to \infty$) без изменения нормировки, а при $\ln m = o(n)$ коэффициенты нуждаются в корректировке в зависимости от характеристик F, однако при этом сохраняется асимптотика $a_{m,n} \sim b_{m,n} \sim (2\ln m)^{1/2}$, $m \to \infty$, $n \to \infty$.

Следующие теоремы дополняют результаты [22], когда аналитичность $f(t)$ не требуется.

Теорема 1.1.1. относится к случаю, когда имеется лишь конечное число моментов, и дает ограничение на рост числа сумм, при котором сохраняется классическая асимптотика. Теорема 1.1.2 утверждает существование невырожденного предельного распределения при нелинейной нормировке, но не дает их в явном виде. Далее рассматривается случай субэкспоненциальных распределений. Теоремы 1.1.3 и 1.1.4 дают предельные законы в случае правильно меняющихся хвостов с показателем α. При $0 < \alpha < 2$ по теореме 1.1.3 получаем закон Фреше, а при $\alpha > 2$ по теореме 1.1.4 можно получить как закон Фреше, так и закон Гумбеля в зависимости от соотношения скоростей роста $m, n \to \infty$, с различной нормировкой. Теорема 1.1.5 относится к случаю "вейбулловских" хвостов, и дает закон Гумбеля при неклассической нормировке.

Введем условие

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t)| < 1 \tag{1.3}$$

В [76, гл. 16, §4] отмечено, что оно верно для любого несингулярного распределения. Однако точнее будет сказать, что в лебеговом разложении F либо присутствует абсолютно непрерывная компонента, либо, если такой компоненты нет, в этом разложении присутствует (непрерывная) сингулярная компонента, для характеристической функции которой выполнено (1.3) [72, гл. 1, §5].

Введем также обозначения для моментов: $\mu_l = \mathbf{E}X^l, \quad l > 0$.

Теорема 1.1.1. *Если существуют* $\mu_3, \dots \mu_r$, $r \geq 3$, *выполнено* (1.3) *и* $m = O(n^{r/2-1})$, $m, n \to \infty$, *то*

$$\mathbf{P}\left\{a_m \left(Y_{mn} n^{-1/2} - b_m\right) \leq x\right\} \to \exp\{-e^{-x}\}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Воспользуемся разложением Эджворта [76, гл. 16, §4, теорема 3]:

$$F_n(u) = \Phi(u) + \sum_{k=3}^{r} R_k(u)\varphi(u) n^{1-k/2} + o(n^{1-r/2}), \quad n \to \infty,$$

равномерно по u, где $R_k(u)$ — многочлены k-ой степени (зависящие только от $\mu_3, \dots \mu_r$), Φ — функция стандартного нормального распределения, φ — его плотность. Напомним, что $\bar{\Phi}(u) \sim \varphi(u)/u$, $u \to \infty$.

При $u = b_m + x/a_m \sim (2\ln m)^{1/2}$, $m \to \infty$, имеем $\varphi(u) \sim ue^{-x}/m$ и

$$m \sum_{k=3}^{r} R_k(u)\varphi(u)n^{1-k/2} = O\left((\ln m)^{(r+1)/2} n^{-1/2}\right) \to 0,$$

$$|F_n^m(u) - \Phi^m(u)| \le m\,|F_n(u) - \Phi(u)| = o(mn^{1-r/2}) \to 0,$$
$$\Phi^m(u) \to \exp\{-e^{-x}\}.$$

□

Очевидно, более общий случай $\mathbf{E}X = \mu$, $\mathbf{D}X = \sigma^2$ сводится к предыдущему преобразованием

$$\hat{X}_{ij} = \frac{X_{ij} - a}{\sigma}, \quad \hat{Y}_{mn} = \frac{Y_{mn} - na}{\sigma}.$$

Откажемся теперь от любых предположений о распределении F и порядке стремления m и n к бесконечности.

Теорема 1.1.2. *Если*

$$\lim_{u,n\to\infty} \frac{1 - F^{*n}(u)}{1 - F^{*n}(u-0)} = 1, \tag{1.5}$$

то для всех $\rho \in (0, +\infty)$ *существуют* $u_{mn}(\rho)$ *такие, что*

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{P}\left\{Y_{mn} \le u_{mn}(\rho)\right\} = e^{-\rho}.$$

Доказательство. Достаточно взять в качестве $u_{mn}(\rho)$ решения неравенств

$$1 - F^{*n}(u-0) < \frac{\rho}{m} \le 1 - F^{*n}(u),$$

тогда $m(1 - F^{*n}(u_{mn}(\rho))) \to \rho$ при $m, n \to \infty$, откуда и следует утверждение теоремы. □

Условие (1.5) является обобщением известного условия существования невырожденного предельного распределения экстремумов [54, теорема 1.7.13]:

$$\lim_{x\to x_\omega - 0} \frac{1 - F(x)}{1 - F(x-0)} = 1,$$

где $x_\omega = \sup\{x : F(x) < 1\}$.

Заметим, что (1.5) заведомо выполняется, когда F непрерывна.

Зависимость $u_{mn}(\rho)$ от m, n и ρ может быть весьма сложной в общем случае, но достаточно проста в некоторых частных случаях. Например, если X имеет распределение Коши

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x,$$

то

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\pi \frac{Y_{mn}}{mn} \le x\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{x}\right\}, \quad x > 0. \tag{1.6}$$

Полученные результаты можно, в частности, применить к исследованию норм матриц $(n\times n)$ с н.о.р. случайными элементами. Действительно [1, с. 255],

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Очевидно, распределения обеих норм совпадают.

Если $\mathbf{E}|a_{ij}| = \mu$, $\mathbf{D}|a_{ij}| = \sigma^2$, то из теоремы 1.1.1 следует

$$\frac{\|A\|_1 - n\mu}{\sigma\sqrt{2n\ln n}} \xrightarrow{P} 1, \quad \frac{\|A\|_\infty - n\mu}{\sigma\sqrt{2n\ln n}} \xrightarrow{P} 1, \quad n\to\infty.$$

Далее мы изучим случай распределений F с тяжелыми хвостами, не обязательно имеющих конечные средние и дисперсии, но зато обладающих свойством субэкспоненциальности [78, 107, 117]:

$$\bar{F}^{*n}(u) \sim n\bar{F}(u), \quad u\to\infty, \quad n\ge 2, \tag{1.7}$$

где $\bar{F}(u) = 1 - F(u)$.

Свойство (1.7) может иметь место и при $n\to\infty$, если наложить определенные условия на рост u. Фактически, речь идет о больших уклонениях при нарушении условия Крамера.

Рассмотрим сначала случай, когда F имеет правильно меняющийся хвост, т.е. $\bar{F}(u) \sim u^{-\alpha}L(u)$, $u\to\infty$, где $\alpha > 0$ и $L(u)$ — медленно меняющаяся функция [76, §8.8]. Введем последовательность чисел c_n таких, что $n\bar{F}(c_n) \to 1$, $n\to\infty$. Тогда $c_n \sim n^{1/\alpha}L^*(n)$, $n\to\infty$, где $L^*(u)$ — медленно меняющаяся функция, зависящая от L [73, §1.5].

Заметим, что если асимптотическое соотношение (1.7) выполняется при $u_{m,n} = c_{mn}x$, $x > 0$, то из него следует

$$\mathbf{P}(Y_{mn}/c_{mn} \le x) \to \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad x > 0, \tag{1.8}$$

т.е. имеет место предельный закон Фреше с тем же показателем. Здесь используем тот факт, что если $k\bar{F}(u_k) \to \tau$, $k \to \infty$, то $F^k(u_k) \to e^{-\tau}$.

Далее будем предполагать для простоты, что $\mathbf{E}X = 0$ при $\alpha > 1$ и $\mathbf{D}X = 1$ при $\alpha > 2$ (в противном случае легко произвести линейную перенормировку).

Теорема 1.1.3. *Если* $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ *и* $F(-x)/\bar{F}(x) \to r \geq 0$, $x \to \infty$, *то при* $m, n \to \infty$ *верно* (1.8).

Доказательство. При условиях теоремы F принадлежит области притяжения устойчивого закона [21, 100] с показателем α, и согласно [75] соотношение (1.7) выполняется при $u/c_n \to \infty$. Для $u_{m,n} = c_{mn}x$, $x > 0$, это условие выполняется, т.к. $c_{mn}/c_n \to \infty$ при $m, n \to \infty$. □

Таким образом, в данном случае никаких ограничений на относительный рост $m, n \to \infty$ нет.

Случай $\alpha = 1$, по-видимому, требует более тонкого анализа, однако (1.8) выполняется, например, для распределения Коши, что было отмечено выше в (1.6).

Теорема 1.1.4. *Пусть* $\alpha > 2$ *и* $\mathbf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$ *для некоторого* $\delta > 0$, *тогда:*

1) если

$$\limsup_{m,n\to\infty} \frac{\ln m}{\ln n} < \frac{\alpha}{2} - 1,$$

то верно (1.4);

2) если

$$\liminf_{m,n\to\infty} \frac{\ln m}{\ln n} > \frac{\alpha}{2} - 1,$$

то верно (1.8).

Доказательство. При данных условиях по [133, теорема 1.9] (см. также [107, теорема 8.6.2]) имеет место асимптотическое соотношение

$$\bar{F}^{*n}(u) = \bar{\Phi}(u/n^{1/2})(1 + o(1)) + n\bar{F}(u)(1 + o(1)), \quad u \geq n^{1/2}, \tag{1.9}$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения, причем если $u < a(n \ln n)^{1/2}$, где $a < (\alpha - 2)^{1/2}$, то $\bar{F}^{*n}(u) \sim \bar{\Phi}(u/n^{1/2})$, а если $u > b(n \ln n)^{1/2}$, где $b > (\alpha - 2)^{1/2}$, то $\bar{F}^{*n}(u) \sim n\bar{F}(u)$, $u, n \to \infty$.

Пусть выполнено 1), тогда при всех достаточно больших m, n верно $\ln m < p \ln n$ для некоторого $0 < p < \alpha/2 - 1$. Положим $u_{m,n} = n^{1/2}(b_m + x/a_m)$, тогда $u_{m,n} \sim (2n \ln m)^{1/2}$, и при всех достаточно больших m, n получаем $u_{m,n} < a(n \ln n)^{1/2}$, $a = (2p)^{1/2} < (\alpha - 2)^{1/2}$. При этом условии из (1.9) следует (1.4).

Пусть выполнено 2), тогда при всех достаточно больших m, n верно $m > n^p$ для некоторого $p > \alpha/2 - 1$. Обозначим $s = (p+1)/\alpha$, тогда $s > 1/2$. Возьмем $0 < \varepsilon < 1 - 1/(2s)$, тогда $(1-\varepsilon)s > 1/2$. Положим $u_{m,n} = c_{mn}x$, $x > 0$, тогда $u_{m,n} \sim x(mn)^{1/\alpha}L^*(mn)$, и при всех достаточно больших m, n получаем

$$u_{m,n} > (mn)^{(1-\varepsilon)/\alpha} > n^{(1-\varepsilon)s} > b(n \ln n)^{1/2}$$

для любого $b > (\alpha - 2)^{1/2}$. При этом условии из (1.9) получаем (1.7), откуда следует (1.8). □

Замечание 1.1.1. Условие $\mathbf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$ заведомо выполняется при $\alpha > 2$, если $F(-x)/\bar{F}(x) \to r \geq 0$, $x \to \infty$. Последнее верно, например, когда случайные величины ограничены снизу ($r = 0$), что имеет место, если мы рассматриваем времена, как в [121] (нормированные средним и дисперсией).

Замечание 1.1.2. В случае степенных хвостов вида $\bar{F}(u) \sim cu^{-\alpha}$, $u \to \infty$, условие 2) удается ослабить до $m/\{n^{\alpha/2-1}(\ln n)^{\alpha/2}\} \to \infty$.

Доказательство. Обозначим $\rho(m,n) = m/\{n^{\alpha/2-1}(\ln n)^{\alpha/2}\}$. Имеем $u_{m,n} \sim x(cmn)^{1/\alpha}$, $m, n \to \infty$. Тогда при всех достаточно больших m, n для любого $0 < p < 1$ верно

$$u_{m,n} > px(cmn)^{1/\alpha} = px(c\rho(m,n))^{1/\alpha}(n \ln n)^{1/2} > b(n \ln n)^{1/2},$$

для любого $b > (\alpha - 2)^{1/2}$. □

Замечание 1.1.3. Теорема 1.1.3 обеспечивает устойчивость сходимости: в любом случае имеет место сходимость к одному предельному закону, с единой линейной нормировкой. Теорема 1.1.4, напротив, показывает неустойчивость: в зависимости от характера относительного роста $m, n \to \infty$ возможна сходимость к двум различным предельным законам (при соответствующих различных нормировках).

Как известно еще из [78], класс субэкспоненциальных распределений помимо распределений с правильно меняющимися хвостами включает в себя и некоторые распределения, чьи хвосты убывают быстрее любой степени (хотя и медленнее экспоненты, что дало название всему классу), в частности, распределение Вейбулла с показателем меньше единицы.

Рассмотрим случай распределений с "вейбулловскими" хвостами:

$$\bar{F}(x) \sim \exp\{-(x/c)^\beta\}, \quad x \to \infty, \quad 0 < \beta < 1, \quad c > 0 \tag{1.10}$$

Для таких распределений имеет место предел

$$\bar{F}(b_k^* + x/a_k^*) \to e^{-x}, \quad k \to \infty, \tag{1.11}$$

где $a_k^* = \beta(\ln k)^{1-1/\beta}/c$, $b_k^* = c(\ln k)^{1/\beta}$, $k > 1$.

Если для $u_{m,n} = b_{mn}^* + x/a_{mn}^*$ окажется выполненным (1.7), то из (1.11) будет следовать

$$\mathbf{P}\left(a_{mn}^*(Y_{mn} - b_{mn}^*) \le x\right) \to \exp\{-e^{-x}\}. \tag{1.12}$$

Пусть, как и ранее, $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$.

Как отмечено в [133, с. 747], достаточное условие выполнения (1.7) в этом случае имеет вид $u > \rho(n)n^{1/(2(1-\beta))}$, где $\rho(n)$ — некоторая функция, медленно стремящаяся к бесконечности при $n \to \infty$.

Теорема 1.1.5. *Если выполнено* (1.10)*и*

$$\liminf_{m,n\to\infty} \frac{\ln\ln m}{\ln n} > \frac{\beta}{2(1-\beta)},$$

то верно (1.12).

Доказательство. Из условия теоремы следует существование $\varepsilon > 0$ такого, что при всех достаточно больших m, n верно $\ln m > n^{(1+\varepsilon)\beta/(2(1-\beta))}$. Положим $u_{m,n} = b_{mn}^* + x/a_{mn}^*$, тогда $u_{m,n} \sim c(\ln m)^{1/\beta}$, поскольку $\ln n = o(\ln m)$, и при всех достаточно больших m верно $u_{m,n} > p(\ln m)^{1/\beta}$, где $0 < p < c$. Отсюда при всех достаточно больших m, n получаем $u_{m,n} > pn^{(1+\varepsilon)/(2(1-\beta))} > \rho(n)n^{1/(2(1-\beta))}$, что и доказывает теорему. $\square$

Замечание 1.1.4. Распределения типа (1.10), если их левые хвосты также убывают быстрее любой степени, имеют моменты любого порядка, так что по теореме 1.1.1 для них верно (1.4) при $m = O(n^s)$ с любым $s < \infty$. Ситуация в каком-то смысле обратная той, что в теореме 1.1.4: предельный закон здесь один (Гумбеля), но при различном характере относительного роста $m, n \to \infty$ требуется различная линейная нормировка.

1.2 Достаточное условие асимптотической эквивалентности в общей схеме максимумов сумм. Примеры

В данном разделе изложена общая схема максимумов сумм. Рассматривается семейство проиндексированных независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, и случайный процесс, значениями которого являются конечные классы конечных множеств индексов. Случайные величины, чьи индексы вошли в одно множество, складываются, а затем из этих сумм берется максимум. При определенных условиях этот максимум растет асимптотически эквивалентно максимуму всех случайных величин с индексами по объединению множеств.

Фундаментальной здесь является теорема 1.2.1, определяющая соответствующие достаточные условия в общем виде. Следствия 1.2.2 и 1.2.3 помогают применить ее к случаю тяжелых (правильно меняющихся) хвостов распределений слагаемых и дают ограничения на показатель хвоста (хвостовой индекс). Теоремы 1.2.2. и 1.2.3 относятся к приложениям теоремы 1.2.1 для статистик Эрдеша-Реньи и максимумов полей дробового шума с конечным радиусом влияния соответственно.

Пусть задан случайный процесс $\Upsilon = \{\Upsilon(t), t \in T\}$, значениями которого являются конечные классы конечных подмножеств $\mathbf{N}$, а параметрическое множество T содержит бесконечно много элементов.

Во избежание проблем в определении процесса с нечисловыми значениями, заметим, что множество конечных классов конечных подмножеств $\mathbf{N}$ счетно, так что можно установить взаимно однозначное соответствие между $\Upsilon(t)$ и некоторым случайным процессом $\Upsilon^*(t)$ со значениями в $\mathbf{N}$.

Пусть задано семейство $\Xi = \{\xi_{i,t}, i \in \mathbf{N}, t \in T\}$ неотрицательных случайных величин, независимых и одинаково распределенных при любом фиксированном значении параметра t.

Полагаем, что Υ и Ξ независимы.

Для любых $A \subset \mathbf{N}$, $t \in T$ обозначим максимум набора случайных величин $\{\xi_{i,t},\ i \in A\}$ через $M_t(A)$, r-ый максимум (т.е. число, стоящее r-ым с конца в вариационном ряду) через $M_t^{(r)}$, сумму через $S_t(A)$.

Пусть $U(t) = \bigcup_{A \in \Upsilon(t)} A$.

Введем случайные процессы, порожденные Υ и Ξ:

$$\zeta(t) = \sup_{A \in \Upsilon(t)} S_t(A), \quad \kappa(t) = \sup_{A \in \Upsilon(t)} |A|, \quad \nu(t) = |U(t)|,$$
$$\mu_1(t) = M_t(U(t)), \quad \mu_r(t) = M_t^{(r)}(U(t)),$$

где через $|A|$ обозначается число элементов множества A.

Предполагается, что $\nu(t) < \infty$ почти наверное (п.н.) при всех $t \in T$, откуда следует конечность п.н. всех процессов, введенных выше.

Нас интересует предельное поведение $\zeta(t)$ при $t \to \infty$.

Если $T = \mathbf{N}$ или $T = \mathbf{R}_+$, используем стандартное понятие предела действительной функции $f(t)$ при $t \to \infty$. В других случаях (например, когда процесс параметризован ограниченными измеримыми областями в конечномерном пространстве) понятие такого предела вводится дополнительно.

Пусть существует случайный процесс $\rho(t)$ со значениями в $\mathbf{Z}_+$, измеримый относительно Υ, такой, что $\rho(t) \geq 1$ при $\nu(t) \geq 1$, $\rho(t) \leq \nu(t)$ п.н. при всех $t \in T$.

Обозначим через $\pi(t)$ вероятность того, что для множества B, равновероятно выбранного среди всех подмножеств $U(t)$, состоящих из $\rho(t)$ элементов, имеет место $\sup_{A \in \Upsilon(t)} |A \cap B| > 1$.

Теорема 1.2.1. *Пусть выполнены условия:*

$$(\kappa(t) - 1)\mu_{\rho(t)}(t)/\mu_1(t) \xrightarrow{P} 0, \quad t \to \infty; \tag{1.13}$$

$$\pi(t) \to 0, \quad t \to \infty, \tag{1.14}$$

тогда верно

$$\zeta(t)/\mu_1(t) \xrightarrow{P} 1, \quad t \to \infty. \tag{1.15}$$

Доказательство. Заметим, что по определению $\zeta(t) \geq \mu_1(t)$, и следовательно, нужно получить лишь оценку для $\zeta(t)$ сверху.

При каждом $t \in T$ подмножество $I(t)$ индексов $\rho(t)$ наибольших случайных величин в наборе $\{\xi_{i,t},\ i \in U(t)\}$ оказывается выбранным равновероятно среди всех множеств такого размера в силу независимости Υ и Ξ. Таким образом, по (1.14) вероятность того, что в хоть одной сумме $S_t(A)$ окажется более одного слагаемого из $\rho(t)$ наибольших, стремится к нулю.

На множестве $\{\omega : \sup_{A \in \Upsilon(t)} |A \cap I(t)| \leq 1\}$, вероятность которого стремится к единице, имеет место равномерная оценка

$$S_t(A) \leq \mu_1(t) + (\kappa(t) - 1)\mu_{\rho(t)}(t),$$

откуда следует

$$\zeta(t) \leq \mu_1(t) + (\kappa(t) - 1)\mu_{\rho(t)}(t).$$

В силу (1.13) получаем отсюда (1.15). $\square$

Следствие 1.2.1. *Если* $\kappa(t) \xrightarrow{P} 1$ *при* $t \to \infty$, *то* (1.13) *выполняется при любом* $\rho(t)$.

Это очевидно, поскольку $\mu_{\rho(t)}(t) \leq \mu_1(t)$.

Необходимо прояснить вопрос, когда еще условия теоремы 1.2.1 могут выполняться одновременно. Для этого понадобятся следующие утверждения о свойствах порядковых статистик в случае правильно меняющихся хвостов распределений.

Пусть X_n, $n \geq 1$, независимы и имеют распределение $F(x)$ с правильно меняющимся хвостом $\bar{F}(x) \sim x^{-\alpha}L(x)$, $x \to \infty$, $\alpha > 0$, $L(x)$ — медленно меняющаяся функция [76, §8.8]. Обозначим максимум $X_1, \dots X_n$ через $\tilde{X}_n$ и r-ый максимум через $\tilde{X}_n^{(r)}$.

Введем функцию $u(y) > 0$, $y \geq 0$, такую, что

$$y\bar{F}(u(y)) \to 1, \quad y \to \infty. \tag{1.16}$$

Можно взять, например, $u(y) = \inf\{x > 1 : y\bar{F}(x) \leq 1\}$, и в силу правильного изменения хвоста будет выполняться (1.16). Тогда $u(y) \sim y^{1/\alpha}L^*(y)$, где $L^*(y)$ — медленно меняющаяся функция, зависящая от L [73, §1.5].

Заметим, что для максимумов случайных величин X_n, $n \geq 1$, имеет место невырожденный предельный закон [76, §8.8], [54, теорема 1.6.2]:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\tilde{X}_n/u(n) \leq x) = \Phi_\alpha(x), \tag{1.17}$$

где $\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$, $x > 0$ (распределение Фреше).

Лемма 1.2.1. *Пусть $r_n \sim n^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$, тогда*

$$\tilde{X}_n^{(r_n)}/u(n^{1-\gamma}) \xrightarrow{P} 1, \quad n \to \infty. \tag{1.18}$$

Доказательство. Обозначим $c_n = u(n^{1-\gamma})$. Пусть $x > 0$ и

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{I}(X_k > xc_n),$$

где $\mathbf{I}(A)$ — индикатор события A. Каждое слагаемое в S_n равно единице с вероятностью $p_n = \bar{F}(xc_n) \sim x^{-\alpha}/n^{1-\gamma}$, $n \to \infty$, независимо от других. Положим $Q_n = S_n/r_n$, тогда

$$\mathbf{E}Q_n = np_n/r_n \to x^{-\alpha}, \quad \mathbf{D}Q_n = np_n(1-p_n)/r_n^2 \to 0,$$

откуда следует $Q_n \xrightarrow{P} x^{-\alpha}$, $n \to \infty$. Воспользуемся соотношением [54, §2.2]:

$$\mathbf{P}(\tilde{X}_n^{(r_n)} \leq xc_n) = \mathbf{P}(S_n < r_n) = \mathbf{P}(Q_n < 1).$$

Рассмотрев случаи $x > 1$ и $x < 1$, получаем утверждение леммы 1.2.1. □

Следствие 1.2.2. *Пусть $0 < \delta < \gamma/\alpha$, тогда*

$$n^\delta \tilde{X}_n^{(r_n)}/\tilde{X}_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$n^\delta \frac{\tilde{X}_n^{(r_n)}}{\tilde{X}_n} = n^\delta \left(\frac{\tilde{X}_n^{(r_n)}/u(n^{1-\gamma})}{\tilde{X}_n/u(n)} \right) \frac{u(n^{1-\gamma})}{u(n)} \xrightarrow{P} 0,$$

с учетом (1.17) и (1.18). □

Далее всюду будем предполагать, что все случайные величины из Ξ имеют одинаковое распределение F, удовлетворяющее условиям

$$F(-0) = 0, \quad \bar{F}(x) \sim x^{-\alpha} L(x), \quad x \to \infty.$$

Тогда пары $(\mu_{\rho(t)}(t), \mu_1(t))$ при условиях $\rho(t) = r_n, \nu(t) = n$ распределены так же, как $(\tilde{X}_n^{(r_n)}, \tilde{X}_n)$ что открывает возможность применения теоремы 1.2.1.

Докажем еще одно простое следствие (для $T = \mathbf{N}$), которое пригодится нам в разделе 1.3.

Следствие 1.2.3. *Пусть*[1] $\nu(n) = n$, $\kappa(n) = O_p(n^\delta)$, $0 < \delta < 1$, $n \to \infty$, *и* $\pi(n) \to 0$ *при* $\rho(n) = [n^\gamma]$, $0 < \gamma < 1$, $n \to \infty$, *тогда при* $0 < \alpha < \gamma/\delta$ *верно* (1.15).

Доказательство. Из $0 < \alpha < \gamma/\delta$ следует $0 < \delta < \gamma/\alpha$. По следствию 1.2.2 получаем (1.13), и по условию верно (1.14). По теореме 1.2.1 получаем (1.15). □

Пример 1.2.1: большие скачки случайных блужданий. Пусть заданы последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин η_n и натуральных чисел l_n, $n \geq 1$. Определим

$$Z_n = \max_{0 \leq k \leq n} \sum_{i=k+1}^{k+l_n} \eta_i. \tag{1.19}$$

Асимптотическое поведение таких величин (статистик Эрдеша-Реньи) при $n \to \infty$, $l_n \to \infty$, изучалось, например, в [59, 65]. Получены невырожденные предельные законы при $l_n \sim \ln n$ и т.п. Отмечены приложения модели в математической генетике (анализ ДНК).

В [65] предполагалось, что для слагаемых выполнено правостороннее условие Крамера, т.е. $\mathbf{E} e^{h\eta_1} < \infty$ для некоторого $h > 0$. Мы рассматриваем случай правильно меняющихся хвостов, когда это условие не выполняется, и таким образом, дополняем ранее известные результаты.

---

[1] Здесь и далее $X_n = O_p(C_n)$, $n \to \infty$, означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $A > 0$, что $\mathbf{P}(|X_n/C_n| > A) < \varepsilon$ при всех достаточно больших n. В частности, для нас важно, что если для некоторой случайной последовательности Y_n верно $C_n Y_n \xrightarrow{P} 0$, то верно и $X_n Y_n \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$. Кроме того, обозначим $X_n = o_p(C_n)$, если $X_n/C_n \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$.

Приведем задачу к виду, подходящему для применения теоремы 1.2.1. В качестве параметра возьмем n, соответственно, $T = \mathbf{N}$. Определим Ξ через $\xi_{i,n} \equiv \eta_i$. Пусть $\Upsilon(n)$ состоит из множеств $A_{i,n} = \{i, \ldots, i + l_n - 1\}$, $1 \le i \le n+1$. Тогда $\zeta(n) = Z_n$, $\nu(n) = n + l_n$, $\kappa(n) = l_n$, $\mu_1(n) = \max_{1 \le i \le n+l_n} \eta_i$.

Теорема 1.2.2. *Пусть $l_n = O(n^\delta)$, $0 < \delta < 1/(1+2\alpha)$, тогда при любых $x > 0$ верно*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n/u(n) \le x) = \Phi_\alpha(x),$$

где $u(y)$ удовлетворяет (1.16).

Доказательство. Положим $\rho(n) = [n^\gamma]$, $\gamma = \alpha/(1+2\alpha)$. Из комбинаторных соображений,

$$\pi(n) \le \frac{\rho(n)(\rho(n)-1)l_n}{n + l_n - 1} \sim n^{2\gamma+\delta-1} \to 0, \quad n \to \infty,$$

так что (1.14) выполнено. Поскольку $\kappa(n) = O(n^\delta)$, $0 < \delta < \gamma/\alpha$, то по следствию 1.2.2 также верно (1.13).

Таким образом, по теореме 1.2.1 имеем $\zeta(n)/\mu_1(n) \xrightarrow{P} 1$. С учетом (1.17) отсюда следует утверждение теоремы 1.2.2, поскольку $u(n+l_n) \sim u(n)$, $n \to \infty$. $\square$

Заметим, что произвольный сдвиг (в том числе, центрирование) η_n не влияет на предельный результат. Действительно, пусть $\eta_n^* = \eta_n + a$, тогда $Z_n^* = Z_n + al_n$, но $l_n = o(u(n))$, $n \to \infty$, так что теорема 1.2.2 сохраняет силу.

Пример 1.2.2: экстремумы полей дробового шума. Покажем, как можно применить полученные результаты к исследованию супремумов дробового шума в случае конечного радиуса влияния и правильно меняющихся хвостов распределений амплитуд [31]. Напомним эту модель (в других обозначениях), попутно обобщая ее.

Рассмотрим евклидово пространство $E = \mathbf{R}^d$, $d \ge 1$, и пусть $\Sigma = \{\sigma_k\}$ — стационарное пуассоновское точечное поле в E интенсивности $\lambda > 0$. Определим случайное поле

$$\psi(s) = \bigoplus_k h_k(s - \sigma_k), \quad s \in E, \tag{1.20}$$

где h_k — независимые одинаково распределенные измеримые вполне сепарабельные неотрицательные случайные функции на E, не зависящие от Σ, и $\oplus$ — коммутативная и ассоциативная бинарная операция, такая, что $\max\{x, y\} \le x \oplus y \le x + y$ для любых $x, y \ge 0$, например, $x \oplus y = (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$, $\beta > 1$.

Величины $h_k(0)$ назовем амплитудами, а их распределение обозначим через F_0. Предположим, что функции влияния удовлетворяют следующим условиям:

1) $h_k(s) \le h_k(0)$ при всех $s \in E$;

2) $h_k(s) = 0$ при $\|s\| > 1$.

Имеется в виду, что 1)–2) выполняются п.н. для всех k.

Сделанные предположения обеспечивают существование поля дробового шума $\psi(s)$ в смысле абсолютной сходимости (1.20) п.н., поскольку в каждой точке число слагаемых конечно п.н.

Определим теперь для произвольной ограниченной измеримой области G супремум поля $\psi(s)$ по ней:

$$\varphi(G) = \sup_{s \in G} \psi(s).$$

Поле $\psi(s)$ оказывается вполне сепарабельным по построению, так что $\varphi(G)$ является случайной величиной.

Нашей задачей будет применить к $\varphi(G)$ теорему 1.2.1 (при $G \to \infty$), построив некоторые $\Upsilon = \{\Upsilon(G)\}$ и $\Xi = \{\xi_{n,G}\}$.

Положим $\xi_{n,G} \equiv h_n(0)$. Пусть $\Upsilon(G)$ состоит из всех множеств вида $A_s = \{k : \|s - \sigma_k\| \le 1\}$, $s \in G$, среди которых число различных конечно п.н. Тогда $U(G) = \{k : \sigma_k \in G_1\}$, где G_1 есть объединение области G с ее единичной окрестностью. Получаем $\varphi(G) \le \zeta(G)$.

Обозначим меру Лебега области G через $\langle G \rangle$ (во избежание путаницы с ранее введенным обозначением числа элементов множества). Далее предполагаем, что G растет таким образом, что $\langle G_1 \rangle / \langle G \rangle \to 1$ и $\langle G \rangle \to \infty$. Для этого достаточно, например, чтобы $G \to \infty$ в смысле Ван Хова [31], [68, с. 30].

Лемма 1.2.2. *Для выполнения* (1.14) *в данной модели достаточно, чтобы* $\mathbf{E}\rho^2(G) = o(\langle G \rangle)$, $G \to \infty$.

Доказательство. Выберем равновероятно множество B из $\rho(G)$ элементов $U(G)$. Пусть $C = \{\sigma_k : k \in B\}$. В силу пуассоновости точечного поля Σ точки C независимо и равномерно распределены в G_1 при известных фиксированных $\rho(G)$, $\nu(G)$. Обозначим

$$\pi_{r,m}(G) = \mathbf{P}\left(\sup_{A \in \Upsilon(G)} |A \cap B| > 1 \,\middle|\, \rho(G) = r, \nu(G) = m \right).$$

Для того чтобы в единичную окрестность некоторой точки $s \in G$ попадало хотя бы две точки C, необходимо, чтобы расстояние между этими точками было не более 2. Следовательно,

$$\pi_{r,m}(G) \leq \frac{r(r-1)}{2} \frac{V_2}{\langle G_1 \rangle},$$

где V_2 — объем шара радиуса 2 в $\mathbf{R}^d$. Поскольку $\pi(G) = \mathbf{E}\pi_{\rho(G),\nu(G_1)}(G)$, отсюда следует утверждение леммы 1.2.2. $\square$

Пусть амплитуды дробового шума имеют распределение $F_0 = F$.

Теорема 1.2.3. *При любых $\alpha > 0$, $x > 0$ верно*

$$\lim_{G \to \infty} \mathbf{P}(\varphi(G)/u(\lambda\langle G \rangle) \leq x) = \Phi_\alpha(x).$$

Доказательство. Положим $\rho(G) = [\nu(G)^\gamma]$, $0 < \gamma < 1/2$, тогда $\mathbf{E}\rho^2(G) \leq (\lambda\langle G \rangle)^{2\gamma} = o(\langle G \rangle)$, и по лемме 1.2.2 выполнено (1.14).

Используем тот факт, что $\nu(G) \sim \lambda\langle G_1 \rangle \sim \lambda\langle G \rangle$ п.н. при $G \to \infty$.

Заметим, что согласно теореме 1 из [30] в данном случае п.н. верно

$$\kappa(G) \sim \frac{\ln\langle G \rangle}{\ln\ln\langle G \rangle}, \quad G \to \infty,$$

так что $\kappa(G) = o(\langle G \rangle^\varepsilon) = o(\nu(G)^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, откуда по следствию 1.2.2 получаем (1.13).

Таким образом, по теореме 1.2.1 имеем

$$\zeta(G)/\mu_1(G) \xrightarrow{P} 1, \quad G \to \infty. \tag{1.21}$$

Заметим, что $\mu_1(G)$ распределено так же, как и $\tilde{X}_{\nu(G)}$, так что с помощью (1.17) и асимптотики $u(\nu(G)) \sim u(\lambda\langle G \rangle)$ п.н. получаем

$$\lim_{G \to \infty} \mathbf{P}(\mu_1(G)/u(\lambda\langle G \rangle) \leq x) = \Phi_\alpha(x),$$

откуда с учетом (1.21) следует

$$\lim_{G \to \infty} \mathbf{P}(\zeta(G)/u(\lambda\langle G \rangle) \leq x) = \Phi_\alpha(x). \tag{1.22}$$

Обозначим $\varphi_0(G) = \sup\{h_k(0) : \sigma_k \in G\}$, тогда $\varphi(G) \geq \varphi_0(G)$, причем согласно стохастической оценке (5) из [31] для $\varphi_0(G)$ так же выполнено

$$\lim_{G \to \infty} \mathbf{P}(\varphi_0(G)/u(\lambda\langle G \rangle) \leq x) = \Phi_\alpha(x). \tag{1.23}$$

Из (1.22) и (1.23) получаем утверждение теоремы 1.2.3. $\square$

Ранее в [31] был получен аналогичный результат для более частного случая, с использованием других методов.

1.3 Приложения к моделям информационных сетей

В работах автора [40, 45, 52] изучалось поведение максимумов суммарной активности в информационных сетях, описываемых случайными графами, с точки зрения асимптотической эквивалентности максимумам индивидуальных активностей.

Проверка наличия подобного эффекта в реальных сетях, разумеется, требует экспериментального исследования, выходящего за рамки данной работы, которая имеет теоретический характер.

Пусть каждый узел сети обладает случайной информационной активностью (интенсивностью производства информации). Предположим, что активности узлов независимы и одинаково распределены, причем их распределение F имеет тяжелый (правильно меняющийся) хвост, т.е. $\bar{F}(x) \sim x^{-a}L(x)$, $x \to \infty$, $a > 0$, где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция [76, §8.8]. Такое предположение находится в русле современных представлений о распространенности степенных законов в природе, технике и человеческой деятельности [95].

Рассмотрим также суммарную активность в узле (т.е. сумму его собственной и тех, от кого он получает информацию). Например, в Живом Журнале (livejournal.com) [19] каждый пользователь может оставлять свои записи и читать записи друзей, объединенные для удобства в общую "ленту друзей" (френдленту). Для простоты предполагаем, что индивидуальная активность и число соседей независимы. Нас интересует вопрос, когда максимум суммарных активностей растет асимптотически так же, как и максимум индивидуальных активностей узлов. Это означает, что большие значения обычно достигаются не за счет активности большого числа узлов, а за счет отдельных узлов с большой активностью. В этом случае для максимумов легко выводится предельный закон Фреше $\Phi_a(x) = \exp\{-x^{-a}\}$, $x > 0$ [76, §8.8].

При изучении случайных графов используются различные модели: классические, исследование которых восходит к работе [108], и степенные (power law, scale-free), активное исследование которых в последние десятилетия было инициировано работой [94] (и которые в отечественной литературе также называют графами Интернет-типа или Интернет-графами).

В степенных графах предельное распределение степени вершины имеет вид $p_k \sim ck^{-\beta}$, $\beta > 0$. Оказалось, что подобные модели хорошо описывают многие информационные, технические и биологические системы.

Однако следует отметить, что к одному и тому же предельному распределению могут приводить самые разные алгоритмы построения, в то время как другие асимптотические свойства графов могут оказаться зависимы от выбора модели.

Будем рассматривать сети из n узлов, затем устремляя n к бесконечности. Обозначим через $M(n)$ максимум суммарных активностей, а через $M_0(n)$ — максимум индивидуальных активностей узлов. Нашей задачей будет определить условия, при которых верно

$$M(n)/M_0(n) \xrightarrow{P} 1, \quad n \to \infty. \tag{1.24}$$

Введем положительную функцию $v(r)$, такую, что $r\bar{F}(v(r)) \to 1$, $r \to \infty$. Заметим, что $v(r)$ заведомо существует и правильно меняется с показателем $1/a$, т.е. $v(r) \sim r^{1/a}L_2(r)$, $r \to \infty$, где $L_2(r)$ — медленно меняющаяся функция [73, §1.5].

Тогда имеет место предельный закон для максимумов независимых случайных величин в случае правильно меняющихся хвостов [76, §8.8]:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_0(n)/v(n) \le x) = \Phi_a(x), \quad x > 0,$$

что в сочетании с (1.24) дает

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M(n)/v(n) \le x) = \Phi_a(x), \quad x > 0. \tag{1.25}$$

В этом и заключается польза соотношения (1.24).

Адаптируем общую схему из раздела 1.2 к изучению случайных графов и гиперграфов. Рассмотрим процесс Υ с дискретным временем, соответствующим числу вершин n. Случайные величины $\xi_{i,n}$, $1 \le i \le n$, описывают индивидуальные активности. Множества A представляют собой вершины с их соседями (теми, от кого получают информацию). При этом какие-то из наборов вершин могут совпадать и тогда порождают одно множество. Очевидно, $\nu(n) = n$, $\kappa(n) \le n$. Последовательность $\rho(n)$ далее будем полагать детерминированной. Кроме того, в наших обозначениях $M(n) = \zeta(n)$, $M_0(n) = \mu_1(n)$, $a = \alpha$ и (1.15) эквивалентно (1.24).

Как уже было отмечено, описанию информационных сетей с помощью случайных графов посвящена обширная литература, однако задача изучения максимумов суммарных активностей является новой.

Дальнейшие теоремы посвящены установлению верхних границ для хвостового индекса a в различных моделях информационных сетей, в зависимости от их параметров. Теорема 1.3.1.1 относится к модели степенного графа $P_{\alpha,\beta}$ с детерминированными числами соседей [87]. Теорема 1.3.2.1 относится к модели со степенным законом числа входящих соседей. Теоремы 1.3.3.1, 1.3.3.2 и 1.3.3.3 относятся к моделям со случайными весами (модели 1, 2 и 3 соответственно). Теорема 1.3.3.4 описывает предельные распределения степеней вершин (модель 1), входящих степеней (модель 2), размеров сообществ (модель 3). Все модели, кроме $P_{\alpha,\beta}$, являются авторскими, созданными по мотивам [66, 119].

1.3.1 Модель $P_{\alpha,\beta}$

Рассмотрим случай, когда модель описывается степенным случайным графом $P_{\alpha,\beta}$, предложенным в [87]. Сначала предполагается, что число вершин степени k составляет $\lfloor e^\alpha/k^\beta \rfloor$, $\alpha, \beta > 0$, $k \geq 1$. Далее вводится равномерное распределение на множестве графов, удовлетворяющих этому условию. При этом допускаются петли и кратные ребра. При $\beta > 1$ число вершин n связано с параметрами соотношением $n \sim \zeta(\beta)e^\alpha$, $\alpha \to \infty$, где $\zeta(r) = 1/\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}$ — дзета-функция Римана. Асимптотические свойства графа не меняются, если параметризовать его числом вершин при $n \to \infty$.

Обозначим
$$Q(n) = \mathbf{E} \sum_{A \in \Upsilon(n)} |A|(|A| - 1).$$

Лемма 1.3.1.1. *В данной модели*
$$\pi(n) \leq \frac{\rho(n)(\rho(n) - 1)}{2n(n-1)}\, Q(n).$$

Доказательство. Вероятность $\pi(n)$ не больше суммы вероятностей для каждой пары элементов из B оказаться в одном множестве A. Таких пар всего $\rho(n)(\rho(n) - 1)/2$, а вероятность попадания двух элементов в одно множество A, при условии, что его размер k, составляет $k(k-1)/(n(n-1))$. Суммируя по всем $A \in \Upsilon(n)$ и усредняя, получаем утверждение леммы. □

Лемма 1.3.1.2. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) $Q(n) = O(n^b)$, $n \to \infty$, $0 < b < 2$;
2) $\kappa(n) = O_p(n^\delta)$, $n \to \infty$, $\delta > 0$;
3) $a < (2 - b)/(2\delta)$.
Тогда верно (1.24).

Доказательство. Можно выбрать $\gamma \in (0, 1)$ так, чтобы выполнялось неравенство $a\delta < \gamma < (2-b)/2$. Положим $\rho(n) = [n^\gamma]$, тогда по следствию 1.2.2 получаем (1.13), а по лемме 1.3.1.1 — (1.14), так что условия теоремы 1.2.1 выполняются и верно соотношение (1.15), эквивалентное (1.24). $\square$

Теорема 1.3.1.1. *Если сеть описывается случайным графом $P_{\alpha,\beta}$ с $\beta > 3/2$, то (1.24) выполняется при $a < \beta - 3/2$, если $3/2 < \beta < 3$, и при $\alpha < \beta/2$, если $\beta \geq 3$.*

Доказательство. По построению, максимальная степень вершины $\kappa(n) = \lfloor e^{\alpha/\beta} \rfloor = O(n^{1/\beta})$, $n \to \infty$. Имеем

$$Q(n) \sim \sum_{k=1}^{\lfloor e^{\alpha/\beta} \rfloor} k(k+1)\lfloor e^\alpha / k^\beta \rfloor = \begin{cases} O(n^{3/\beta}), & 1 < \beta < 3; \\ O(n \ln n), & \beta = 3; \\ O(n), & \beta > 3. \end{cases}$$

При $3/2 < \beta < 3$ применяем лемму 1.3.1.2 с $b = 3/\beta$, $\delta = 1/\beta$, и получаем достаточное условие $a < \beta - 3/2$ для выполнения (1.24). При $\beta = 3$ применяем лемму 1.3.1.2 с $b = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а при $\beta > 3$ с $b = 1$, и в обоих случаях $\delta = 1/\beta$, так что получаем достаточное условие $a < \beta/2$. $\square$

На рис. 1.1 представлена граница для $a(\beta)$.

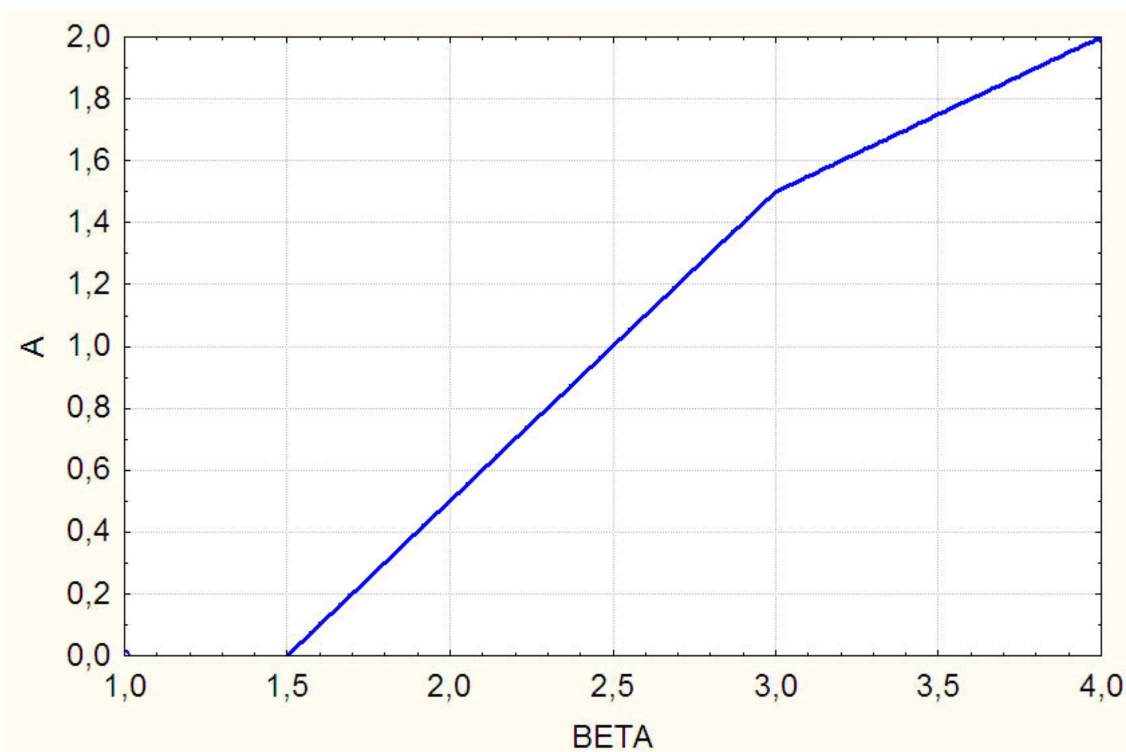

Рис. 1.1: граница для $a(\beta)$

Поскольку мы пользуемся лишь достаточными условиями, не исключено, что эти ограничения в будущем могут быть ослаблены.

Следует отметить, что при изучении Всемирной Паутины (World-Wide Web) возникает проблема, связанная с различием входящих и исходящих ссылок, причем оценки β для них получаются разными, но обычно в диапазоне от 2 до 3 (см. например, [88]). Представляется, что более точным (однако и более сложным) было бы описание сетей ориентированными случайными графами. Аналогично, в Живом Журнале следовало бы различать "друзей" (чьи записи читаются пользователем) и "взаимных друзей" (которые также читают записи пользователя). Недавние исследования в кириллическом сегменте Живого Журнала [19] показывают, что около 80% дружеских связей взаимны, и дают оценку $\beta \approx 3$.

1.3.2 Модель со степенным законом числа входящих соседей

Рассмотрим теперь модель ориентированного случайного графа, где направления ребер соответствуют направлениям передачи информации. Пусть имеется n вершин и заданы независимые неотрицательные целочисленные случайные величины $K_1, \ldots, K_n$, имеющие одинаковое распределение, заданное вероятностями $p_k \sim ck^{-\beta}$, $k \to \infty$, $\beta > 1$. Положим $D_i = \min\{K_i, n-1\}$. Для i-й вершины выберем случайным образом (равновероятно и независимо от выбора для других вершин) D_i различных вершин из числа остальных (кроме i-й) и выпустим из них ребра, направленные в i-ю вершину. Полученный в результате граф можно отнести к степенным в том смысле, что входящие степени вершин распределены асимптотически по степенному закону. Суммарной активностью в узле в данном случае будем считать сумму собственной активности узла и всех узлов, из которых в него поступает информация (его входящих соседей).

К сожалению, метод, использованный в разделе 1.3.1, здесь не работает при $\beta < 3$, т. к. второй момент входящей степени вершины тогда растет слишком быстро при $n \to \infty$. Эта проблема решается с помощью урезания. Получаются более сильные ограничения на параметры, что связано с более быстрым ростом максимальной (входящей) степени вершины в графе. Однако поскольку используются лишь достаточные условия, не исключено, что эти ограничения в будущем могут быть ослаблены.

Обозначим через A_i множество из индекса i и индексов входящих соседей i-го узла, тогда набор множеств A получается из набора $A_1, \ldots, A_n$ удалением повторов (если они есть). Имеем $|A_i| = D_i + 1$ и $\kappa(n) = \max_{1 \le i \le n} D_i + 1$. Очевидно, $|\Upsilon(n)| \le n$ и $\nu(n) = n$.

Обозначим $Q(n,m) = n\mathbf{E}\left((D+1)D\mathbf{I}\{D \le m-1\}\right)$, где $D \stackrel{d}{=} D_1$.

Лемма 1.3.2.1. *При $n > 2$ и $\rho(n) < n$ верно неравенство*

$$\pi(n) \le \frac{\rho(n)(\rho(n)-1)}{2(n-1)(n-2)}\, Q(n,m) + \mathbf{P}(\kappa(n) > m).$$

Доказательство. Событие $\{\sup_{A\in\Upsilon(t)} |A \cap B| > 1\}$ представляет собой объединение событий $\{|A_i \cap B| > 1\}$, $1 \le i \le n$. Пусть для простоты $B = \{1, 2, \ldots, \rho(n)\}$ (в противном случае можно перенумеровать A_i). Зафиксируем входящие степени вершин $d_1, \ldots, d_n$. Тогда для $1 \le i \le \rho(n)$ один элемент множества B заведомо принадлежит A_i (а именно, индекс i), а любой другой принадлежит с вероятностью $d_i/(n-1)$. Для $\rho(n)+1 \le i \le n$ любая пара индексов из B принадлежит A_i с вероятностью $d_i(d_i-1)/(n-1)(n-2))$, а всего таких пар $\rho(n)(\rho(n)-1)/2$. Суммируя вероятности, получаем оценку сверху

$$\frac{\rho(n)-1}{n-1}\sum_{i=1}^{\rho(n)} d_i + \frac{\rho(n)(\rho(n)-1)}{2(n-1)(n-2)} \sum_{i=\rho(n)+1}^{n} d_i(d_i-1).$$

Обозначим $q_1 = \mathbf{E}(D\mathbf{I}\{D \le m-1\})$, $q_2 = \mathbf{E}(D(D-1)\mathbf{I}\{D \le m-1\})$. Усредняя по наборам входящих степеней вершин в области $\kappa(n) \le m$, получаем оценку сверху

$$\frac{\rho(n)-1}{n-1}\rho(n)q_1 + \frac{\rho(n)(\rho(n)-1)}{2(n-1)(n-2)}(n-\rho(n))q_2 \le$$
$$\le \frac{\rho(n)(\rho(n)-1)}{2(n-1)(n-2)} n(2q_1+q_2) = \frac{\rho(n)(\rho(n)-1)}{2(n-1)(n-2)}\, Q(n,m).$$

Учитывая также вероятность события $\{\kappa(n) > m\}$, получаем утверждение леммы. □

Лемма 1.3.2.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $m \sim n^\delta$, $n \to \infty$, $\delta > 0$;

2) $Q(n,m) = O(n^b)$, $n \to \infty$, $0 < b < 2$;

3) $\kappa(n) = o_p(m)$, $n \to \infty$;

4) $a < (2-b)/(2\delta)$.

Тогда верно (1.24).

Доказательство. Можно выбрать $\gamma \in (0,1)$ так, чтобы выполнялось неравенство $a\delta < \gamma < (2-b)/2$. Положим $\rho(n) = [n^\gamma]$, тогда по следствию 1.2.2 получаем (1.13), а по лемме 1.3.2.1 — (1.14), так что условия теоремы 1.2.1 выполняются и верно соотношение (1.15), эквивалентное (1.24). □

Теорема 1.3.2.1. *Соотношение* (1.24) *выполняется при* $a < \beta - 2$, *если* $2 < \beta < 3$, *и при* $a < (\beta - 1)/2$, *если* $\beta \geq 3$.

Доказательство. Поскольку $p_k \sim ck^{-\beta}$, $k \to \infty$, то хвост распределения имеет асимптотику $\bar{F}_K(k) \sim c_1 k^{-(\beta-1)}$. Отсюда получаем $\kappa(n) = O_p(n^{1/(\beta-1)})$, $n \to \infty$, и, следовательно, $\kappa(n) \sim o_p(m)$ при любом $\delta = (1+\varepsilon)/(\beta-1)$, $\varepsilon > 0$. Имеем

$$Q(n,m) = n\sum_{k=1}^{m-1}(k+1)kp_k = \begin{cases} O(n^{1+\delta(3-\beta)}), & 1 < \beta < 3; \\ O(n \ln n), & \beta = 3; \\ O(n), & \beta > 3. \end{cases}$$

При $2 < \beta < 3$ применяем лемму 1.3.2.2 с $b = 2\delta > 1+\delta(3-\beta)$ и, устремляя ε к нулю, получаем достаточное условие $a < \beta - 2$ для выполнения (1.24). При $\beta \geq 3$ применяем лемму 1.3.2.2 с $b = 1 + \varepsilon$ и аналогично получаем достаточное условие $a < (\beta - 1)/2$. □

На рис. 1.2 представлена граница для $a(\beta)$.

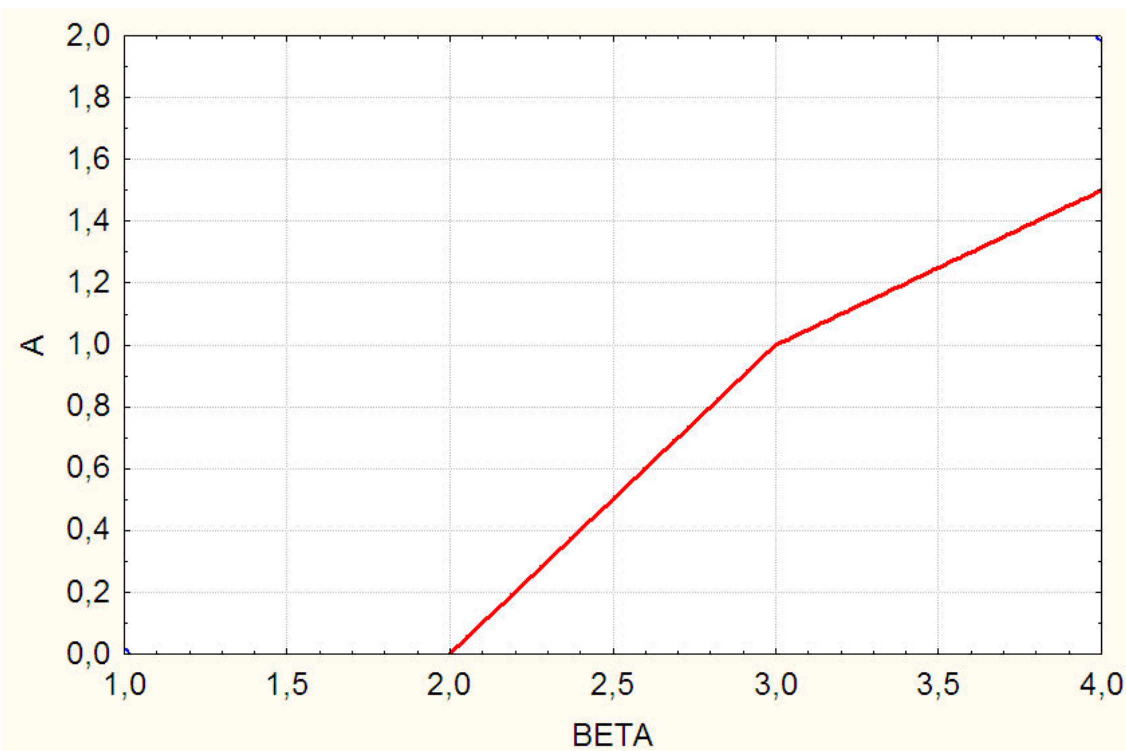

Рис. 1.2: граница для $a(\beta)$

1.3.3 Модели со случайными весами

Рассмотрим модели информационных сетей со случайными весами.

Модель 1 представляет собой неориентированный случайный граф, являющийся обобщением классической модели Эрдеша-Реньи. Предполагается, что узлы имеют независимые и одинаково распределенные веса, и связи между узлами устанавливаются с вероятностями, асимптотически пропорциональными произведению соответствующих весов. Похожие модели рассматривались в [119, гл. 6] как обобщенные случайные графы со случайными весами (см. там же обзор литературы). Применительно к социальным сетям веса могут иметь смысл меры общительности пользователей. При этом выбором распределения весов можно широко варьировать предельное распределение степеней вершин, от классического пуассоновского до степенного закона.

Можно сказать, что в этой модели взаимная связь для двусторонней передачи информации образуется между пользователями по их взаимному согласию, в противном случае информация не передается ни в одну сторону.

Модель 2 представляет собой ориентированный случайный граф. Предполагается, что узлы имеют независимо и одинаково распределенные веса, определяющие вероятности присоединения данного узла к другим для получения информации. Такие веса могут иметь смысл меры любознательности пользователей. При этом обратная связь (присоединение в ответ) не учитывается.

В этом случае может иметь место односторонняя передача информации. Практически, например, в ЖЖ наблюдается промежуточная ситуация между моделями 1 и 2: часть информации доступна всем, а часть только друзьям (входящим соседям).

Модель 3 представляет собой случайный гиперграф. Предполагается, что в сети есть узлы и сообщества. Сообщества имеют независимо и одинаково распределенные веса, определяющие вероятности присоединения к ним каждого узла, независимо от других соединений. Такие веса могут иметь смысл меры популярности сообщества. Здесь мы, в отличие от предыдущих моделей, изучаем максимумы суммарных активностей по сообществам и индивидуальных активностей по узлам. Таким образом, в качестве ребер гиперграфа берутся множества вершин, вошедших в сообщества, и еще множества, содержащие по одной вершине.

В данном случае обозначим через $M(n)$ максимум суммарных активностей (в моделях 1 и 2) или максимум по сообществам и узлам (в модели 3). Нашей задачей будет определить условия, при которых верно (1.24).

Множества A в в модели 1 представляют собой вершины с их соседями (какие-то из наборов могут совпадать и тогда порождают одно множество); $\kappa(n)$ равно максимальной степени вершины графа плюс один. В модели 2 это относится к входящим соседям и входящей степени вершины. В модели 3 множества A — это гиперребра: сообщества и множества $\{1\}$, $\{2\}$, …, $\{n\}$.

Обозначим через $\mathrm{MBin}(n, \xi)$ смешанное биномиальное распределение, которое возникает при рандомизации обычного биномиального распределения по случайной вероятности успеха $\xi \in [0, 1]$ при фиксированном n. Тогда для $X \sim \mathrm{MBin}(n, \xi)$ имеем:

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{E}\left(C_n^k \xi^k (1-\xi)^{n-k}\right), \quad 0 \le k \le n.$$

Такого типа распределениями описываются степени вершин (в моделях 1 и 2) и размеры сообществ (в модели 3).

Далее нам понадобится еще следующие леммы.

Лемма 1.3.3.1. *Пусть* $X \sim \mathrm{MBin}(n, \xi)$*, где* $n\xi \le \eta$ *п.н. и* $\mathbf{E}\eta^\beta < \infty$ *при некотором* $\beta \ge 1$*. Тогда* $\mathbf{E}X^\beta \le C(\beta)\mathbf{E}\max\{\eta, 1\}^\beta < \infty$*.*

Доказательство. Пусть l — натуральное число, $l \ge \beta$, и пусть $Y \sim \mathrm{Bin}(\mathrm{n,p})$, тогда производящая функция моментов $f_Y(t) = \mathbf{E}e^{tY} = (pe^t + q)^n$, и можно найти $\mathbf{E}Y^l$ через l-ую производную:

$$f_Y^{(l)}(t) = \sum_{j=1}^{\min\{l,n\}} c_{j,l} n(n-1)\dots(n-j+1)(pe^t+q)^{n-j}(pe^t)^j,$$

где $c_{j,l}$ — некоторые коэффициенты (в соответствии с формулой Фаа ди Бруно), откуда

$$\mathbf{E}Y^l = f_Y^{(l)}(0) = \sum_{j=1}^{\min\{l,n\}} c_{j,l} n(n-1)\dots(n-j+1)p^j \le \sum_{j=1}^{l} c_{j,l}(np)^j.$$

Обозначив $C(l) = \sum_{j=0}^{l} c_{j,l}$, получаем $\mathbf{E}Y^l \le C(l)\max\{np, 1\}^l$. Далее, используя неравенство Ляпунова, получаем $\mathbf{E}Y^\beta \le (\mathbf{E}Y^l)^{\beta/l}$, и если положить $C(\beta) = C(l)^{\beta/l}$, имеем $\mathbf{E}Y^\beta \le C(\beta)\max\{np, 1\}^\beta$. Поэтому

$$\mathbf{E}X^\beta = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Y^\beta | p = \xi)) \le C(\beta)\mathbf{E}\max\{n\xi, 1\}^\beta \le C(\beta)\mathbf{E}\max\{\eta, 1\}^\beta.$$

Можно также использовать оценку

$$\mathbf{E}\max\{\eta, 1\}^\beta \le \mathbf{E}(\eta+1)^\beta \le ((\mathbf{E}\eta^\beta)^{1/\beta} + 1)^\beta < \infty,$$

следующую из неравенства Минковского. □

Лемма 1.3.3.2. *Пусть $\xi \geq 0$ п.н. и $\mathbf{E}\xi^\beta < \infty$, $\beta > 0$, тогда для любых $s > 0$ и $\alpha \geq \beta$ верно $\mathbf{E}\min\{1, \xi^\alpha n^{-s}\} \leq n^{-\beta s/\alpha}\mathbf{E}\xi^\beta$, $n \geq 1$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\min\{1, \xi^\alpha n^{-s}\} = n^{-s}\mathbf{E}\min\{n^s, \xi^\alpha\} = n^{-s}\mathbf{E}\min\{n^s, \xi^{\alpha-\beta}\xi^\beta\} \leq \\
&\leq n^{-s}\mathbf{E}\min\{n^s, n^{(\alpha-\beta)s/\alpha}\xi^\beta\} \leq n^{-\beta s/\alpha}\mathbf{E}\xi^\beta.
\end{aligned}$$

□

Вернемся к нашим моделям.

Выберем случайным образом $\rho(n) = [n^\gamma]$ вершин из n имеющихся, и пометим их. Тогда вероятность $\pi(n)$ в модели 1 — это вероятность, что хотя бы две из помеченных вершин окажутся на расстоянии не больше 2 (они соседки друг другу или обе соседки третьей), в модели 2 — что одна окажется входящей соседкой другой или они обе входящими соседками третьей, в модели 3 — что они входят в одно сообщество.

Число всех пар помеченных вершин равно $\rho(n)(\rho(n)-1)/2 = O(n^{2\gamma})$, $n \to \infty$.

Теперь докажем теоремы для трех упомянутых моделей.

В модели 1 предполагаем, что заданы случайные величины w_i, $1 \leq i \leq n$, независимые и одинаково распределенные как $W \geq 0$ (и не зависящие от индивидуальных активностей). Пусть существует $\beta \geq 1$ такое, что $\mathbf{E}W^\beta < \infty$ (заметим, что здесь смысл параметра β иной, чем в предыдущих разделах).

Обозначим $p_i = \varphi(w_i n^{-s/2})$, где $0 < s \leq 1$, и для функции φ на $\mathbf{R}_+$ верно $0 \leq \varphi(x) \leq \min\{1, x\}$, $\varphi(x) \sim x$, $x \to 0$. В качестве φ можно взять, например, $\min\{1, x\}$, $x/(1+x)$ или $1 - e^{-x}$.

Пусть при известных w_i, $1 \leq i \leq n$, каждая пара вершин i и j соединяется ребром с вероятностью $p_i p_j$ независимо от других пар.

В частности, при $W \equiv c > 0$ получаем классическую модель случайного графа Эрдеша-Реньи $G(n,p)$ с $p \sim c^2 n^{-s}$, $n \to \infty$.

Теорема 1.3.3.1. *В модели 1 верно* (1.24) *при $\beta \geq 2$, если*

$$a < \frac{2s-1}{2(1-(s-1/\beta)_+)}, \quad s > 1/2,$$

и при $1 \leq \beta < 2$, если

$$a < \frac{(1+\beta/2)s-1}{2(1-(s-1/\beta)_+)}, \quad s > \frac{1}{1+\beta/2}.$$

Доказательство. Обозначим через C_{ij} событие, заключающееся в том, что вершины i и j находятся на расстоянии не больше 2 (они соседки друг другу или обе соседки третьей). Тогда

$$\mathbf{P}(C_{ij}|p_1,\dots p_n) \le p_i p_j + p_i p_j \sum_{k\notin\{i,j\}} p_k^2.$$

Предположим сначала, что $\beta \ge 2$, тогда усредняя и оценивая сверху, получаем

$$\mathbf{P}(C_{ij}) \le \frac{(\mathbf{E}W)^2}{n^s} + (n-2)\frac{(\mathbf{E}W)^2\mathbf{E}W^2}{n^{2s}} = O(n^{-(2s-1)}).$$

Следовательно, $\pi(n) = O(n^{2\gamma-(2s-1)})$, и при любом $\gamma < (2s-1)/2$ верно $\pi(n) \to 0$, $n \to \infty$.

Пусть теперь $1 \le \beta < 2$, тогда $\mathbf{E}p_k^2 \le n^{-\beta s/2}\mathbf{E}W^\beta$ по лемме 1.3.3.2 и

$$\mathbf{P}(C_{ij}) \le \frac{(\mathbf{E}W)^2}{n^s} + (n-2)\frac{(\mathbf{E}W)^2\mathbf{E}W^\beta}{n^{(1+\beta/2)s}} = O(n^{-((1+\beta/2)s-1)}).$$

Следовательно, $\pi(n) = O(n^{2\gamma-((1+\beta/2)s-1)})$, и при любом $\gamma < ((1+\beta/2)s-1)/2$ верно $\pi(n) \to 0$, $n \to \infty$.

В модели 1 степень i-ой вершины D_i при известном p_i имеет распределение $\mathrm{MBin}(n-1, p_i\mathbf{E}p)$, причем $np_i\mathbf{E}p \le n^{1-s}w_i\mathbf{E}W$ п.н. Отсюда по лемме 1.3.3.1 получаем $\mathbf{E}D^\beta = O(n^{(1-s)\beta})$, $n \to \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}(\kappa(n) > n^\delta + 1) \le n\mathbf{P}(D > n^\delta) \le n\mathbf{E}D^\beta/n^{\beta\delta} = O(n^{1+(1-s-\delta)\beta}).$$

Поэтому $\kappa(n) = o_p(n^\delta)$, $n \to \infty$ при любом $\delta > 1-s+1/\beta$. Но кроме того, $\kappa(n) \le n$, так что достаточно $\delta > \min\{1-s+1/\beta, 1\} = 1-(s-1/\beta)_+$.

Полагая $a < \gamma/\delta$ и выбирая γ и δ сколь угодно близкими к их найденным границам, получаем утверждения теоремы, по следствию 1.2.3. □

На рис. 1.3 представлена граница для $a(\beta)$ при $s = 1$ сплошной линией и при $s = 0,9$ пунктиром.

В модели 2 мы делаем те же предположения о весах w_i, $1 \le i \le n$, но теперь $p_i = \varphi(w_i n^{-s})$, $0 < s \le 1$. Пусть при известных w_i, $1 \le i \le n$, в i-ую вершину входит ребро из любой другой вершины с вероятностью p_i независимо от других ребер.

Теорема 1.3.3.2. *В модели 2 верно* (1.24) *при* $\beta \ge 2$, *если*

$$a < \frac{2s-1}{2(1-(s-1/\beta)_+)}, \quad s > 1/2,$$

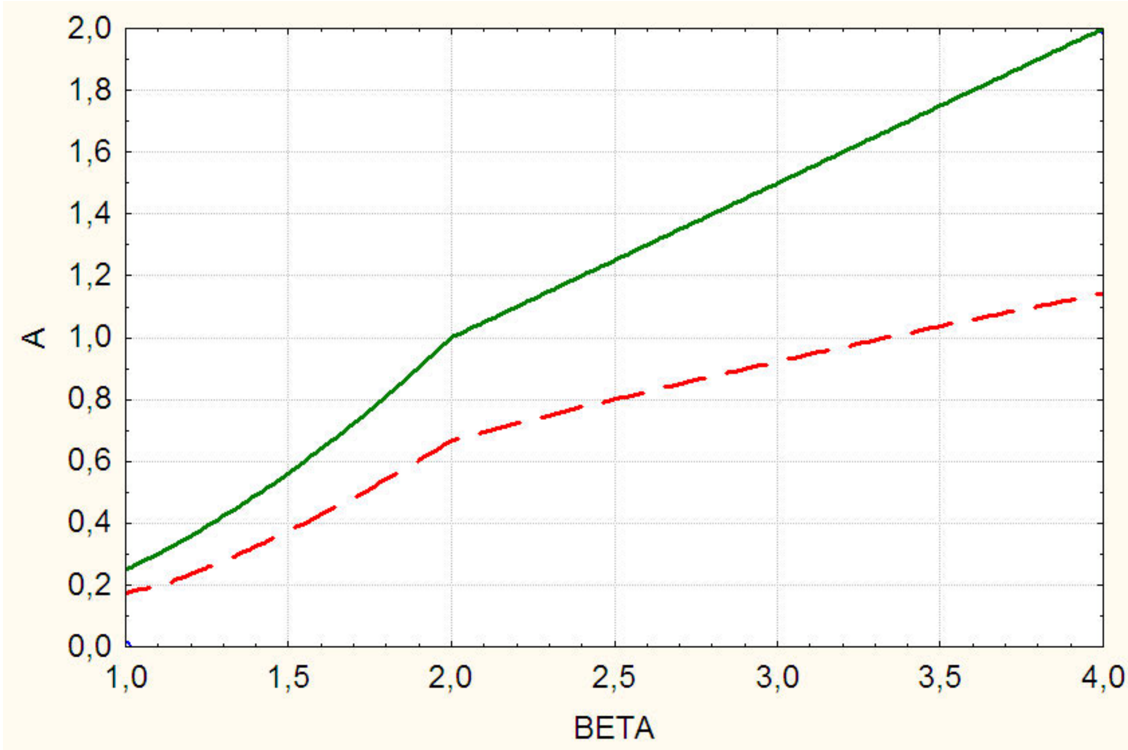

Рис. 1.3: граница для $a(\beta)$ в модели 1

и при $1 \le \beta < 2$, *если*

$$a < \frac{\beta s - 1}{2(1 - (s - 1/\beta)_+)}, \quad s > 1/\beta,$$

Доказательство. Обозначим через C_{ij} событие, заключающееся в том, что из вершин i и j одна является входящей соседкой другой или они обе входящими соседками третьей. Тогда

$$\mathbf{P}(C_{ij}|p_1, \dots p_n) \le p_i + p_j + \sum_{k \notin \{i,j\}} p_k^2.$$

Предположим сначала, что $\beta \ge 2$, тогда усредняя и оценивая сверху, получаем

$$\mathbf{P}(C_{ij}) \le \frac{2\mathbf{E}W}{n^s} + (n-2)\frac{\mathbf{E}W^2}{n^{2s}} = O(n^{-(2s-1)}).$$

Следовательно, $\pi(n) = O(n^{2\gamma-(2s-1)})$, и при любом $\gamma < (2s-1)/2$ верно $\pi(n) \to 0$, $n \to \infty$.

Пусть теперь $1 \le \beta < 2$, тогда $\mathbf{E}p_k^2 \le n^{-\beta s}\mathbf{E}W^\beta$ по лемме 1.3.3.2 и

$$\mathbf{P}(C_{ij}) \le \frac{2\mathbf{E}W}{n^s} + (n-2)\frac{\mathbf{E}W^\beta}{n^{\beta s}} = O(n^{-(\beta s-1)}).$$

Следовательно, $\pi(n) = O(n^{2\gamma-(\beta s-1)})$, и при любом $\gamma < (\beta s - 1)/2$ верно $\pi(n) \to 0$, $n \to \infty$.

В модели 2 входящая степень i-ой вершины D_i при известном p_i имеет распределение $\mathrm{MBin}(n-1, p_i)$, причем $np_i \le n^{1-s}w_i$ п.н. Отсюда по лемме 1.3.3.1 получаем $\mathbf{E}D^\beta = O(n^{(1-s)\beta})$, $n \to \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}(\kappa(n) > n^\delta + 1) \le n\mathbf{P}(D > n^\delta) = O(n^{1+(1-s-\delta)\beta}).$$

Поэтому $\kappa(n) = o_p(n^\delta)$, $n \to \infty$ при любом $\delta > \min\{1 - s + 1/\beta, 1\}$.

Полагая $a < \gamma/\delta$ и выбирая γ и δ сколь угодно близкими к их найденным границам, получаем утверждение теоремы, по следствию 1.2.3. $\square$

На рис. 1.4 представлена граница для $a(\beta)$ при $s = 1$ сплошной линией и при $s = 0,9$ пунктиром.

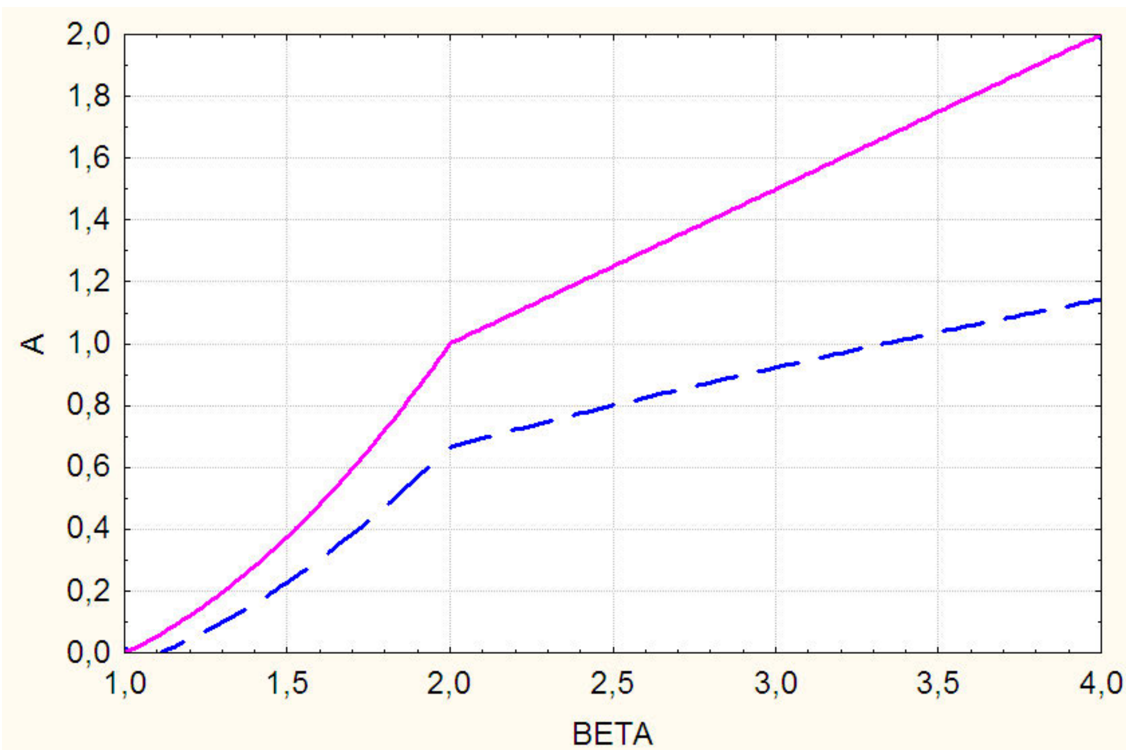

Рис. 1.4: граница для $a(\beta)$ в модели 2

В модели 3 при тех же предположениях о w_i и p_i, $1 \le i \le n$, что и в модели 2 (только эти величины уже относятся не к узлам, а к сообществам), полагаем, что существуют m сообществ, и $m = O(n^r)$, $n \to \infty$, $0 \le r \le 1$. Каждая вершина входит в i-ое сообщество (гиперребро) с вероятностью p_i независимо от членства в других сообществах и поведения других вершин. Кроме того, введем дополнительные гиперребра $\{1\}$, $\{2\}$, $\dots$, $\{n\}$ для описания отдельных вершин.

Теорема 1.3.3.3. *В модели 3 верно* (1.24) *при* $\beta \geq 2$*, если*

$$a < \frac{2s-r}{2(1-(s-r/\beta)_+)}, \quad s > r/2,$$

и при $1 \leq \beta < 2$*, если*

$$a < \frac{\beta s - r}{2(1-(s-r/\beta))}, \quad s > r/\beta.$$

Доказательство. Обозначим через C_{ij} событие, заключающееся в том, что вершины i и j входят в одно сообщество (гиперребро). В гиперребра единичного размера они вместе входить не могут. Тогда

$$\mathbf{P}(C_{ij}|p_1, \dots p_m) \leq \sum_{k=1}^{m} p_k^2.$$

Предположим сначала, что $\beta \geq 2$, тогда усредняя и оценивая сверху, получаем

$$\mathbf{P}(C_{ij}) \leq m \frac{\mathbf{E}W^2}{n^{2s}} = O(n^{-(2s-r)}).$$

Следовательно, $\pi(n) = O(n^{2\gamma-(2s-r)})$, и при $\gamma < (2s-r)/2$ верно $\pi(n) \to 0$, $n \to \infty$.

Пусть теперь $1 \leq \beta < 2$, тогда $\mathbf{E}p_k^2 \leq n^{-\beta s}\mathbf{E}W^\beta$ по лемме 1.3.3.2, откуда

$$\mathbf{P}(C_{ij}) \leq m \frac{\mathbf{E}W^\beta}{n^{\beta s}} = O(n^{-(\beta s-r)}).$$

Следовательно, $\pi(n) = O(n^{2\gamma-(\beta s-r)})$, и при любом $\gamma < (\beta s - r)/2$ верно $\pi(n) \to 0$, $n \to \infty$.

В модели 3 размер i-го сообщества D_i при известном p_i имеет распределение $\mathrm{MBin}(n, p_i)$, причем $np_i \leq n^{1-s}w_i$ п.н. Отсюда по лемме 1.3.3.1 получаем $\mathbf{E}D^\beta = O(n^{(1-s)\beta})$, $n \to \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}(\kappa(n) > n^\delta + 1) \leq m\mathbf{P}(D > n^\delta) = O(n^{r+(1-s-\delta)\beta}).$$

Поэтому $\kappa(n) = o_p(n^\delta)$, $n \to \infty$ при любом $\delta > \min\{1-s+r/\beta, 1\}$.

Полагая $a < \gamma/\delta$ и выбирая γ и δ сколь угодно близкими к их найденным границам, получаем утверждения теоремы, по следствию 1.2.3. □

На рис. 1.5 представлена граница для $a(\beta)$ при $r = 1/2$ и $s = 1$ сплошной линией и при $s = 0,9$ пунктиром.

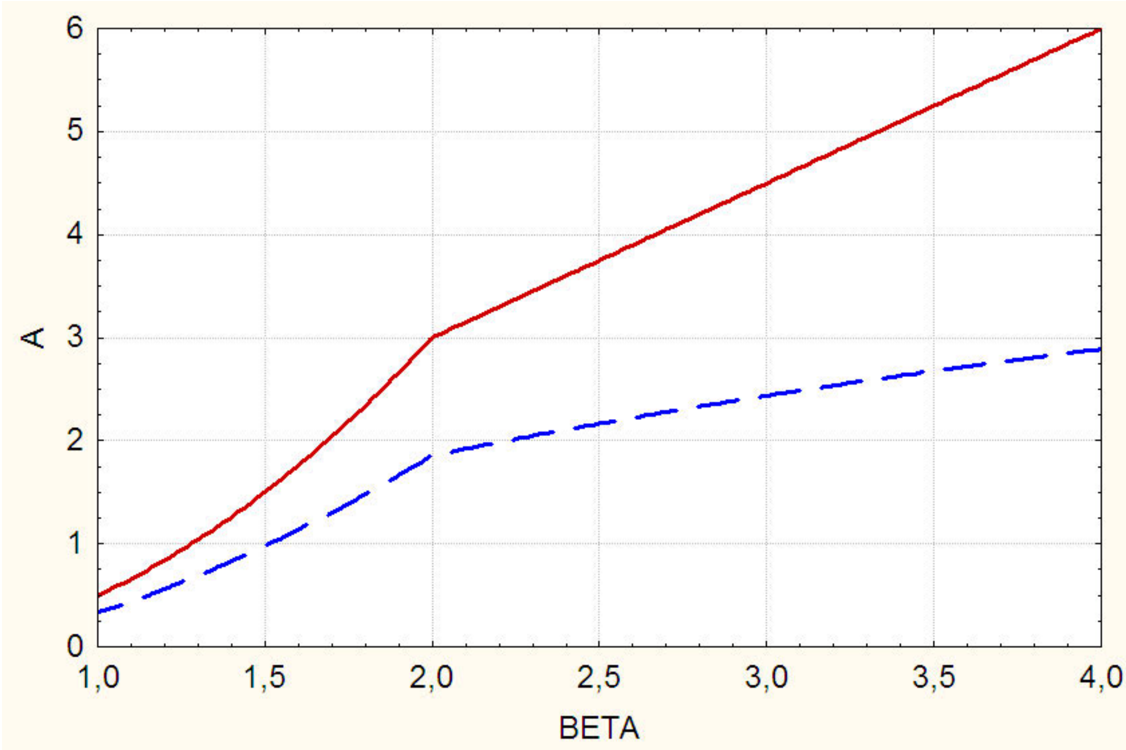

Рис. 1.5: граница для $a(\beta)$ в модели 3

Поскольку мы пользуемся лишь достаточными условиями, не исключено, что эти ограничения в будущем могут быть ослаблены.

Заметим, что во всех моделях при $s = 1$ и наличии у W моментов любого порядка ограничения на параметр a вообще снимаются.

Обозначим через $\mathrm{MPois}(\xi)$ смешанное пуассоновское распределение, которое возникает при рандомизации обычного пуассоновского распределения по его случайному среднему $\xi \geq 0$. Тогда для $X \sim \mathrm{MPois}(\xi)$ имеем [119, §6.2, определение 6.8]:

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{E}\left(\frac{\xi^k}{k!}e^{-\xi}\right), \quad k \geq 0.$$

В частности, если ξ имеет степенной хвост, то X также имеет степенной хвост, с тем же показателем степени [119, §6.2, упражнение 6.12]. Если $\xi \equiv \lambda > 0$, то получаем просто пуассоновское распределение с параметром λ. Возможны и промежуточные случаи. Например, если ξ имеет гамма-распределение, то X имеет отрицательное биномиальное распределение.

Важно понять, какие предельные распределения степеней вершин или размеров сообществ возникают в описанных моделях. Пусть D — степень отдельно взятой вершины (в модели 1), входящая степень (в модели 2) или размер сообщества (в модели 3).

Теорема 1.3.3.4.

1) В модели 1 при $0 < s < 1$ *верно* $D/n^{1-s} \xrightarrow{d} W\mathbf{E}W$*, а при* $s = 1$ *верно* $D \xrightarrow{d} \mathrm{MPois}(W\mathbf{E}W)$*.*

2) В моделях 2 и 3 при $0 < s < 1$ *верно* $D/n^{1-s} \xrightarrow{d} W$*, а при* $s = 1$ *верно* $D \xrightarrow{d} \mathrm{MPois}(W)$*.*

Доказательство.

1) В модели 1 степень i-ой вершины D_i при известном p_i имеет распределение $\mathrm{MBin}(n-1, p_i\mathbf{E}p)$, причем $np_i\mathbf{E}p \sim n^{1-s}w_i\mathbf{E}W$, $n \to \infty$, Положим $\tilde{D} = D/n^{1-s}$, тогда преобразование Лапласа-Стилтьеса

$$\psi_{\tilde{D}}(t) = \mathbf{E}e^{-tD} = \mathbf{E}(1 - np_i\mathbf{E}p(1 - \exp\{-t/n^{1-s}\})/n)^{n-1},$$

что при $0 < s < 1$ дает в пределе

$$\psi_{\tilde{D}}(t) \to \mathbf{E}\exp\{-tW\mathbf{E}W\}, \quad n \to \infty$$

(т.е. $\tilde{D} \xrightarrow{d} W\mathbf{E}W$), а при $s = 1$ дает

$$\psi_{\tilde{D}}(t) \to \mathbf{E}\exp\{-W\mathbf{E}W(1 - e^{-t})\}, \quad n \to \infty$$

(т.е. $D \xrightarrow{d} \mathrm{MPois}(W\mathbf{E}W)$).

2) В модели 2 входящая степень i-ой вершины при известном p_i имеет распределение $\mathrm{MBin}(n-1, p_i)$, а в модели 3 размер i-го сообщества D_i при известном p_i имеет распределение $\mathrm{MBin}(n, p_i)$, причем $np_i \sim w_i n^{1-s}$, $n \to \infty$. Действуя как в доказательстве пункта 1, получаем утверждения пункта 2. $\square$

Заметим, что можно было бы рассмотреть и случай, когда W не имеет математического ожидания, а только момент порядка $0 < \beta < 1$. Подобные случаи для других моделей случайных графов изучались, например, в [62, 87]. Однако это представляется автору не очень реалистичным с точки зрения практических приложений (хотя на этот счет существуют различные мнения, достойные уважения).

Глава 2

Максимумы случайных признаков частиц в ветвящихся процессах

Напомним историю вопроса.

В работах Б.Арнольда и Дж.Вилласенора [89] и А.Пейкса [136] изучались максимумы случайных признаков частиц в ветвящихся процессах с дискретным временем. А именно, рассматривались классические процессы Гальтона-Ватсона [6, 77], в которых каждая частица обладает некоторым случайным признаком, и изучалось поведение максимумов признаков по поколениям или за все время. В работе К.В.Митова и Дж.П.Янева [132] рассматривались максимумы в процессах с двумя типами частиц. В ряде работ изучались также максимумы числа потомков частиц [96, 97, 142, 146]. В качестве исторической предшественницы можно указать модель М.Йенга [147], в которой популяция растет детерминированным образом (в геометрической прогрессии), и нас интересуют промежутки между рекордами, а также классическую F^{α}-модель (см. [57, лекция 25]) и ее дальнейшее обобщение в работе П.Деовельса и В.Б.Невзорова [18].

В случае живых организмов в качестве признаков речь может идти о размерах, весе и других характеристиках, например, удоях коров, яйценоскости кур, урожайности растений, чувствительности организмов к вредным и опасным факторам и др. В частности, в [89] речь шла о росте людей, а в [136] упоминалось разведение скаковых лошадей, с призовыми очками в качестве признака. В [147] речь шла о спортивных рекордах на Олимпийских играх.

Приведем еще пример из биологии. Если имеется колония вредных организмов с различными индивидуальными порогами чувствительности к какому-то фактору (яду, антибиотику или др.), то для уничтожения всей колонии нужна максимальная концентрация, иначе часть организмов колонии выживет и вновь размножится.

Ветвящимися процессами может также описываться распространение компьютерных вирусов. Полиморфные компьютерные вирусы способны не только размножаться, но и изменять свой код (подобно мутациям живых организмов). В качестве признаков могут рассматриваться какие-то характеристики кода вируса или его деятельности.

В ситуации, когда признаки частиц независимы и одинаково распределены, причем их распределение принадлежит области притяжения одного из максимум-устойчивых законов (экстремальных типов), а число частиц ветвящегося процесса, должным образом нормированное, также имеет некоторое предельное распределение, задача сводится к известной теореме о максимуме случайных величин, взятых в растущем случайном количестве [9, теорема 6.2.1].

А именно, пусть $N(n)/n \xrightarrow{P} \zeta$, $n \to \infty$, где ζ — положительная случайная величина, и пусть существуют такие последовательности $a_n > 0$ и b_n, что для максимума н.о.р. случайных величин имеет место слабая сходимость к невырожденному распределению

$$\mathbf{P}(M_n \leq a_n x + b_n) \to G(x), \quad n \to \infty,$$

тогда

$$\mathbf{P}(M_{N(n)} \leq a_n x + b_n) \to \mathbf{E}G(x)^{\zeta}, \quad n \to \infty. \tag{2.1}$$

Обобщения (2.1) для максимумов признаков в ветвящихся процессах могут заключаться в подходящем изменении нормировки $N(n) = Z_n$ (с n на μ^n для надкритических процессов со средним числом потомков $\mu > 1$), переходе к условным распределениям при условии невырождения $Z_n > 0$ (для процессов со смертностью), изучении других порядковых статистик, получении законов больших чисел и т.п.

Новые результаты автора связаны с отказом от классических предположений (о принадлежности распределения признака области притяжения какого-либо максимум-устойчивого закона либо о независимости признаков), а также с рассмотрением случая нескольких признаков частицы и изучением многомерных предельных распределений.

В разделе 2.1 рассмотрены максимумы независимых признаков в бессмертных надкритических процессах с дискретным и непрерывным временем, для одного или нескольких признаков частицы. Получен обширный класс возможных предельных законов для максимумов в случае дискретного времени. Этот класс обобщает максимум-полуустойчивые распределения, введенные и изучавшиеся И.В.Гриневич [16] и Е.Панчевой

[137] (см. также недавний обзор [138]), а впоследствии Л.Канто э Кастро, Л. де Хааном и М.Темидо [104]. В случае непрерывного времени новых законов не возникает. Во многомерном случае (нескольких признаков) изучена предельная зависимость максимумов, порождаемая как возможно исходной зависимостью признаков частицы, так и влиянием ветвящегося процесса.

В разделе 2.2 рассмотрены максимумы зависимых признаков в различных процессах с дискретным временем. Во всех случаях предполагалось, что зависимость признаков пары частиц определяется дальностью их родства, т.е. сколько поколений назад они имеют ближайшего общего предка. Рассмотрены критические, околокритические и надкритические ветвящиеся процессы. В гауссовском случае найдены ограничения на корреляции, при которых максимумы растут асимптотически так же, как при независимых признаках. В случаях тяжелых хвостов и сестринской зависимости доказаны предельные теоремы, описывающие влияние зависимости признаков на асимптотическое поведение максимумов с помощью некоторого показателя, который может быть интерпретирован как экстремальный индекс (см. раздел 3.2).

При решении поставленных автором задач использовались известные факты и методы теории ветвящихся процессов, стохастической теории экстремумов и теории копул, однако сами задачи все являются новыми.

2.1 Максимумы независимых признаков в бессмертных надкритических процессах

В этом разделе мы будем рассматривать только бессмертные надкритические процессы (с конечным средним числом потомков[1] $\mu > 1$ или бесконечным средним), начинающиеся с одной частицы. Бессмертными называют ветвящиеся процессы, в которых вырождение невозможно, поскольку каждая частица оставляет хотя бы одного потомка. В этом случае удобно изучать безусловные распределения максимумов признаков частиц в поколении, и их асимптотику, не опасаясь, что число частиц обратится в нуль.

[1] По умолчанию под числом потомков будем иметь в виду число непосредственных потомков (offspring number).

2.1.1 Процессы с дискретным временем

2.1.1.1. Одномерная модель. Рассмотрим сначала одномерную модель, когда частица имеет один признак.

Рассмотрим надкритический процесс Гальтона–Ватсона Z_n, $n \geq 0$, $Z_0 = 1$, с производящей функцией числа потомков $f(s)$, удовлетворяющей условию:

$$f(0) = 0, \quad f(s) < s, \quad \forall s \in (0, 1). \tag{2.2}$$

Данное условие означает, что каждая частица имеет одного или более потомков (почти наверное), так что процесс не вырождается.

Как известно, для надкритического процесса с конечным средним числом потомков $\mu > 1$ при условии $Z_1 \ln_+ Z_1 < \infty$ [7, §3.5] имеет место сходимость почти наверное

$$\frac{Z_n}{\mu^n} \to W, \quad n \to \infty, \tag{2.3}$$

причем преобразование Лапласа $\varphi(t) = \mathbf{E}e^{-tW}$ однозначно определяется условиями [77, гл. 1, §8.2]:

$$\varphi(\mu t) = f(\varphi(t)), \quad t \geq 0; \quad \varphi'(0) = -1. \tag{2.4}$$

Важно отметить, что в нашем случае $W > 0$ почти наверное.

Сопоставим m-й частице n-го поколения случайную величину (признак) $\xi_{n,m}$, $m \geq 1$, $n \geq 0$. Предполагается, что все эти величины независимы и одинаково распределены (и не зависят от Z_k, $0 \leq k \leq n$). Их общую функцию распределения обозначим через F.

Нас интересует асимптотическое поведение максимумов

$$M_n = \max_{1 \leq m \leq Z_n} \xi_{n,m}$$

при $n \to \infty$.

Подобная модель может описывать, например, растущую популяцию живых организмов, каждый из которых обладает некоторым случайным признаком, а интерес представляет максимальное значение этого признака в поколении.

Далее будет доказан ряд предельных теорем. Теорема 2.1.1.1 дает функциональное уравнение, которому должно удовлетворять предельное распределение. Теорема 2.1.1.2 утверждает, что любое распределение, удовлетворяющее функциональному уравнению, может быть предельным. Теорема 2.1.1.3 устанавливает возможные граничные точки предельного распределения. Теорема 2.1.1.4 утверждает, что функция предельного распределения полностью определяется ее сужением на некоторый отрезок. Следствие 2.1.1.1 показывает, когда неубывающую функцию, заданную на некотором отрезке, можно достроить до функции предельного распределения.

Теорема 2.1.1.1. *Пусть для некоторых числовых последовательностей $a_n > 0$, b_n имеет место слабая сходимость*

$$\mathbf{P}(M_n \le a_n x + b_n) \xrightarrow{w} \Psi(x), \quad n \to \infty, \tag{2.5}$$

к некоторой невырожденной функции распределения $\Psi(x)$. Тогда Ψ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Psi(ax+b) = f(\Psi(x)), \tag{2.6}$$

для некоторых чисел $a > 0$, b.

Доказательство. Пусть выполнено условие (2.5), тогда

$$\mathbf{P}(M_{n+1} \le a_n x + b_n) = \mathbf{EP}(M_{n+1} \le a_n x + b_n | Z_1) =$$
$$= \mathbf{EP}(M_n \le a_n x + b_n)^{Z_1} = f(\mathbf{P}(M_n \le a_n x + b_n)) \xrightarrow{w} f(\Psi(x));$$

кроме того,

$$\mathbf{P}(M_{n+1} \le a_{n+1} x + b_{n+1}) \xrightarrow{w} \Psi(x), \quad n \to \infty.$$

Поскольку $f(0) = 0$, функция распределения $f(\Psi(x))$ собственная, а поскольку f строго возрастает, то невырожденная. Применяя теорему Хинчина [54, §1.2], получаем, что для некоторых $a > 0, b$ верно

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \to a, \quad \frac{b_n - b_{n+1}}{a_{n+1}} \to b, \quad n \to \infty; \qquad \Psi(ax+b) = f(\Psi(x)).$$

$\square$

Теорема 2.1.1.2. *Любая невырожденная функция распределения Ψ, удовлетворяющая функциональному уравнению (2.6), является предельной в указанной схеме для подходящих f и F.*

Доказательство. Положим $F = \Psi$. Введем последовательность

$$s_n = b \sum_{k=0}^{n-1} a^k, \quad n \ge 1.$$

Для нее выполнено соотношение $s_{n+1} = as_n + b$. Проверим по индукции, что для любого u

$$\mathbf{P}(M_n \le u) = \Psi(a^n u + s_n). \tag{2.7}$$

При $n = 1$ имеем

$$\mathbf{P}(M_1 \le u) = \mathbf{EP}(M_1 \le u | Z_1) = f(\Psi(u)) = \Psi(au + b).$$

Аналогично, используя предположение индукции, получаем

$$\mathbf{P}(M_{n+1} \le u) = f(\mathbf{P}(M_n \le u)) = f(\Psi(a^n u + s_n)) =$$
$$= \Psi(a(a^n u + s_n) + b) = \Psi(a^{n+1} u + s_{n+1}).$$

Тем самым соотношение (2.7) доказано. Отсюда заключаем, что

$$\mathbf{P}(M_n \le a_n x + b_n) = \Psi(x) \text{ для } a_n = a^{-n},\ b_n = -s_n a^{-n},$$

т.е. предельное соотношение (2.5) заменяется точным равенством. □

Пример 2.1.1.1. Функция распределения

$$\Psi(x) = \exp\{-\mu^{-(x+\sin x)/(2\pi)}\}$$

удовлетворяет (2.6) с $a = 1$, $b = -2\pi$ при $f(s) = s^\mu$, т.е. когда каждая частица имеет ровно μ потомков, $\mu \ge 2$. Таким образом, если $F = \Psi$, то

$$\mathbf{P}(M_n - 2\pi n \le x) = \Psi(x).$$

График такой экзотической функции распределения при $\mu = 5$ представлен на рис. 2.1.

В общем случае можно использовать явное представление

$$\mathbf{P}(M_n \le u) = f^{(n)}(F(u)),$$

где через $f^{(n)}$ обозначена n-кратная итерация функции f.

Пример 2.1.1.2. Пусть $F(k) = 1 - \mu^{-k}$, $k \ge 0$, и каждая частица имеет ровно μ потомков, $\mu \ge 2$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n - n \le k) = \left(1 - \mu^{-(n+k)}\right)^{\mu^n} \to \exp\{-\mu^{-k}\}, \quad n \to \infty, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2.1.1.3. Пусть $F(k) = 1 - \mu^{-k}$, $k \ge 0$, и каждая частица имеет геометрически распределенное число потомков со средним $\mu > 1$, так что $f(s) = s/(\mu - (\mu - 1)s)$ и $f^{(n)} = s/(\mu^n - (\mu^n - 1)s)$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n - n \le k) = \frac{1 - \mu^{-(n+k)}}{\mu^n - (\mu^n - 1)(1 - \mu^{-(n+k)})} \to \frac{1}{1 + \mu^{-k}}, \quad n \to \infty, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

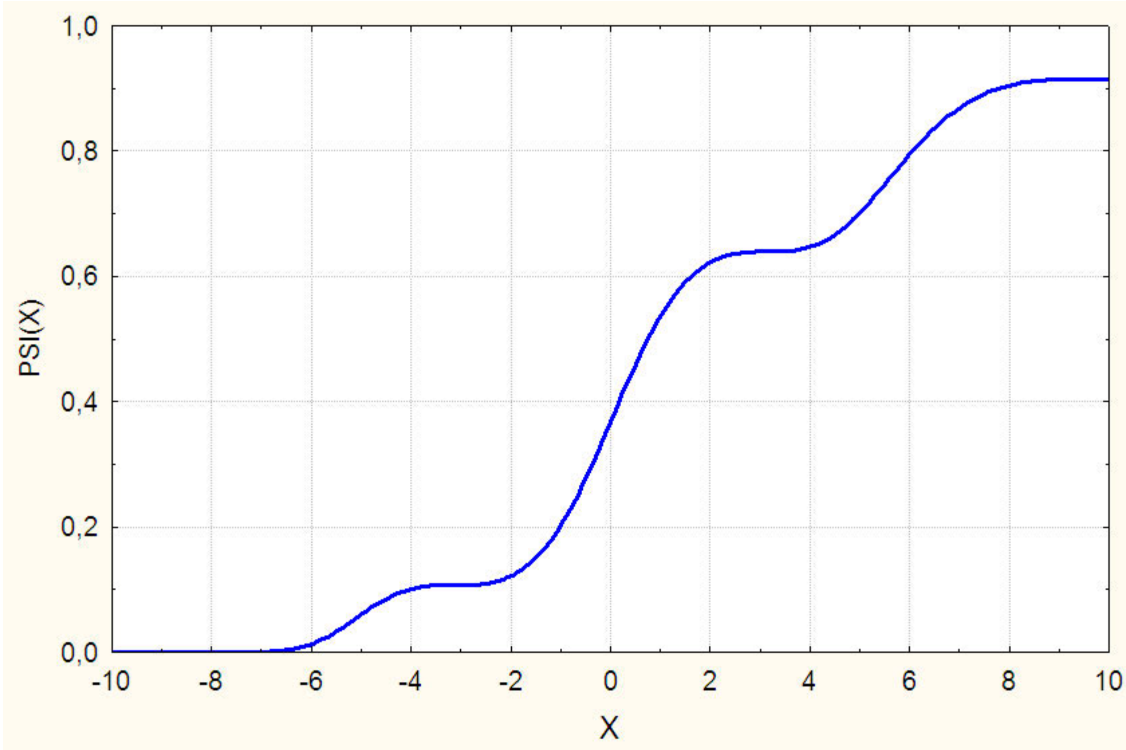

Рис. 2.1: график функции распределения (пример 2.1.1.1)

Введем обозначения

$$x_0 = \inf\{u : \Psi(u) > 0\}, \quad x_\omega = \sup\{u : \Psi(u) < 1\}.$$

Теорема 2.1.1.3. *Для невырожденных распределений Ψ, удовлетворяющих уравнению (2.6), возможны только следующие варианты:*

1) $0 < a < 1$, $x_0 = b/(1-a)$, $x_\omega = +\infty$;

2) $a = 1$, $b < 0$, $x_0 = -\infty$, $x_\omega = +\infty$;

3) $a > 1$, $x_0 = -\infty$, $x_\omega = b/(1-a)$.

Доказательство. Функция f обратима на $[0,1]$, обозначим обратную функцию через f^{-1}. Из (2.6) следует

$$\Psi((x-b)/a) = f^{-1}(\Psi(x)). \tag{2.8}$$

Если $x_0 > -\infty$, то $\Psi(x_0 - 0) = 0$, и с учетом (2.2) из (2.6) получаем $ax_0 + b \le x_0$, а из (2.8) следует $(x_0 - b)/a \le x_0$, так что при $a \ne 0$ получаем $x_0 = b/(1-a)$. Аналогично, если $x_\omega < +\infty$ и $a \ne 0$, то $x_\omega = b/(1-a)$. Заметим, что $x_0 \ne x_\omega$ в силу невырожденности Ψ.

Если $x \in (x_0, x_\omega)$, то из (2.2) и (2.6) следует $ax + b < x$, т.е. $(1-a)x > b$. Пусть $0 < a < 1$, тогда $x > b/(1-a)$, а значит, и $x_0 \ge b/(1-a)$. Отсюда $x_0 = b/(1-a)$, $x_\omega = +\infty$. Пусть $a > 1$, тогда $x < b/(1-a)$, а значит, и $x_\omega \le b/(1-a)$. Отсюда $x_0 = -\infty$, $x_\omega = b/(1-a)$. Пусть $a = 1$, тогда $b < 0$. Пусть $x \in (x_0, x_\omega)$, тогда $\Psi(x) \in (0,1)$. Из (2.2), (2.6) и (2.8) получаем, что $\Psi(x + lb) \in (0,1)$ для любого $l \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $x_0 = -\infty$, $x_\omega = +\infty$. $\square$

Теорема 2.1.1.4. *Решение $\Psi(x)$ функционального уравнения* (2.6) *однозначно определяется его сужением на любой полуинтервал вида $[c, (c-b)/a)$.*

Доказательство. Обозначим $c_1 = c$, $c_2 = (c-b)/a$. Формулы (2.6) и (2.8) позволяют продолжить Ψ с $[c_1, c_2)$ на любой полуинтервал вида $[c_{l-1}, c_l)$, где $c_{l-1} = ac_l + b$, $l \in \mathbf{Z}$. При этом Ψ остается монотонной и непрерывной справа, а также верно, что $\Psi(c_l) \to 0$, $l \to -\infty$ и $\Psi(c_l) \to 1$, $l \to +\infty$. Положим $x_0 = \inf c_l$, $x_\omega = \sup c_l$, определим следующим образом: $\Psi(x) = 0$, $x \le x_0$ при $x_0 > -\infty$ и $\Psi(x) = 1$, $x \ge x_\omega$ при $x_\omega < +\infty$. В результате Ψ обладает всеми свойствами функции распределения, удовлетворяет (2.6) по построению и совпадает с исходной. $\square$

Следствие 2.1.1.1. *Для любого $a > 0$ и непрерывной справа неубывающей функции $\psi(x)$ на $[c_1, c_2)$, такой, что*

$$0 < f(\psi(c_2 - 0)) \le \psi(c_1) < 1,$$

существует распределение Ψ, удовлетворяющее (2.6) *с заданным a и $b = c_1 - ac_2$, такое, что $\Psi(x) = \psi(x)$ на $[c_1, c_2)$.*

Доказательство. Возьмем соответствующую функцию ψ и продолжим ее на $\mathbf{R}$ по алгоритму из доказательства теоремы 2.1.1.4. Полученная функция Ψ является непрерывной справа, неубывающей на каждом из полуинтервалов $[c_{l-1}, c_l)$, $l \in \mathbf{Z}$, а также верно $\Psi(c_l) \to 0$, $l \to -\infty$ и $\Psi(c_l) \to 1$, $l \to +\infty$. Условие $f(\psi(c_2 - 0)) \le \psi(c_1)$ обеспечивает неубывание Ψ в точке c_1, а следовательно, и во всех точках c_l, $l \in \mathbf{Z}$. На каждом из полуинтервалов $[c_{l-1}, c_l)$, $l \in \mathbf{Z}$, нет точек, связанных соотношением x и $ax + b$. Для точек на соседних полуинтервалах, связанных этим соотношением, выполняется (2.6) по построению. Следовательно, Ψ является функцией распределения, удовлетворяющей (2.6). $\square$

Таким образом, мы описали возможные предельные распределения при известной функции f. Можно задаться и обратным вопросом: когда данное распределение Ψ относится к предельным при каких-либо функциях f? Такая постановка естественна в случае, когда мы предполагаем, что некоторое явление описывается ветвящимся процессом, но конкретный закон ветвления нам неизвестен.

Для непрерывных Ψ этот вопрос легко решается путем преобразования формулы (2.6) в следующую формулу:

$$f(s) = \Psi(a\Psi^{-1}(s) + b), \quad s \in (0,1), \tag{2.9}$$

откуда получаем критерий: Ψ относится к классу предельных распределений, если f из (2.9) совпадает на интервале $(0,1)$ с производящей функцией некоторого распределения, для которой выполнено условие (2.2), а параметры a и b согласованы с x_0 и x_ω в соответствии с теоремой 2.1.3. Понятно также, что (2.9) полностью определяет класс функций f, при которых данное распределение Ψ может быть предельным.

Пример 2.1.1.4. Логистическое распределение $\Psi(x) = 1/(1+e^{-x})$. Согласно теореме 2.1.3, имеем $a = 1$, $b < 0$. Из формулы (2.9) получаем $f(s) = s/(e^{-b} - (e^{-b} - 1)s)$, т.е. производящую функцию геометрического распределения со средним $e^{-b} > 1$.

Пример 2.1.1.5. Показательное распределение $\Psi(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$. Согласно теореме 2.1.3, имеем $0 < a < 1$, $b = 0$. Из (2.9) получаем $f(s) = 1 - (1-s)^a$, $0 < a < 1$. Это производящая функция некоторого распределения с бесконечным средним, а значит, не выполняется (2.3).

Пример 2.1.1.6. Рассмотрим $\Psi(x) = \exp\{1 - e^{1/x}\}$, $x > 0$. Согласно теореме 2.1.3, имеем $0 < a < 1$, $b = 0$. Из формулы (2.9) получаем $f(s) = \exp\{1 - (1 - \ln s)^{1/a}\}$; эта функция удовлетворяет (2.2), но не является производящей ни при каком $a \in (0,1)$. Следовательно, такое распределение Ψ не может быть предельным в данной схеме.

Замечание 2.1.1.1. При фиксированном (неслучайном) числе μ непосредственных потомков класс предельных распределений в (2.5) совпадает с соответствующим классом максимум-полуустойчивых распределений при линейной нормировке [16, 104], удовлетворяющих функциональному уравнению $\Psi(ax+b) = \Psi^\mu(x)$. К ним относятся, в частности, распределения из примеров 2.1.1.1 и 2.1.1.2. Таким образом, максимум-полуустойчивые законы получают новую интересную интерпретацию. С другой стороны, распределения, удовлетворяющие (2.6), являются обобщениями максимум-полуустойчивых.

Более того, если выполнено (2.3), между распределениями этих классов можно установить следующее соответствие: пусть H — максимум-полуустойчивое распределение, удовлетворяющее уравнению $H(ax+b) = H^\mu(x)$, тогда $\Psi(x) = \varphi(-\ln H(x))$ удовлетворяет (2.6), и наоборот. Действительно, с учетом (2.4) имеем

$$\begin{aligned}&\Psi(ax+b) = \varphi(-\ln H(ax+b)) = \varphi(-\ln H^\mu(x)) = \\ &= \varphi(-\mu \ln H(x)) = f(\varphi(-\ln H(x))) = f(\Psi(x)).\end{aligned}$$

2.1.1.2. Многомерная модель. Сначала будет рассмотрен регулярный случай (когда совместное распределение признаков каждой частицы принадлежит области притяжения некоторого многомерного экстремального закона), а затем более общий, где возникает более широкий класс многомерных предельных законов.

Теорема 2.1.1.5 дает предельное распределение в регулярном случае. Следствие 2.1.1.2 описывает свзять между копулами предельных распределений. Следствие 2.1.1.3 дает коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости максимумов. Далее переходим от регулярного случая к общему. Теорема 2.1.1.6 дает функциональное уравнение, которому удовлетворяет многомерное предельное распределение. Следствие 2.1.1.4 устанавливает его связь с максимум-полуустойчивыми распределениями. Следствие 2.1.1.5 дает функциональное уравнение для копул.

Пусть частицы имеют $m \geq 2$ признаков. Будем обозначать через $M_i(n)$ максимум i-го признака в n-ом поколении.

Пусть признаки каждой частицы имеют совместное распределение $F(x_1, \ldots, x_m)$. Предположим, что F принадлежит области притяжения какого-либо многомерного невырожденного закона для максимумов, т.е. существуют такие функции $\alpha_i(r) > 0$, $\beta_i(r)$, $r > 0$, и невырожденное (по каждой компоненте) распределение G, что

$$F^r(\alpha_1(r)x_1 + \beta_1(r), \ldots, \alpha_m(r)x_m + \beta_m(r)) \to G(x_1, \ldots, x_m), \quad r \to \infty. \tag{2.10}$$

Теорема 2.1.1.5. *Пусть выполнены* (2.3) *и* (2.10), *тогда*

$$\begin{multline}\mathbf{P}(M_1(n) \leq \alpha_1(\mu^n)x_1 + \beta_1(\mu^n), \ldots, M_m(n) \leq \alpha_m(\mu^n)x_m + \beta_m(\mu^n)) \to \\ \to \varphi(-\ln G(x_1, \ldots, x_m)), \quad n \to \infty.\end{multline} \tag{2.11}$$

Доказательство.

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(M_1(n) \leq \alpha_1(\mu^n)x_1 + \beta_1(\mu^n), \ldots, M_m(n) \leq \alpha_m(\mu^n)x_m + \beta_m(\mu^n)) = \\ = \mathbf{E}F^{Z_n}(\alpha_1(\mu^n)x_1 + \beta_1(\mu^n), \ldots, \alpha_m(\mu^n)x_m + \beta_m(\mu^n) = \\ = \mathbf{E}\left(F^{\mu^n}((\alpha_1(\mu^n)x_1 + \beta_1(\mu^n), \ldots, \alpha_m(\mu^n)x_m + \beta_m(\mu^n))\right)^{Z_n/\mu^n} \to \\ \to \mathbf{E}G^W(x_1, \ldots, x_m) = \varphi(-\ln G(x_1, \ldots, x_m)), \quad n \to \infty.\end{gathered}$$

□

Понятно, что частные распределения любого многомерного предельного закона являются одномерными предельными законами. Более существенной здесь является структура зависимости между компонентами, которая не может быть произвольной.

Согласно знаменитой теореме Скляра, любую функцию многомерного распределения F можно представить в виде некоторой функции C от ее частных функций распределения $F_1, \ldots, F_m$:

$$F(x_1, \ldots, x_m) = C(F_1(x_1), \ldots, F_m(x_m)), \tag{2.12}$$

где $C(y_1, \ldots y_m)$ — функция распределения на $[0,1]^m$ с равномерными частными распределениями, называемая функцией зависимости [9, §5.2] или копулой [130, гл. 5], [134]. В случае непрерывных распределений такое представление единственно. Итак, далее будем придерживаться следующего определения.

Определение. *Копулой (m-мерной) называется функция многомерного распределения на* $[0,1]^m$ *с равномерными частными распределениями. Копулой распределения в* $\mathbf{R}^m$ *называется копула, удовлетворяющая* (2.12).

Пусть многомерный экстремальный закон G имеет копулу D. Тогда для нее выполняется условие (необходимое и достаточное) [9, §5.4], [130, §7.5]:

$$D(y_1^s, \ldots, y_m^s) = D^s(y_1, \ldots, y_m), \quad \forall s > 0. \tag{2.13}$$

Из этого свойства, в частности, следует существование такого $\nu > 0$, что

$$D(y, \ldots, y) = y^\nu, \quad \forall y \in [0,1]. \tag{2.14}$$

Обозначим копулу предельного распределения Ψ через E.

Следствие 2.1.1.2 *Если выполнены* (2.3) *и* (2.10), *то*

$$E(y_1, \ldots, y_m) = \varphi\left(-\ln D\left(e^{-\varphi^{-1}(y_1)}, \ldots, e^{-\varphi^{-1}(y_m)}\right)\right).$$

Следствие легко доказывается, исходя из определения копулы и предельного соотношения (2.11) применительно как к совместному распределению, так и к частным.

Пример 2.1.1.7. Пусть $D(y_1, y_2) = y_1 y_2$ (признаки независимы), тогда $E(y_1, y_2) = \varphi(\varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2))$ (LT-архимедова копула [130, с. 223–224], LT от "Laplace transform", т.е. порожденная преобразованием Лапласа).

Пример 2.1.1.8. Пусть $f(s) = s/(\mu - (\mu-1)s^k)^{1/k}$, $k \geq 1$, тогда $\varphi(t) = 1/(1+kt)^{1/k}$. Если $D(y_1, y_2) = y_1 y_2$, то $E(y_1, y_2) = (y_1^{-k} + y_2^{-k} - 1)^{-1/k}$ (копула Клейтона).

Пример 2.1.1.9. Пусть $f(s) = s/(\mu - (\mu - 1)s^k)^{1/k}$ и

$$D(y_1, y_2) = \exp\left\{-((-\ln y_1)^\gamma + (-\ln y_2)^\gamma)^{1/\gamma}\right\}, \quad \gamma > 1$$

(экстремальная копула Гумбеля[2]), тогда

$$E(y_1, y_2) = \left(\left((y_1^{-k} - 1)^\gamma + (y_2^{-k} - 1)^\gamma\right)^{1/\gamma} + 1\right)^{1/k}$$

(обобщенная копула Клейтона).

Заметим, что изучение копул в явном виде представляет собой непростую задачу. Часто используют некоторые более простые характеристики. Рассмотрим коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости, обозначаемые через λ_U и λ_L [130, гл. 5], [134, §5.4]. Для пары случайных величин (ξ_1, ξ_2) с непрерывными частными распределениями $F_1(x)$, $F_2(x)$ они определяются как

$$\lambda_L = \lim_{q \to 0+0} \mathbf{P}(\xi_1 \le F_1^{-1}(q) | \xi_2 \le F_2^{-1}(q)),$$
$$\lambda_U = \lim_{q \to 1-0} \mathbf{P}(\xi_1 > F_1^{-1}(q) | \xi_2 > F_2^{-1}(q)).$$

Коэффициенты могут вычислены через копулу распределения:

$$\lambda_L = \lim_{q \to 0+0} \frac{C(q,q)}{q}, \quad \lambda_U = 2 - \lim_{q \to 1-0} \frac{1 - C(q,q)}{1-q}.$$

Очевидно, $\lambda_L, \lambda_U \in [0, 1]$. Для двумерных экстремальных копул из (2.14) получаем $\lambda_U = 2 - \nu$ и $\lambda_L = 1$ при $\nu = 1$, $\lambda_L = 0$ при $\nu > 1$; в частности, для копулы Гумбеля $\lambda_L = 0$, $\lambda_U = 2 - 2^{-1/\gamma}$. Для обобщенной копулы Клейтона имеем $\lambda_L = 2^{-1/\gamma k}$, $\lambda_U = 2 - 2^{-1/\gamma}$.

Возникает вопрос, каким образом преобразуются коэффициенты при переходе от копулы D (в классической схеме максимумов) к копуле E (в схеме максимумов признаков частиц в ветвящихся процессах).

Следствие 2.1.1.3. *Если выполнены* (2.3) *и* (2.10)*, то* $\lambda_U^E = \lambda_U^D$*. Если, кроме того,* $\varphi(t) \sim At^{-B}$*,* $t \to \infty$*, то* $\lambda_L^E = (2 - \lambda_U^D)^{-B}$*.*

Доказательство. Поскольку D — экстремальная копула, то из (2.14) и следствия 2.1.1.2 получаем $E(q,q) = \varphi(\nu\varphi^{-1}(q))$.

Пусть $\nu = 1$, тогда $E(q,q) = D(q,q) = q$ и $\lambda_L^E = \lambda_L^D = \lambda_U^E = \lambda_U^D = 1$.

Пусть теперь $\nu > 1$. Для расчета λ_U^E используем тот факт, что $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = -1$. Получаем $1 - E(q,q) \sim \nu(1-q)$, $q \to 1-0$, откуда $\lambda_U^E = 2 - \nu = \lambda_U^D$. Из асимптотики $\varphi(t) \sim At^{-B}$, $t \to \infty$, получаем $E(q,q) \sim \nu^{-B} q$, $q \to 0+0$, откуда $\lambda_L^E = (2 - \lambda_U^D)^{-B}$. □

Таким образом, при переходе к схеме максимумов признаков частиц в ветвящихся процессах в регулярном случае сохраняется коэффициент

[2] Или Гумбеля-Хоугаарда [134, с. 28].

верхней хвостовой зависимости, но может меняться коэффициент нижней.

Отметим также, что если $\varphi(t) \sim At^{-B}$, $t \to \infty$, и $p_1 = f'(0) > 0$, то из (2.4) следует $B = -\ln p_1/\ln\mu$ (что доказывается подстановкой).

На самом деле класс возможных предельных законов гораздо шире, чем возникающий из теоремы 2.1.1.5. Понятно, что он пополняется за счет исходных распределений F, не принадлежащих области притяжения какого-либо экстремального закона, либо когда не выполняется (2.3).

Теорема 2.1.1.6 *При фиксированной f невырожденное (по каждой компоненте) распределение Ψ удовлетворяет предельному соотношению*

$$\mathbf{P}(M_1(n) \le a_n^{(1)}x_1 + b_n^{(1)}, \ldots, M_m(n) \le a_n^{(m)}x_m + b_n^{(m)}) \xrightarrow{w} \Psi(x_1, \ldots, x_m) \tag{2.15}$$

при $n \to \infty$ для некоторых распределений F и числовых последовательностей $a_n^{(i)} > 0$, $b_n^{(i)}$, $1 \le i \le m$, тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Psi(a_1x_1 + b_1, \ldots, a_mx_m + b_m) = f(\Psi(x_1, \ldots, x_m)), \tag{2.16}$$

для некоторых констант $a_i > 0$, b_i, $1 \le i \le m$.

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}(M_1(n) \le u_1, \ldots, M_m(n) \le u_m) = f^{(n)}(F(u_1, \ldots, u_m)). \tag{2.17}$$

Пусть выполнено (2.15), тогда при $n \to \infty$

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(M_1(n+1) \le a_n^{(1)}x_1 + b_n^{(1)}, \ldots, M_m(n+1) \le a_n^{(m)}x_m + b_n^{(m)}) = \\ f(\mathbf{P}(M_1(n) \le a_n^{(1)}x_1 + b_n^{(1)}, \ldots, M_m(n) \le a_n^{(m)}x_m + b_n^{(m)})) \xrightarrow{w} f(\Psi(x))\end{gathered}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{P}(M_1(n+1) \le a_{n+1}^{(1)}x_1 + b_{n+1}^{(1)}, \ldots, M_m(n+1) \le a_{n+1}^{(m)}x_m + b_{n+1}^{(m)}) \xrightarrow{w} \Psi(x).$$

Заметим, что классическая теорема Хинчина об инвариантности класса предельных распределений относительно выбора линейной нормировки [54, §1.2], [9, §2.2] обобщается на многомерный случай (см. доказательство теоремы 5.2.1 [9]), так что отсюда следует (2.16). Обратно, если выполнено (2.16), положим $F = \Psi$, и построим последовательности $a_1^{(i)} = 1$, $b_1^{(i)} = 0$, $a_{n+1}^{(i)} = a_n^{(i)}/a_i$, $b_{n+1}^{(i)} = (b_n^{(i)} - b_i)/a_i$, $1 \le i \le m$, тогда (2.15) обращается в тождество. □

Замечание 2.1.1.2. Полученные распределения могут рассматриваться как обобщения многомерных максимум-полуустойчивых распределений [137], удовлетворяющих функциональным уравнениям вида

$$H(a_1x_1 + b_1, \ldots, a_mx_m + b_m) = H^r(x_1, \ldots, x_m), \quad r > 0. \tag{2.18}$$

Функции $f(s) = s^r$ при целом $r \geq 2$ соответствует детерминированный ветвящийся процесс, в котором каждая частица имеет ровно r потомков. Макс-полуустойчивые распределения были введены в [16, 137]. В числе более современных работ можно указать [104]. Здесь мы получаем для данных распределений новую интерпретацию (как предельных в схеме максимумов признаков частиц в детерминированных ветвящихся процессах). Однако эта взаимосвязь оказывается более глубокой.

Следствие 2.1.1.4. *Пусть выполнено* (2.3) *и* H *— максимум-полуустойчивое распределение, удовлетворяющее* (2.18) *с* $r = \mu$, *тогда распределение*

$$\Psi(x_1, \ldots, x_m) = \varphi(-\ln H(x_1, \ldots, x_m)) \tag{2.19}$$

удовлетворяет (2.15). *И наоборот, если выполнены* (2.3) *и* (2.15), *то распределение*

$$H(x_1, \ldots, x_m) = \exp\{-\varphi^{-1}(\Psi(x_1, \ldots, x_m))\}$$

является максимум-полуустойчивым и удовлетворяет (2.18) *с* $r = \mu$.

Утверждение следствия доказывается с помощью (2.4) и (2.16).

Следствие 2.1.1.5. *Копула* E *является копулой некоторого невырожденного (по каждой компоненте) предельного распределения* Ψ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет функциональному уравнению*

$$E(f(y_1), \ldots, f(y_m)) = f(E(y_1, \ldots, y_m)) \tag{2.20}$$

на множестве векторов, составленных из значений частных функций распределения, т.е. $(\Psi_1(x_1), \ldots, \Psi_m(x_m))$, $x_i \in \mathbf{R}$.

Утверждение следствия доказывается, исходя из определения копулы, уравнения (2.16) и тождеств для частных распределений $\Psi_i(a_ix_i + b_i) = f(\Psi_i(x_i))$, $1 \leq i \leq m$.

Оговорка о множестве значений функций здесь необходима, поскольку предельными распределениями могут быть и дискретные. В случае непрерывных распределений условие (2.20) должно выполняться на всем кубе $[0, 1]^m$.

Пример 2.1.1.10. Функция $E(y_1, y_2) = \min\{y_1, y_2\}$ (копула комонотонности или совершенной зависимости) удовлетворяет (2.20) при любой функции f. В этом случае каждый признак выражается возрастающей функцией от другого.

Пример 2.1.1.11. Пусть $f(s) = s^\mu$, т.е. частица имеет фиксированное число потомков $\mu \geq 2$. Введем непрерывную строго возрастающую выпуклую функцию

$$g(u) = u^2(1 + \varepsilon \sin(c \ln u)), \quad |\varepsilon| \leq \frac{2}{\sqrt{c^4 + 5c^2 + 4}}, \quad c = \frac{2\pi}{\ln \mu}$$

и $h(y) = g(-\ln y)$, тогда функция $E(y_1, y_2) = h^{-1}(h(y_1) + h(y_2))$ является копулой согласно [134, теорема 4.1.4], поскольку h выпукла и строго убывает, и удовлетворяет (2.20) в силу тождества $h(s^\mu) = \mu^2 h(s)$.

На рис. 2.2 представлен график функции $g(u)$ при $\mu = 3$ и $\varepsilon = 0,05$ сплошной линией, а графики $y = (1 \pm \varepsilon)u^2$ пунктиром и точками. Видно, что $g(u)$ медленно осциллирует между ними, оставаясь возрастающей и выпуклой.

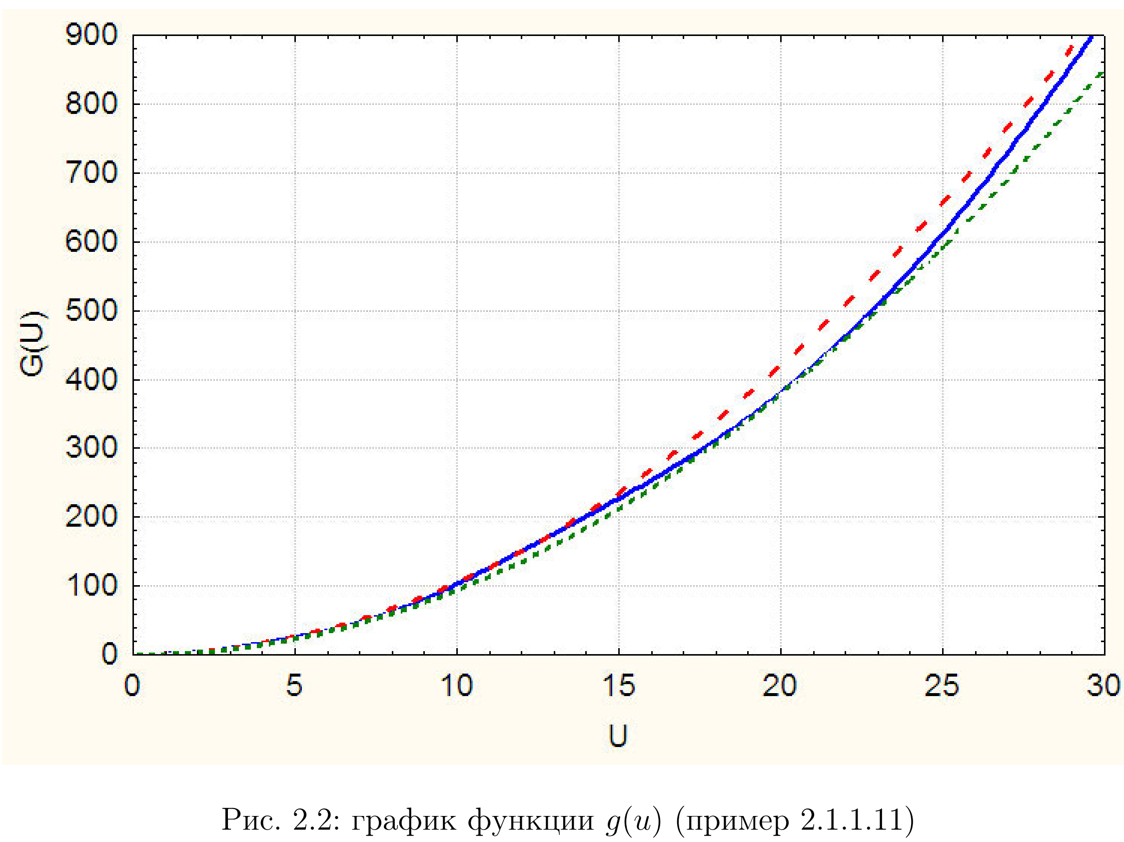

Рис. 2.2: график функции $g(u)$ (пример 2.1.1.11)

В каждом конкретном случае копула предельного распределения может быть найдена как предел (если он существует) копул E_n многомерных распределений экстремумов по поколениям $n \geq 1$:

$$E_n(y_1, \ldots, y_m) = f^{(n)}\left(D\left(f^{(-n)}(y_1), \ldots, f^{(-n)}(y_m)\right)\right),$$

где через $f^{(n)}$ обозначена n-ая итерация функции f, а через $f^{(-n)}$ — соответствующая итерация обратной функции.

Пример 2.1.1.12. Пусть $f(s) = 1 - (1-s)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, что соответствует распределению числа потомков с бесконечным средним, так что (2.3) не выполняется. Пусть также $D(y_1, y_2) = y_1 y_2$, тогда при $n \to \infty$

$$E_n(y_1, y_2) = 1 - \left[1 - \left((1-(1-y_1)^{\alpha^{-n}})(1-(1-y_2)^{\alpha^{-n}}\right)\right]^{\alpha^n} \to \min\{y_1, y_2\}.$$

Таким образом, при исходной независимости признаков мы получаем в пределе совершенную зависимость максимумов.

Следующая теорема (о продолжении) является аналогом теоремы 2.1.1.4 в многомерном случае.

Теорема 2.1.1.7. *Пусть заданы числа* $c_0^{(i)} \in (0,1)$, $1 \leq i \leq m$, *тогда непрерывная копула* C, *удовлетворяющая* (2.20) *на* $[0,1]^m$, *однозначно определяется своими значениями на множестве*

$$V = \{0 < y_1 \leq c_0^{(1)}, \ldots, 0 < y_m \leq c_0^{(m)}\} \setminus \{y_1 \leq f(c_0^{(1)}), \ldots, y_m \leq f(c_0^{(m)})\}.$$

Доказательство. Построим искомую копулу C. Введем числовые последовательности $c_n^{(i)} = f^{(n)}(c_0^{(i)})$, $n \in \mathbf{Z}$ (при $n < 0$ имеем в виду итерации обратной функции). Получаем $c_n^{(i)} \to 0$ при $n \to +\infty$ и $c_n^{(i)} \to 1$ при $n \to -\infty$. Рассмотрим параллелепипеды

$$B_{k_1,\ldots,k_m} = \{c_{k_1+1}^{(1)} < y_1 \leq c_{k_1}^{(1)}, \ldots, c_{k_m+1}^{(m)} < y_m \leq c_{k_m}^{(m)}\}, \quad k_i \in \mathbf{Z}.$$

Весь куб $[0,1]^m$ разбивается на $B_{k_1,\ldots,k_m}$, за исключением границ. Множество V является замыканием объединения всех параллелепипедов вида $B_{k_1,k_2,\ldots 0}, \ldots, B_{0,k_2,\ldots,k_m}$, так что на них копула C определена. С помощью (2.20) можно продолжить C с любого $B_{k_1,\ldots,k_m}$ на $B_{k_1+1,\ldots,k_m+1}$ и $B_{k_1-1,\ldots,k_m-1}$. Таким образом, продолжаем ее на $(0,1)^m$. На границах значения получаем предельным переходом. □

2.1.2 Марковские процессы с непрерывным временем

Рассмотрим марковский ветвящийся процесс $Z(t)$ с непрерывным временем: пусть процесс начинается с одной частицы, каждая частица живет показательно распределенное время с параметром λ, а затем порождает случайное число потомков с производящей функцией $h(s)$, $s \in (0,1)$. Предполагаем, что число непосредственных потомков не менее одного, а его среднее $\mu > 1$ и дисперсия конечны.

Далее исследуем максимумы одного и двух (возможно, связанных) признаков частиц. Предполагается, что признаки разных частиц не зависят между собой и не зависят от ветвящегося процесса. В случае двух признаков особое внимание уделено структуре зависимости максимумов в предельном распределении. Рассмотрим также нормированные максимумы одного признака в два последовательных момента времени и получим для них предельное совместное распределение.

Сначала изучим модель с одним признаком частицы. Теорема 2.1.2.1 дает предельное распределение в регулярном случае. Теорема 2.1.2.2 дает вид предельного распределения в общем случае. Следствие 2.1.2.1 говорит, что соответствующие классы предельных распределений совпадают, в отличие от случая дискретного времени.

Далее переходим к модели с двумя признаками частицы. Теорема 2.1.2.3 дает двумерное предельное распределение в регулярном случае. Следствие 2.1.2.2 дает выражение для его копулы. Теорема 2.1.2.4 дает предельное распределение в общем случае, и соответствующие классы также совпадают. Следствие 2.1.2.3 описывает верхние и нижние хвостовые индексы. Заметим, что теоремы 2.1.2.3 и 2.1.2.4 могут быть без ограничения общности перенесены на случай произвольного конечного числа признаков.

Затем изучим процесс нормированных максимумов. Теорема 2.1.2.5 дает предельное двумерное распределение этого процесса (значений в два последовательных момента времени), а следствие 2.1.2.4 его копулу. Теорема 2.1.2.6 дает пределы интенсивностей скачков процесса вверх и вниз.

При сделанных предположениях имеем

$$h(0)=0; \quad h(s)<s, s\in(0,1); \quad h'(0)=p_1<1, \quad 1<h'(1)=\mu<\infty. \tag{2.21}$$

Как известно [77, гл. 5], для надкритических процессов имеет место предел почти наверное

$$Z(t)e^{-\kappa t} \to W, \quad t\to\infty, \quad \kappa=\lambda(\mu-1), \tag{2.22}$$

причем $\varphi(\tau)=\mathbf{E}e^{-\tau W}$ определяется обратной функцией [77, с.31]:

$$\varphi^{-1}(s)=(1-s)\exp\left\{\int_1^s\left(\frac{\mu-1}{h(u)-u}+\frac{1}{1-u}\right)du\right\}, \quad s\in(0,1).$$

В нашем случае бессмертного процесса имеем $W > 0$ п.н.

Пусть признак каждой частицы имеет распределение F. Обозначим через $M(t)$ максимум признака в популяции в момент $t \geq 0$.

Предположим сначала, что F принадлежит области притяжения какого-либо невырожденного закона для максимумов, т.е. существуют такие функции $\alpha(r) > 0$, $\beta(r)$, $r > 0$, и невырожденное распределение G, что

$$F^r(\alpha(r)x + \beta(r)) \to G(x), \quad r \to \infty. \tag{2.23}$$

Согласно теореме об экстремальных типах [54, теорема 1.4.1], возможны лишь три следующих предельных закона (с точностью до линейной нормировки): $G_1(x) = \exp\{-e^{-x}\}$; $G_2(x) = \exp\{-x^{-\gamma}\}$, $\gamma > 0$, $x > 0$; $G_3(x) = \exp\{-(-x)^\gamma\}$, $\gamma > 0$, $x < 0$.

Теорема 2.1.2.1. *Пусть выполнены* (2.22) *и* (2.23), *тогда*

$$\mathbf{P}(M(t) \leq \alpha(e^{\kappa t})x + \beta(e^{\kappa t})) \to \varphi(-\ln G(x)), \quad t \to \infty. \tag{2.24}$$

Доказательство.

$$\mathbf{P}(M_n \leq \alpha(e^{\kappa t})x + \beta(e^{\kappa t})) = \mathbf{E}F^{Z_n}(\alpha(e^{\kappa t})x + \beta(e^{\kappa t})) =$$
$$\mathbf{E}\left(F^{e^{\kappa t}}(\alpha(e^{\kappa t})x + \beta(e^{\kappa t}))\right)^{Z_n/e^{\kappa t}} \to \mathbf{E}G^W(x) = \varphi(-\ln G(x)), \quad t \to \infty.$$

□

Аналогичные простые теоремы в случае дискретного времени были доказаны в [89, 136, 41].

Далее нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2.1.2.1. *Существует и единственна функция* $f : (0,1)\times\mathbf{R} \to (0,1)$, *являющаяся решением уравнения*

$$\int_s^{f(s,t)} \frac{du}{h(u) - u} = \lambda t, \tag{2.25}$$

причем она обладает следующими свойствами:

1) $f(f(s,t_1),t_2) = f(s,t_1+t_2)$, $\forall s \in (0,1), t_1, t_2 \in \mathbf{R}$*;*

2) $\partial f/\partial t(s,t) = \lambda(h(f(s,t)) - f(s,t))$, $\forall s \in (0,1), t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Определим функцию

$$V(s) = \int_{\frac{1}{2}}^{s} \frac{du}{h(u) - u}, \quad s \in (0,1).$$

В силу свойств (2.21) функции h, функция V непрерывна и строго убывает на интервале $(0,1)$ от $+\infty$ до $-\infty$. Следовательно, существует обратная функция $V^{-1} : \mathbf{R} \to (0,1)$. Положим $f(s,t) = V^{-1}(\lambda t + V(s))$.

Свойства проверяются непосредственно. Единственность решения (2.25) следует из знакопостоянства подынтегральной функции на $(0,1)$. $\square$

Заметим, что функция $f(s,t)$ при $t \geq 0$ совпадает с производящей функцией числа частиц в момент t [77, гл. 5, §9], но не имеет очевидного смысла при $t < 0$.

Лемма 2.1.2.2. *Для любых чисел A, B, x_0 таких, что $Ax_0 + B < 0$ определим функцию*

$$R(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{Ax + B}, \quad Ax + B < 0.$$

Тогда $H(x) = \exp\{-e^{R(x)}\}$ совпадает с некоторой функцией распределения G экстремального типа при $Ax + B < 0$, причем вне этой области G равна 0 или 1.

Доказательство. Пусть $A = 0$, тогда

$$H(x) = \exp\{-e^{-(x-x_0)/|B|}\}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Пусть $A \neq 0$, тогда обозначим $x^* = -B/A$. При $A > 0$ имеем

$$H(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x^* - x}{x^* - x_0}\right)^{1/A}\right\}, \quad x < x^*;$$

при $A < 0$ получаем

$$H(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x - x^*}{x_0 - x^*}\right)^{-1/|A|}\right\}, \quad x > x^*;$$

Согласно теореме об экстремальных типах [54, §1.4] во всех трех случаях выполняется утверждение леммы 2.1.2.2. $\square$

Опишем теперь класс всех возможных предельных распределений в рассматриваемой схеме. Следующая теорема представляет собой аналог классической теоремы об экстремальных типах.

Теорема 2.1.2.2. *Невырожденное распределение Ψ удовлетворяет предельному соотношению*

$$\mathbf{P}(M(t) \leq a(t)x + b(t)) \to \Psi(x), \quad t \to \infty \tag{2.26}$$

при некоторых F и функциях $a(t) > 0$, $b(t)$, тогда и только тогда, когда допустимо представление

$$\Psi(x) = f(s_0, \ln(-\ln G(x))) \tag{2.27}$$

при всех x, для которых правая часть существует, где $s_0 \in (0,1)$, а функция $f(s,t)$ определяется уравнением (2.25) и $G(x)$ — функция распределения экстремального типа.

Доказательство. Обозначим $F_t(x) = \mathbf{P}(M(t) \le x)$, $t \ge 0$. Получаем $F_0(x) = F(x)$ и

$$F_t(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P}(Z(t) = m) F^m(x) = f(F(x), t), \quad t > 0.$$

Пусть $F(x) = \Psi(x)$, где Ψ удовлетворяет (2.27). Согласно [54, следствие 1.3.2] существуют функции $\alpha(r) > 0$, $\beta(r)$, $r > 0$, такие, что

$$G^r(\alpha(r)x + \beta(r)) = G(x), \quad r > 0.$$

Возьмем $a(t) = \alpha(e^t)$, $b(t) = \beta(e^t)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&F_t(a(t)x + b(t)) = f(F(a(t)x + b(t)), t) = \\
&= f(f(s_0, \ln(-\ln G(a(t)x + b(t)))), t) = \\
&= f(s_0, \ln(-\ln G(a(t)x + b(t))) + t) = \\
&= f(s_0, \ln(-\ln G^{e^t}(a(t)x + b(t))) = \Psi(x), \quad \forall t > 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, Ψ является не просто предельным, а устойчивым (относительно данной схемы) распределением.

Пусть теперь выполнено (2.26). Рассмотрим процесс числа частиц $Z(t)$ на сетке $k\delta$, $k \in \mathbf{Z}_+$, $\delta > 0$. Получим процесс Гальтона-Ватсона с дискретным временем, производящей функцией числа непосредственных потомков $f(s,\delta)$ и тем же предельным распределением для максимумов признака Ψ. Согласно теореме 2.1.1.1, для некоторых констант $a_\delta > 0$, b_δ должно выполняться соотношение

$$\Psi(a_\delta x + b_\delta) = f(\Psi(x), \delta), \quad \forall \delta > 0. \tag{2.28}$$

Очевидно, $a_\delta \to 1$, $b_\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. В силу леммы 2.1.2.1 правая часть (2.28) дифференцируема по δ, а значит, дифференцируема и левая (определенная при $\delta > 0$). Обозначим через A и B производные a_δ, b_δ по δ в нуле справа. Дифференцируя (2.28) в нуле справа, по лемме 1 получаем

$$(Ax + B)\Psi'(x) = \lambda(h(\Psi(x)) - \Psi(x))$$

или

$$\frac{\Psi'(x)}{h(\Psi(x)) - \Psi(x)} = \frac{\lambda}{Ax + B}.$$

Решая это дифференциальное уравнение, получаем представление

$$\Psi(x) = f(s_0, R(x)), \quad R(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{Ax+B}, \quad \Psi(x_0) = s_0,$$

которое согласно лемме 2.1.2.2 приводит к (2.27). □

Возникает естественный вопрос: действительно ли теорема 2.1.2.2 расширяет класс предельных распределений по сравнению с теоремой 2.1.2.1? Ответ на него оказывается отрицательным.

Следствие 2.1.2.1. *Класс невырожденных предельных распределений в* (2.26) *совпадает с классом предельных распределений в* (2.24).

Доказательство. Рассмотрим снова вложенный процесс Гальтона-Ватсона с шагом по времени δ. Его предельное распределение имеет то же преобразование Лапласа-Стилтьеса φ, а среднее число потомков $\mu_\delta = e^{\kappa\delta}$, $\kappa = \lambda(\mu - 1)$. Согласно (2.4) имеем

$$\varphi(e^{\kappa\delta}u) = f(\varphi(u), \delta), \tag{2.29}$$

причем это тождество может быть продолжено в область $\delta < 0$, достаточно применить к обеим частям функцию $f(s, -\delta)$. Таким образом, получаем

$$\begin{gathered} f(s_0, \ln(-\ln G(x))) = \varphi(\exp\{\kappa \ln(-\ln G(x))\}\varphi^{-1}(s_0)) = \\ = \varphi((-\ln \tilde{G}(x)), \quad \tilde{G}(x) = \exp\{\varphi^{-1}(s_0)(-\ln G(x))^\kappa\}. \end{gathered}$$

Непосредственной подстановкой легко проверить, что если распределение G относится к одному из трех экстремальных типов, то $\tilde{G}$ также относится к одному из них, что и доказывает следствие. □

Таким образом, в случае непрерывного времени не наблюдается такого разнообразия предельных законов, как при дискретном.

Пример 2.1.2.1. Пусть $h(s) = s^2$, тогда $\varphi(t) = 1/(1+t)$ и возможны предельные законы: $\Psi_1(x) = 1/(1+e^{-x})$ (логистический закон); $\Psi_2(x) = 1/(1+x^{-\beta})$, $x > 0$ (распределение Барра); $\Psi_3(x) = 1/(1+(-x)^\beta)$, $x < 0$; $\beta > 0$.

Пример 2.1.2.2. Пусть $h(s) = s^{k+1}$, $k \geq 1$, тогда $\varphi(t) = 1/(1+kt)^{1/k}$ и возможны предельные законы: $\Psi_1(x) = 1/(1+e^{-x})^{1/k}$; $\Psi_2(x) = 1/(1+x^{-\beta})^{1/k}$, $x > 0$; $\Psi_3(x) = 1/(1+(-x)^\beta)^{1/k}$, $x < 0$; $\beta > 0$.

Рассмотрим теперь модель с двумя признаками частиц. Пусть признаки каждой частицы имеют совместное распределение $F(x_1, x_2)$. Обозначим через $M_1(t)$ и $M_2(t)$ максимумы первого и второго признаков в популяции в момент $t \geq 0$.

Предположим сначала, что F принадлежит области притяжения какого-либо двумерного невырожденного закона для максимумов, т.е. существуют такие функции $\alpha_{1,2}(r) > 0$, $\beta_{1,2}(r)$, $r > 0$, и невырожденное (по обеим компонентам) двумерное распределение G, что

$$F^r(\alpha_1(r)x_1 + \beta_1(r), \alpha_2(r)x_2 + \beta_2(r)) \to G(x_1, x_2), \quad r \to \infty. \tag{2.30}$$

Теорема 2.1.2.3. *Пусть выполнено* (2.30), *тогда*

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(M_1(t) \le \alpha_1(e^{\kappa t})x_1 + \beta_1(e^{\kappa t}), M_2(t) \le \alpha_2(e^{\kappa t})x_2 + \beta_2(e^{\kappa t})) \to \\ \to \varphi(-\ln G(x_1, x_2)), \quad t \to \infty.\end{gathered} \tag{2.31}$$

Теорема доказывается аналогично теореме 2.1.2.1.

Понятно, что частные распределения любого многомерного экстремального закона относятся к одному из трех экстремальных типов. Более существенной здесь является структура зависимости между компонентами, которая не может быть произвольной. Используем для ее изучения аппарат копул (см. с. 73 и [134]).

Обозначим копулу предельного распределения Ψ через C.

Следствие 2.1.2.2. *Если выполнено* (2.30), *то*

$$C(y_1, y_2) = \varphi\left(-\ln D(e^{-\varphi^{-1}(y_1)}, e^{-\varphi^{-1}(y_2)})\right).$$

Следствие легко доказывается исходя из определения копулы и соотношений (2.24), (2.31).

Пример 2.1.2.3. Пусть $D(y_1, y_2) = y_1 y_2$ (признаки независимы), тогда $C(y_1, y_2) = \varphi(\varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2))$ (LT-архимедова копула).

Пример 2.1.2.4. Пусть $h(s) = s^{k+1}$, $k \ge 1$, и $D(y_1, y_2) = y_1 y_2$, тогда $C(y_1, y_2) = (y_1^{-k} + y_2^{-k} - 1)^{-1/k}$ (копула Клейтона).

Пример 2.1.2.5. Пусть $h(s) = s^{k+1}$, $k \ge 1$, и

$$D(y_1, y_2) = \exp\left\{-((-\ln y_1)^\gamma + (-\ln y_2)^\gamma)^{1/\gamma}\right\}, \quad \gamma > 1$$

(экстремальная копула Гумбеля), тогда

$$C(y_1, y_2) = \left(\left((y_1^{-k} - 1)^\gamma + (y_2^{-k} - 1)^\gamma\right)^{1/\gamma} + 1\right)^{1/k}$$

(обобщенная копула Клейтона).

Опишем теперь класс предельных распределений в общем виде.

Теорема 2.1.2.4. *Невырожденное (по обеим компонентам) распределение* Ψ *удовлетворяет соотношению*

$$\mathbf{P}(M_1(t) \le \alpha_1(e^{\kappa t})x_1 + \beta_1(e^{\kappa t}), M_2(t) \le \alpha_2(e^{\kappa t})x_2 + \beta_2(e^{\kappa t})) \to \\ \to \Psi(x_1, x_2), \quad t \to \infty$$

при некоторых F *и* $\alpha_{1,2}(r) > 0$, $\beta_{1,2}(r)$ *тогда и только тогда, когда оно представимо в виде*

$$\Psi(x_1, x_2) = \varphi(-\ln \tilde{G}(x_1, x_2)),$$

где $\tilde{G}$ *— некоторый экстремальный закон.*

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 2.1.2.3, а вопрос о частных распределениях решен теоремой 2.1.2.2 и следствием 2.1.2.1. Осталось доказать необходимость для копул.

По аналогии с (2.28) можно показать, что любой невырожденный предельный закон Ψ должен удовлетворять условию

$$\Psi(a_\delta^{(1)}x_1 + b_\delta^{(1)}, a_\delta^{(2)}x_2 + b_\delta^{(2)}) = f(\Psi(x_1, x_2), \delta)$$

с некоторыми константами $a_\delta^{(1,2)} > 0$, $b^{(1,2)}$, причем это соотношение можно продолжить и на $\delta < 0$. Переходя к копуле C, получаем

$$C(f(y_1, \delta), f(y_2, \delta)) = f(C(y_1, y_2), \delta). \tag{2.32}$$

Кроме того, формулу (2.29) можно переписать в виде

$$\varphi(su) = f(\varphi(u), \kappa^{-1} \ln s), \quad u \ge 0, s > 0. \tag{2.33}$$

Определим функцию

$$\tilde{D}(y_1, y_2) = \exp\left\{-\varphi^{-1}(C(\varphi(-\ln y_1), \varphi(-\ln y_2))\right\}.$$

Легко показать, что она является копулой. Проверим условие (2.13). Возьмем $s > 0$ и обозначим для краткости $z_i = \varphi(-\ln y_i)$, $i = 1, 2$, $v = \kappa^{-1} \ln s$, тогда в силу (2.32) и (2.33) получаем

$$\tilde{D}(y_1^s, y_2^s) = \exp\{-\varphi^{-1}(C(\varphi(-s\ln y_1), \varphi(-s\ln y_2))\} = \\ = \exp\{-\varphi^{-1}(C(f(z_1, v), f(z_2, v)))\} = \exp\{-\varphi^{-1}(f(C(z_1, z_2), v))\} = \\ = \exp\{-\varphi^{-1}(\varphi(sC(z_1, z_2)))\} = \tilde{D}^s(y_1, y_2).$$

Таким образом, $\tilde{D}$ действительно является копулой некоторого экстремального закона $\tilde{G}$. □

Получается, что класс предельных распределений не может быть расширен по сравнению с тем, что дает теорема 2.1.2.3.

Перейдем теперь к изучению коэффицентов хвостовой зависимости (см. с. 74 и [134, §5.4])

Нас интересует вопрос, каким образом преобразуются коэффициенты при переходе от копулы D (в классической схеме максимумов) к копуле C (максимумов признаков частиц в ветвящихся процессах).

Следствие 2.1.2.3. $\lambda_U^C = \lambda_U^D$, $\lambda_L^C = (2-\lambda_U^D)^{-(1-p_1)/(\mu-1)}$.

Доказательство. Поскольку D — экстремальная копула, то из (2.14) и следствия 2.1.2.2 получаем

$$C(q,q) = \varphi(\nu\varphi^{-1}(q)).$$

Пусть $\nu = 1$, тогда $C(q,q) = D(q,q) = q$ и $\lambda_L^C = \lambda_L^D = \lambda_U^C = \lambda_U^D = 1$.

Пусть теперь $\nu > 1$. Для расчета λ_U^C используем тот факт, что $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = -1$. Получаем $1 - C(q,q) \sim \nu(1-q)$, $q \to 1-0$, откуда $\lambda_U^C = 2 - \nu = \lambda_U^D$. Для расчета λ_L^C используем асимптотику [77, с. 168]: $\varphi(u) \sim As^{-B}$, $s \to \infty$, где $A > 0$, $B = (1-p_1)/(\mu-1)$. Получаем $C(q,q) \sim \nu^{-1/(\mu-1)}q$, $q \to 0+0$, откуда $\lambda_L^C = (2-\lambda_U^D)^{-(1-p_1)/(\mu-1)}$. □

Таким образом, при переходе к схеме максимумов признаков частиц в ветвящихся процессах сохраняется коэффициент верхней хвостовой зависимости, но может меняться коэффициент нижней.

Было проведено моделирование 500 траекторий ветвящегося процесса с $\lambda = 1$, $h(s) = s^2$ до момента времени $T = 7$ с частицами, имеющими независимые признаки со стандартным показательным распределением. В этом случае для максимумов предельным частным распределением является логистическое, а предельной копулой — копула Клейтона (пример 2.1.2.4). На рис. 2.3 представлена логистическая вероятностная бумага для максимумов первого признака. Наблюдается хорошее соответствие.

На рис. 2.4 представлена диаграмма рассеяния максимумов обоих признаков. Форма облака характерна для копулы Клейтона [130, с. 195].

Изучим теперь двумерные предельные распределения процесса максимумов одного признака.

Рассмотрим процесс нормированных максимумов $\tilde{M}(t) = (M(t) - \alpha(e^{\kappa t}))/\beta(e^{\kappa t})$ и случайную пару $(\tilde{M}(t), \tilde{M}(t+s))$, $t, s \geq 0$. Нас интересует ее предельное распределение при $t \to \infty$.

Теорема 2.1.2.5. *Если выполнены* (2.22) *и* (2.23), *то*

$$\begin{gathered}\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\tilde{M}(t) \leq x_1, \tilde{M}(t+s) \leq x_2) = \\ = \varphi((1-r_1)\tau(x_1) + \tau(x_2)) \vee (\tau(x_1) + (1-r_2)\tau(x_2)),\end{gathered} \tag{2.34}$$

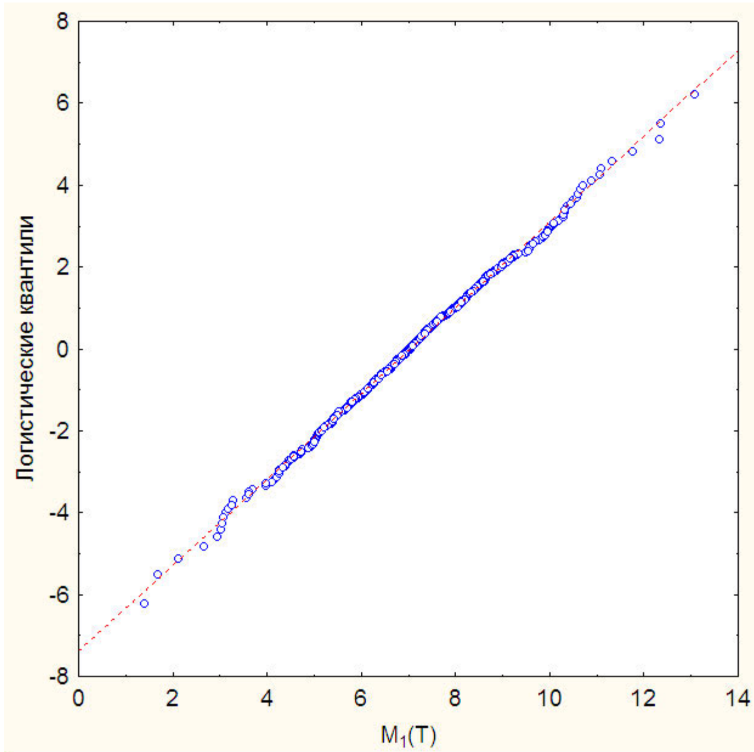

Рис. 2.3: логистическая вероятностная бумага

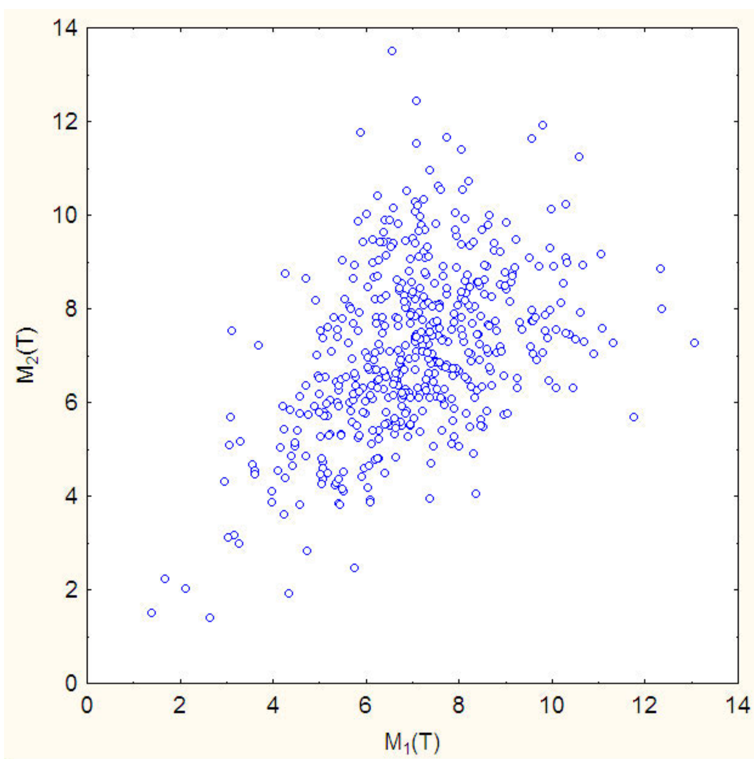

Рис. 2.4: диаграмма рассеяния максимумов

где $\tau(x) = -\ln G(x)$, $r_1 = e^{-\lambda s}$, $r_2 = e^{-\lambda\mu s} = r_1^{\mu}$.

Доказательство. Заметим, что популяции частиц в указанные моменты времени имеют общую часть: это частицы, существовавшие в момент t и дожившие до момента $t+s$. Обозначим их число через $Z_s(t)$ и отметим, что $Z_s(t) \sim e^{-\lambda s} Z(t)$, $t \to \infty$. Число частиц, существовавших в момент t и не доживших до $t+s$, составляет $Z(t) - Z_s(t) \sim (1-e^{-\lambda s})Z(t)$, а число частиц, родившихся после момента t и доживших до $t+s$, равно $Z(t+s) - Z_s(t) \sim (e^{\kappa s} - e^{-\lambda s})Z(t) \sim (1 - e^{-\lambda\mu s})Z(t+s)$. Обозначим $u(t,x) = \alpha(e^{\kappa t})x + \beta(e^{\kappa t})$, тогда $F^{e^{\kappa t}}(u(t,x)) \to G(x)$, $t \to \infty$. Получаем

$$\begin{gathered}
\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\tilde{M}(t) \le x_1, \tilde{M}(t+s) \le x_2) = \\
= \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(F^{Z_s(t)}(u(t,x_1) \wedge u(t+s,x_2)) \\
F^{Z(t)-Z_s(t)}(u(t,x_1))F^{Z(t+s)-Z_s(t)}(u(t+s,x_2)) = \\
= \mathbf{E}((G^{r_1}(x_1) \wedge G^{r_2}(x_2))G^{1-r_1}(x_1)G^{1-r_2}(x_2))^W = \\
= \mathbf{E}(G^{1-r_1}(x_1)G(x_2) \wedge G(x_1)G^{1-r_2}(x_2))^W = \\
= \varphi((1-r_1)\tau(x_1) + \tau(x_2)) \vee (\tau(x_1) + (1-r_2)\tau(x_2)).
\end{gathered}$$

□

Понятно, что предельные частные распределения описываются теоремой 2.1.2.1. Изучим структуру зависимости максимумов.

Следствие 2.1.2.4. *Копула предельного распределения* (2.34) *имеет вид*

$$C_s(y_1,y_2) = \varphi((1-r_1)\varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2)) \vee (\varphi^{-1}(y_1) + (1-r_2)\varphi^{-1}(y_2)),$$

а коэффициенты хвостовой зависимости описываются формулами $\lambda_u^s = r_2$, $\lambda_l^s = (2-r_2)^{-(1-p_1)/(\mu-1)}$.

Данное следствие доказывается аналогично следствиям 2.1.2.2 и 2.1.2.3.

Заметим, что полученная копула оказывается "промежуточной" между копулой комонотонности $C_0(y_1,y_2) = y_1 \wedge y_2$ и LT-архимедовой копулой $C(y_1,y_2) = \varphi(\varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2))$.

Пример 2.1.2.6. Пусть $f(s) = s^2$, тогда $\varphi(t) = 1/(1+t)$ и

$$\begin{aligned}
C_s(y_1,y_2) = 1/(1 + ((1-r_1)(y_1^{-1}-1) + (y_2^{-1}-1))\vee \\
\vee((y_1^{-1}-1) + (1-r_2)(y_2^{-1}-1))).
\end{aligned}$$

Данная копула является кусочно-гладкой с изломом по линии $y_2 = y_1/(r-(r-1)y_1)$, $r = r_1/r_2 = e^{\kappa s}$. На рис. 2.5 представлен ее контурный график при $r_1 = 0,7$, $r_2 = 0,7^2 = 0,49$.

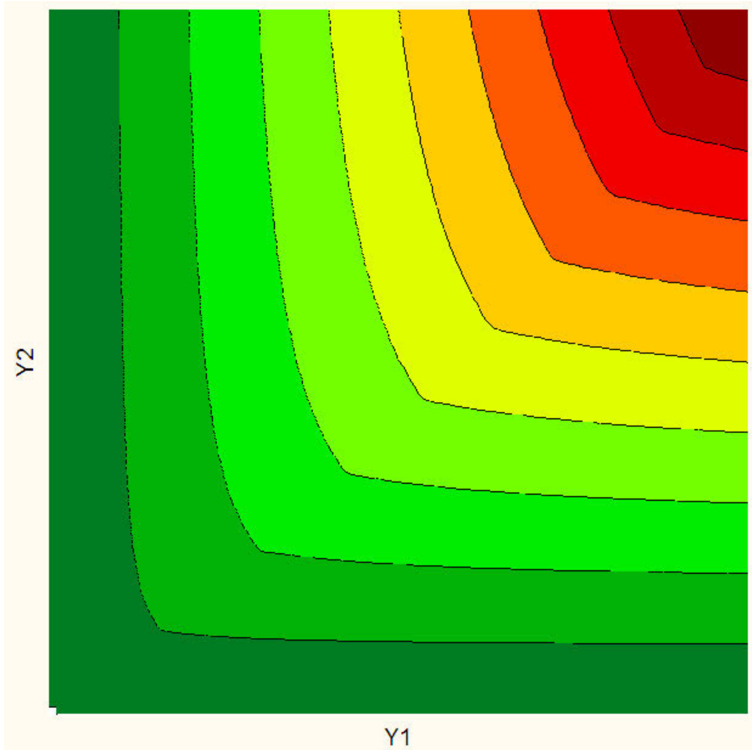

Рис. 2.5: копула зависимости процесса нормированных максимумов

Заметим, что аналогичным образом можно получить любые конечномерные распределения, характеризующие предельный стационарный процесс.

Траектории процесса $M(t)$ являются кусочно-постоянными (почти наверное), поскольку максимум признака в популяции может изменяться только в моменты деления частиц. Понятно, что нормированный процесс $\tilde{M}(t)$ претерпевает скачки в те же моменты времени. Далее будем полагать распределение признака непрерывным.

Обозначим через $\lambda_+(t)$ и $\lambda_-(t)$ интенсивности скачков вверх и вниз соответственно в момент t. Эти величины можно вывести из общего вида конечномерных распределений, однако мы используем более простой подход.

Теорема 2.1.2.6. *Интенсивности скачков вверх и вниз* $\lambda_+(t) \to \lambda\mu$, $\lambda_-(t) \to \lambda$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство. Пусть в момент времени t общее число частиц равно N. В последующий малый промежуток времени δ среднее число делений частиц составит $\lambda N\delta + o(\delta)$, причем вероятность ровно одного деления $\lambda N\delta + o(\delta)$, а более одного $o(\delta)$, так что последней возможностью при расчете интенсивностей можно пренебречь.

Скачок вверх происходит, если среди новых частиц максимум признака оказывается больше, чем у имевшихся N. Вероятность этого составляет

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1-h(F(u))\,dF^N(u)=\int_0^1(1-h(v^{1/N}))\,dv\sim\frac{\mu}{N},\quad N\to\infty,$$

откуда следует $\lambda_+(t)\to\lambda\mu$, $t\to\infty$.

Скачок вниз происходит, если делится частица с максимальным признаком в популяции (вероятность этого $1/N$), и среди ее потомков максимум признака меньше. Таким образом, вероятность скачка вниз при делении

$$\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}h(F(u))\,dF^N(u)=\frac{1}{N}\int_0^1 h(v^{1/N})\,dv\sim\frac{1}{N},\quad N\to\infty,$$

откуда следует $\lambda_-(t)\to\lambda$, $t\to\infty$. $\square$

2.2 Максимумы зависимых признаков

Ранее мы рассматривали максимумы случайных признаков частиц в бессмертных надкритических ветвящихся процессах. При этом признаки разных частиц считались независимыми.

В [44] автором впервые изучалась модель с зависимостью признаков частиц в поколении, обусловленной их общей наследственностью, при этом основное внимание уделялось модели линейной авторегрессии.

Следует упомянуть, что вопрос о зависимости количественных признаков детей и родителей (например, роста) изучался еще Ф.Гальтоном в конце XIX века [71, гл. 2, §6]. Как раз для описания этого явления он ввел модель линейной регрессии, получившую впоследствии широкое распространение. Заметим, что возможны и другие механизмы формирования зависимости признаков, кроме наследственности, также связанные с родством. Например, как отмечено в [77, гл. 6, §28.2], при размножении бактерий продолжительности жизни сестринских клеток коррелированы, а материнских и дочерних — нет.

Предположим, что ветвящийся процесс влияет на признаки частиц только через определяемую им структуру зависимости признаков в популяции, а признаки частиц не влияют на ветвящийся процесс (тем самым исключен естественный отбор).

Далее в разделах 2.2.1 и 2.2.2 для ветвящихся процессов, начинающихся с одной частицы, изучается асимптотика максимума признаков частиц n-го поколения M_n при условии $Z_n > 0$ при $n \to \infty$.

Во всех случаях предполагалось, что зависимость признаков пары частиц определяется дальностью их родства, т.е. сколько поколений назад они имеют ближайшего общего предка. Рассмотрены критические, околокритические и надкритические ветвящиеся процессы. В гауссовском случае найдены ограничения на корреляции, при которых максимумы растут асимптотически так же, как при независимых признаках. В случае тяжелых хвостов доказаны предельные теоремы, описывающие влияние зависимости признаков на асимптотическое поведение максимумов.

В разделе 2.2.3 в случае сестринской зависимости изучается асимптотика максимума признаков частиц первого поколения M_n^* при $Z_0 = n \to \infty$. Установлено влияние зависимости признаков на асимптотическое поведение максимумов.

2.2.1 Гауссовский случай

Предположим, что совместное распределение признаков частиц в поколении (при известном генеалогическом дереве поколения) является многомерным нормальным, частные распределения — стандартные нормальные, а коэффициент корреляции признаков пары частиц мажорируется (по модулю) величиной $0 \le r_k < 1$, если эти частицы имеют ближайшего общего предка k поколений назад. Для критических, околокритических и надкритических процессов (начинающихся с одной частицы) найдем достаточные условия на r_k, $k \ge 1$, при которых максимумы по поколениям растут асимптотически так же, как при независимых признаках.

Теорема 2.2.1.1 относится к критическому процессу с конечной дисперсией числа потомков. Теорема 2.2.1.2 относится к околокритическому процессу специального вида с геометрическим распределением числа потомков. Теорема 2.2.1.3 относится к надкритическому процессу с конечными средним и дисперсией числа потомков. Во всех случаях найдены соответствующие ограничения на корреляции.

2.2.1.1. Критические процессы. Рассмотрим критический ветвящийся процесс с конечной дисперсией числа потомков σ^2. Обозначим через $T(n,k)$ число пар частиц в n-ом поколении, имеющих общего предка не более чем k поколений назад, и через $R(n,k)$ число пар частиц в n-ом поколении, имеющих общего предка ровно k поколений назад, $n \geq k$. Напомним, что для критического процесса согласно [6, §2.6], $\mathbf{E}Z_n(Z_n-1) = \mathbf{D}Z_n = n\sigma^2$. Введем обозначение $B = \sigma^2/2$.

Лемма 2.2.1.1. *В данной модели*

$$\mathbf{E}(R(n,k)|Z_n > 0) = \frac{B}{\mathbf{P}(Z_n > 0)} \sim B^2 n, \quad n \to \infty. \tag{2.35}$$

Доказательство. Пара частиц имеет общего предка не более чем k поколений назад тогда и только тогда, когда они принадлежат к родственной группе частиц, произошедших от одной частицы $(n-k)$-го поколения. Поэтому

$$\mathbf{E}T(n,k) = \mathbf{E}Z_{n-k}\mathbf{E}Z_k(Z_k-1)/2 = k\sigma^2/2 = kB.$$

Отсюда $\mathbf{E}R(n,k) = \mathbf{E}T(n,k) - \mathbf{E}T(n,k-1) = B$. Поскольку $R(n,k) = 0$ при $Z_n = 0$, то $\mathbf{E}(R(n,k)|Z_n > 0) = B/\mathbf{P}(Z_n > 0)$. Согласно [6, теорема 10], $\mathbf{P}(Z_n > 0) \sim 1/(Bn)$, $n \to \infty$, откуда $\mathbf{E}(R(n,k)|Z_n > 0) \sim B^2 n$, $n \to \infty$. $\square$

Заметим, что результат леммы довольно удивителен: средние числа пар частиц, находящихся в каждой из возможных дальностей родства от 1 до n, одинаковы.

Напомним, что стандартное нормальное распределение принадлежит области притяжения закона Гумбеля $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ с известными нормирующими константами. А именно,

$$\begin{gathered}\Phi^s(a(s)x + b(s)) \to \Lambda(x), \quad s \to \infty,\\ a(s) = (2\ln s)^{-1/2}, \quad b(s) = (2\ln s)^{1/2} - \tfrac{1}{2}(2\ln s)^{-1/2}(\ln\ln s + \ln 4\pi),\end{gathered} \tag{2.36}$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Пусть $u_n = a(n)x + b(n)$, $n \geq 1$. Имеем $n\bar{\Phi}(u_n) \to e^{-x}$, $\Phi(u_n)^n \to \Lambda(x)$, $n \to \infty$.

Теорема 2.2.1.1. *Пусть* $\sup r_k = \delta < 1$ *и* $r_k \ln k \to 0$, $k \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n | Z_n > 0) \to \left(1 + Be^{-x}\right)^{-1}, \quad n \to \infty. \tag{2.37}$$

Доказательство. Далее будем пользоваться следующей оценкой для стандартных нормальных величин $X_1, \ldots, X_N$ с корреляциями ρ_{ij}, удовлетворяющими условию $|\rho_{ij}| \leq \delta < 1$. Согласно [54, следствие 4.2.4] для них выполнено неравенство

$$\left|\mathbf{P}\left(\bigvee_{1\leq i\leq N} X_i \leq u\right) - \Phi^N(u)\right| \leq K(\delta) \sum_{1\leq i<j\leq N} |\rho_{ij}| \exp\left\{-\frac{u^2}{1+|\rho_{ij}|}\right\}. \tag{2.38}$$

Отсюда применительно к нашей задаче, используя лемму 2.2.1.1, получаем

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{P}(M_n \le u_n | Z_n > 0) - \mathbf{E}(\Phi(u_n)^{Z_n} | Z_n > 0)| \le \\
&\le K(\delta)\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} R(n,k) r_k \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+r_k}\right\} \middle| Z_n > 0\right) = \\
&= K(\delta)\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(R(n,k)|Z_n > 0) r_k \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+r_k}\right\} = \\
&= \frac{K(\delta)B}{\mathbf{P}(Z_n > 0)} \sum_{k=1}^{n} r_k \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+r_k}\right\} \sim \\
&\sim K(\delta)B^2 n \sum_{k=1}^{n} r_k \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+r_k}\right\}, \quad n \to \infty.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Согласно [54, лемма 4.3.2] из условия теоремы 2.2.1.1 и ограниченности $n\bar{\Phi}(u_n)$, $n \ge 1$, следует

$$n \sum_{k=1}^{n} r_k \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+r_k}\right\} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2.40}$$

таким образом в (2.39) получаем

$$|\mathbf{P}(M_n \le u_n | Z_n > 0) - \mathbf{E}(\Phi(u_n)^{Z_n} | Z_n > 0)| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.41}$$

Кроме того, согласно [6, теорема 10],

$$\left(\frac{Z_n}{Bn}\middle| Z_n > 0\right) \xrightarrow{d} \zeta \sim \mathrm{Exp}(1), \quad n \to \infty,$$

поэтому

$$\mathbf{E}(\Phi(u_n)^{Z_n} | Z_n > 0) \to \mathbf{E}\Lambda(x)^{B\zeta} = \left(1 + Be^{-x}\right)^{-1}, \quad n \to \infty. \tag{2.42}$$

Из (2.41) и (2.42) следует утверждение теоремы. □

Таким образом, предельный закон оказывается логистическим.

Здесь довольно удивительно, что полученное нами условие (2.40), достаточное для выполнения (2.37), формально совпадает с давно известным условием для максимумов нормальных последовательностей [54, §4.3], хотя в нашем случае речь идет не о последовательности, а о схеме серий, и величины r_k, $k \ge 1$, не образуют ковариационную последовательность для какой-либо случайной последовательности в нашей модели. В общем случае частицы поколения нельзя выстроить в ряд так, чтобы расстояние между ними соответствовало их дальности родства.

2.2.1.2. Околокритические процессы. Околокритическими называют ветвящиеся процессы, в которых среднее число потомков стремится к единице или колеблется около нее (в схеме серий, либо в зависимости от времени или от состояния). Например, процессы с зависимостью от времени использовались в [135] для оценки возраста “митохондриальной Евы”. В [86] рассматривались процессы с зависимостью от размера популяции и их приложения к теории эволюции и формированию степенных законов. В [103] изучался процесс с двумя взаимодействующими типами частиц.

Здесь речь пойдет об околокритических процессах с зависимостью от времени (номера поколения). Пусть задана положительная функция $g(n)$, такая, что $g(0) = 1$ и

$$\frac{g(n+1)}{g(n)} \to 1, \quad g(n) \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Рассмотрим неоднородный надкритический ветвящийся процесс Z_n, $n \geq 1$, у которого в n-м поколении распределение числа потомков любой частицы является геометрическим (начиная с единицы) со средним $\mu_n = g(n+1)/g(n)$, $n \geq 0$. Тогда распределение Z_n при любом $n \geq 1$ является геометрическим (начиная с единицы) и $\mathbf{E}Z_n = g(n)$. Отсюда

$$\frac{Z_n}{g(n)} \xrightarrow{d} \zeta \sim \mathrm{Exp}(1), \quad n \to \infty. \tag{2.43}$$

Напомним, что если геометрическая случайная величина ν имеет среднее μ, то $\mathbf{E}\nu(\nu-1) = 2\mathbf{D}\nu = 2\mu(\mu-1)$.

Лемма 2.2.1.2. *В данной модели*

$$\mathbf{E}T(n,k) = \frac{g(n)(g(n) - g(n-k))}{g(n-k)}, \tag{2.44}$$

Доказательство. Пусть $Z^*_{n,k}$ имеет распределение числа частиц n-го поколения, произошедших от одной частицы $(n-k)$-го поколения. Тогда $Z^*_{n,k}$ имеет геометрическое распределение со средним $g(n)/g(n-k)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}T(n,k) = \mathbf{E}Z_{n-k}\mathbf{E}Z^*_{n,k}(Z^*_{n,k}-1)/2 = \\ = g(n-k)\,\frac{g(n)}{g(n-k)}\left(\frac{g(n)}{g(n-k)} - 1\right), \end{aligned}$$

что и дает (2.44). □

Заметим, что

$$\mathbf{E}T(n,n) = \mathbf{E}Z_n(Z_n-1)/2 \sim g(n)^2, \quad n\to\infty. \tag{2.45}$$

Лемма 2.2.1.3. *Для любого $s\in(0,1)$ существует целочисленная функция $m_s(n)$, $n\geq 1$, такая, что $1\leq m_s(n)\leq n$ и*

$$\frac{g(n-m(n))}{g(n)^s}\to 1, \quad m_s(n)\to\infty, \quad n\to\infty.$$

Доказательство. Положим $m(n)=1$ при $g(n)=1$ и

$$m(n)=\min\{1\leq k\leq n : g(n-m(n))<g(n)^s\}$$

при $g(n)>1$, что имеет место при всех достаточно больших n.

Предположим, что существует такая последовательность n_k, $k\geq 1$, что $m_s(n_k)<M$, тогда $g(n-M)<g(n)^s$, но $g(n)/g(n-M)\to 1$, так что приходим к противоречию. Следовательно, $m_s(n)\to\infty$, $n\to\infty$.

Имеем $g(n-m_s(n))/g(n)^s<1$ и $g(n-m_s(n)+1)/g(n)^s\geq 1$. Но поскольку $g(n-m_s(n)+1)/g(n-m_s(n))\to 1$, то $g(n-m_s(n))/g(n)^s\to 1$, $n\to\infty$. $\square$

Из лемм 2.2.1.2 и 2.2.1.3 следует

$$\mathbf{E}T(n,m_s(n))\sim g(n)^{2-s}, \quad n\to\infty. \tag{2.46}$$

Исходя из асимптотики (2.43), положим $u_n=a(g(n))x+b(g(n))$, $n\geq 1$. Заметим, что тогда

$$\exp\{-u_n^2\}\sim e^{-2x}g(n)^{-2}\ln g(n), \quad n\to\infty. \tag{2.47}$$

Теорема 2.2.1.2. *Пусть $\sup r_k=\delta<1$ и $r_{m_s(k)}\ln g(k)\to 0$, $k\to\infty$, где $2\delta/(1+\delta)<s<1$, тогда*

$$\mathbf{P}(M_n\leq u_n)\to\left(1+e^{-x}\right)^{-1}, \quad n\to\infty.$$

Доказательство. Используем ту же оценку (2.38), что и в доказательстве теоремы 2.2.1.1. Пусть $\delta_n=\sup_{k>m_s(n)}r_k$, тогда $\delta_n=o((\ln g(n))^{-1})$ и $g(n)^{\delta_n}\to 1$, $n\to\infty$. Сумму по дальностям родства разбиваем на две: от 1 до $m_s(n)$ и от $m_s(n)+1$ до n. С помощью (2.45), (2.46) и (2.47) получаем

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{P}(M_n\leq u_n)-\mathbf{E}\Phi(u_n)^{Z_n}|\leq K(\delta)\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}R(n,k)r_k\exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+r_k}\right\}\leq\\
&\leq K(\delta)\delta\mathbf{E}T(n,m_s(n))\exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+\delta}\right\}+K(\delta)\delta_n\mathbf{E}T(n,n)\exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+\delta_n}\right\}=\\
&=g(n)^{2-s}g(n)^{(-2/(1+\delta))(1+o(1))}+o((\ln g(n))^{-1})g(n)^2g(n)^{-2/(1+\delta_n)}(\ln g(n))^{1/(1+\delta_n)}=\\
&=g(n)^{(2\delta/(1+\delta)-s)(1+o(1))}+o\left((\ln g(n))^{-\delta_n(1+o(1))}\right)g(n)^{2\delta_n(1+o(1))}\to 0, \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

С учетом (2.43), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(M_n\le u_n)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\Phi(u_n)^{Z_n}=\mathbf{E}\Lambda(x)^{\zeta}=\left(1+e^{-x}\right)^{-1}.$$

□

Пример 2.2.1.1. Пусть $g(n)\sim Cn^{\alpha}$, $C>0$, $\alpha>0$, тогда

$$m_s(n)\sim n-C^{(s-1)/\alpha}n^s\sim n,\quad \ln g(n)\sim\alpha\ln n,\quad n\to\infty,$$

откуда получаем условие

$$r_k\ln k\to 0,\quad k\to\infty.$$

Интересно, что оно совпадает с условием теоремы 2.2.1.1 (хотя процесс совсем другой), и не зависит от α.

Пример 2.2.1.2. Пусть $g(n)\sim\exp\{cn^{\beta}\}$, $c>0$, $0<\beta<1$, тогда

$$m_s(n)\sim(1-s^{1/\beta})n,\quad \ln g(n)\sim cn^{\beta},\quad n\to\infty,$$

откуда получаем условие

$$r_k=o\left(k^{-\beta}\right),\quad k\to\infty.$$

Здесь уже есть зависимость от β.

2.2.1.3. Надкритические процессы. Рассмотрим надкритический ветвящийся процесс с конечными средним $\mu>1$ и дисперсией σ^2 числа потомков. Напомним, что для таких процессов имеет место предел почти наверное [77, гл. 1, §8]:

$$\frac{Z_n}{\mu^n}\longrightarrow W,\quad n\to\infty, \tag{2.48}$$

причем преобразование Лапласа-Стилтьеса $\varphi(s)=\mathbf{E}e^{-sW}$ однозначно определяется условиями

$$\varphi(\mu s)=f(\varphi(s)),\quad s\ge 0;\quad \varphi'(0)=-1,$$

где f — производящая функция числа потомков. Вероятность вырождения процесса q определяется как единственный корень уравнения $s=f(s)$ на $[0,1)$. Имеем $q<1$ и $p=1-q=\mathbf{P}(W>0)>0$. При этом $\mathbf{P}(Z_n>0)\to p$, $n\to\infty$.

Лемма 2.2.1.4.

$$\mathbf{E}(T(n,k)|Z_n>0)=\mu^{n-1}\frac{\mu^k-1}{\mu-1}\frac{\sigma^2+\mu^2-\mu}{2\mathbf{P}(Z_n>0)} \tag{2.49}$$

Доказательство. Как и в лемме 2.2.1.1, имеем

$$\mathbf{E}T(n,k) = \mathbf{E}Z_{n-k}\mathbf{E}Z_k(Z_k-1)/2.$$

В данном случае, $\mathbf{E}Z_{n-k} = \mu^{n-k}$. Используя известную формулу дисперсии Z_n [77, гл. 1, §5], получаем

$$\mathbf{E}Z_k(Z_k-1) = \frac{\sigma^2\mu^k(\mu^k-1)}{\mu^2-\mu} + \mu^{2k} - \mu^k = (\sigma^2+\mu^2-\mu)\mu^{k-1}\frac{\mu^k-1}{\mu-1},$$

откуда

$$\mathbf{E}T(n,k) = \mu^{n-1}\frac{\mu^k-1}{\mu-1}\frac{\sigma^2+\mu^2-\mu}{2}.$$

А поскольку $T(n,k) = 0$ при $Z_n = 0$, то

$$\mathbf{E}(T(n,k)|Z_n>0) = \frac{\mathbf{E}T(n,k)}{\mathbf{P}(Z_n>0)},$$

что дает (2.49). □

Из леммы 2.2.1.4 следует, что

$$\mathbf{E}(T(n,n)|Z_n>0) \sim C(\mu,\sigma,p)\mu^{2n}, \quad n\to\infty, \tag{2.50}$$

а если взять $m_s(n) = [(1-s)n]$, $0<s<1$, то

$$\mathbf{E}(T(n,m_s(n)|Z_n>0) \sim \mu^{(2-s)n+O(1)} \quad n\to\infty, \tag{2.51}$$

Исходя из асимптотики (2.48), положим $u_n = a(\mu^n)x + b(\mu^n)$, $n\geq 1$. Заметим, что тогда

$$\exp\{-u_n^2\} \sim e^{-2x}\mu^{-2n}(n\ln\mu), \quad n\to\infty. \tag{2.52}$$

Теорема 2.2.1.3. *Пусть* $\sup r_k = \delta < 1$ *и* $r_k = o(1/k)$, $k\to\infty$, *тогда*

$$\mathbf{P}(M_n\leq u_n|Z_n>0) \to \mathbf{E}(\exp\{-e^{-x}W\}|W>0), \quad n\to\infty. \tag{2.53}$$

Доказательство. Используем ту же оценку (2.38), что и в доказательстве теоремы 2.2.1.1. Возьмем $2\delta/(1+\delta) < s < 1$. Пусть $\delta_n = \sup_{k>m_s(n)} r_k$, тогда $\delta_n = o(1/n)$ и $n^{\delta_n}\to 1$, $n\to\infty$. Сумму по дальностям родства разбиваем на две: от 1 до $m_s(n)$ и от $m_s(n)+1$ до n. С помощью (2.50), (2.51) и (2.52) получаем

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{P}(M_n \le u_n | Z_n > 0) - \mathbf{E}(\Phi(u_n)^{Z_n} | Z_n > 0)| \le \\
&\le K(\delta) \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(R(n,k)|Z_n > 0) r_k \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+r_k}\right\} \le \\
&\le K(\delta)\delta \mathbf{E}(T(n, m_s(n)) | Z_n > 0) \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+\delta}\right\} + \\
&+ K(\delta)\delta_n \mathbf{E}(T(n,n)|Z_n > 0) \exp\left\{-\frac{u_n^2}{1+\delta_n}\right\} = \\
&= \mu^{(2-s)n+O(1)} \mu^{(-2/(1+\delta))n(1+o(1))} + o(1/n)\mu^{2n}\mu^{-2n/(1+\delta_n)}(n\ln\mu)^{1/(1+\delta_n)} = \\
&= \mu^{(2\delta/(1+\delta)-s)n(1+o(1))} + o(n^{-\delta_n(1+o(1))})\mu^{2n\delta_n(1+o(1))} \to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

При этом

$$
\mathbf{E}(\Phi(u_n)^{Z_n} | Z_n > 0) \to \mathbf{E}(\Lambda(x)^W | W > 0) = \mathbf{E}(\exp\{-e^{-x}W\} | W > 0)
$$

при $n \to \infty$, что соответствует пределу для максимумов независимых случайных признаков частиц. Отсюда получаем (2.53). □

Общая закономерность, по-видимому, в том, что чем быстрее растет процесс, тем в более близком родстве оказываются частицы одного поколения, и тем быстрее должны убывать корреляции признаков.

2.2.2 Случай тяжелых хвостов

В этом разделе рассмотрен случай, когда признаки частиц имеют тяжелые (правильно меняющиеся) хвосты, а зависимость описывается сначала линейной авторегрессией, а затем максимум-линейной моделью.

Теорема 2.2.2.1 относится к случаю бессмертного надкритического ветвящегося процесса и зависимости признаков по модели линейной авторегрессии. Далее мы вводим максимум-линейную модель формирования признаков. Теорема 2.2.2.2 описывает коэффициенты верхней хвостовой зависимости признаков частиц при известной дальности родства в этом случае. Теорема 2.2.2.3 связывает предельное распределение максимумов со свойствами редуцированного ветвящегося процесса, которая позволяет далее получить результаты для критических, околокритических и надкритических процессов.

2.2.2.1. Модель линейной авторегрессии. Рассмотрим бессмертные надкритические ветвящиеся процессы, в которых признаки имеют распределение с правильно меняющимся хвостом, а наследственность явно описывается процессом линейной авторегрессии первого порядка:

$$
\xi_{n,i} = a\xi_{n-1,\kappa(i,n,n-1)} + b\xi^*_{n,i}, \quad a \in (0,1), \quad b > 0, \tag{2.54}
$$

где $\xi_{n,i}$ — признак i-ой частицы в n-ом поколении, $\kappa(i,n,m)$ — номер предка этой частицы в m-ом поколении, $0 \le m < n$, $1 \le i \le Z_n$, а случайные величины $\xi^*_{n,i}$, $i \ge 1$, $n \ge 1$, независимы и имеют одинаковое распределение A, которое удовлетворяет условиям:

$$\bar{A}(x) \sim x^{-\gamma}L(x), \quad A(-x)/\bar{A}(x) \to r \ge 0, \quad x \to \infty, \quad \gamma > 0, \qquad (2.55)$$

где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция [76, гл. 8, §8]. Этим условиям, в частности, удовлетворяют устойчивые распределения [21, 100] с показателями $\gamma \in (0,2)$, распределения Парето, лог-гамма и др.

Определим также положительную функцию $v(s)$, $s > 0$, такую, что $s\bar{A}(v(s)) \to 1$, $s \to \infty$. Заметим, что $v(s)$ заведомо существует и правильно меняется с показателем $1/\gamma$, т.е. $v(s) \sim s^{1/\gamma}L_2(s)$, $s \to \infty$, где $L_2(s)$ — медленно меняющаяся функция [73, §1.5].

В модели (2.55) существует и единственно стационарное распределение F, совпадающее с распределением случайного ряда

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} ba^k\eta_k,$$

где η_k независимы и имеют распределение A. По лемме A3.26 [107, с. 583] получаем асимптотические соотношения:

$$\bar{F}(x) \sim \frac{b^\gamma}{1-a^\gamma}\bar{A}(x), \quad F(-x)/\bar{F}(x) \to r, \quad x \to \infty.$$

Предполагается, что все признаки частиц имеют стационарное распределение. Для выявления роли наследственности "в чистом виде" желательно обеспечить независимость распределения признаков от коэффициентов авторегрессии (как это имело место в гауссовском случае). Здесь можно добиться этого только для строго устойчивых распределений [21, 100] с показателем $0 < \gamma < 2$, полагая

$$a^\gamma + b^\gamma = 1. \qquad (2.56)$$

Для произвольных A, удовлетворяющих (2.55), условие (2.56) обеспечивает асимптотическую эквивалентность хвостов: $\bar{F}(x) \sim \bar{A}(x)$, $x \to \infty$. Будем предполагать, что это условие выполнено.

Теорема 2.2.2.1. *При условиях* (2.54) *и* (2.55) *верно*

$$\mathbf{P}(M_n \le xv(\mu^n)|Z_n > 0) \to \mathbf{E}\exp\{-\theta W x^{-\gamma}\} = \varphi(\theta x^{-\gamma}), \quad x > 0, \quad (2.57)$$

где $\theta = b^\gamma/(1-a^\gamma/\mu)$.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{M}_k$ максимум признака в k-родственной группе ($k < n$) при условии, что ее основатель (общий предок в k-ом поколении) произошел от матери с признаком, равным нулю. Тогда легко получить рекуррентную формулу

$$\tilde{M}_k \overset{d}{=} \bigvee_{i=1}^{\nu} \tilde{M}_{k-1}^{(i)} + ba^k\xi, \quad \tilde{M}_0 = b\xi,$$

где $\tilde{M}_k^{(i)}$, ξ, ν независимы, $\tilde{M}_k^{(i)} \overset{d}{=} \tilde{M}_k$, $\xi \overset{d}{=} \xi_{1,1}$, ν имеет распределение числа непосредственных потомков.

Воспользовавшись известными свойствами распределений с правильно меняющимися хвостами [76, гл. 8, §8], получаем

$$\mathbf{P}(\tilde{M}_k > x) \sim c_k\bar{F}(x), \quad x \to \infty; \quad c_k = \mu c_{k-1} + (ba^k)^\gamma, \quad c_0 = b^\gamma,$$

откуда следует асимптотика

$$c_k \sim \theta\mu^k, \quad k \to \infty. \tag{2.58}$$

Для стохастического оценивания M_n снизу разобъем популяцию на k-родственные группы, порожденные частицами $(n-k)$-го поколения. Рассмотрев два случая: когда все признаки частиц $(n-k-1)$-го поколения не менее $-v(\mu^n)$ и когда хотя бы один из них меньше, получаем оценку

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(M_n \le xv(\mu^n)) \le \\ &\le \mu^{n-(k+1)}F(-v(\mu^n)) + \mathbf{E}(\mathbf{P}^{Z_{n-k}}(\tilde{M}_k \le (x + a^{k+1})v(\mu^n))) \to \\ &\to \mu^{-(k+1)}rb^\gamma/(1-a^\gamma) + \mathbf{E}\exp\{-c_k\mu^{-k}W(x+a^{k+1})^{-\gamma}\}, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Переходя к пределу по $k \to \infty$ с учетом (2.58), получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \le xv(\mu^n)) \le \mathbf{E}\exp\left\{-\theta W x^{-\gamma}\right\},$$

Для получения стохастической оценки M_n сверху заметим, что максимумы признаков по отдельным k-родственным группам положительно зависимы (ассоциированы) между собой как возрастающие функции от независимых величин $\{\xi_{m,n}\}$ [5, теорема 1.8], [109]. Поэтому их общий максимум (по всему поколению) стохастически оценивается сверху максимумом случайных величин с теми же распределениями, но независимыми. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(M_n \le xv(\mu^n)) \ge \mathbf{E}(\mathbf{P}^{Z_{n-k}}(\tilde{M}_k + a^{k+1}\xi \le xv(\mu^n))) \to \\ &\to \mathbf{E}\exp\left\{-(c_k + a^{\gamma(k+1)})\mu^{-k}Wx^{-\gamma}\right\}, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Переходя к пределу по $k \to \infty$ с учетом (2.58), получаем

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \leq xv(\mu^n)) \geq \mathbf{E}\exp\left\{-\theta W x^{-\gamma}\right\},$$

Совпадение верхнего и нижнего пределов доказывает теорему. □

При условии (2.56) получаем $\theta = (1-a^\gamma)/(1-a^\gamma/\mu)$. Таким образом, наследственность приводит к появлению в асимптотике максимумов дополнительного множителя (от 0 до 1) по сравнению с максимумами независимых величин, причем этот множитель убывает с ростом коэффициента a. Подобный эффект выглядит вполне естественно: чем сильнее наследственность, тем меньше разброс признака в поколении и, соответственно, меньше максимум.

К сожалению, для более широкого класса ветвящихся процессов этот подход не работает, и мы перейдем от линейной авторегрессии к другой модели.

2.2.2.2. Максимум-линейная модель. Предположим, что признаки частиц формируются максимум-линейными комбинациями независимых случайных факторов, связанных с самой частицей и всеми ее предками, а также общим прошлым до начала процесса. В эту схему укладываются и максимум-авторегрессия (любого порядка), и скользящий максимум по нескольким поколениям, в том числе сестринская зависимость. При этом возникающая зависимость признаков частиц в поколении просто описывается коэффициентами верхней хвостовой зависимости (см. с. 74 и [134, §5.4]) вместо коэффициентов корреляции, удобных в гауссовской модели.

Докажем общую теорему, связывающую асимптотическое поведение максимумов признаков с конечномерными распределениями редуцированного ветвящегося процесса. В качестве примеров рассмотрим те же критические, околокритические и надкритические процессы, что были введены ранее в разделе 2.2.1. Отметим, что для надкритических процессов здесь можно отказаться от конечной дисперсии.

Для более естественной линейной модели, по-видимому, должны иметь место такие же результаты, однако их доказательство гораздо более затруднительно.

Положим $\kappa(i,n,n) = i$ и $\kappa(i,n,m) = 1$ при $m < 0$.

Пусть задано распределение A на $\mathbf{R}_+$ с правильно меняющимся хвостом, а именно, $\bar{A}(x) \sim x^{-\gamma}L(x)$, $x \to \infty$, где L — медленно меняющаяся функция, $\gamma > 0$. Тогда для любого $c > 0$ верно

$$\bar{A}(x/c) \sim c^\gamma \bar{A}(x), \quad x \to \infty. \tag{2.59}$$

Пусть $v(s)$ — положительная функция, такая, что верно $s\bar{A}(v(s)) \to 1$, $s \to \infty$. Заметим, что $v(s)$ заведомо существует и является правильно меняющейся с показателем $1/\gamma$ [73, §1.5].

Предположим, что признак i-ой частицы n-го поколения задан формулой

$$\xi_{n,i} = \bigvee_{k=0}^{\infty} a_k \eta_{n-k,\kappa(i,n,n-k)}, \tag{2.60}$$

где случайные величины $\eta_{n,i}$, $n \in \mathbf{Z}$, $i \geq 1$, независимы и имеют распределение A, и a_k, $k \geq 0$, — неотрицательная числовая последовательность, удовлетворяющая условию нормировки

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\gamma} = 1. \tag{2.61}$$

Тогда в силу (2.60) все признаки частиц имеют одинаковое распределение

$$F(x) = \prod_{k=0}^{\infty} A\left(\frac{x}{a_k}\right),$$

которое в силу (2.59) и (2.61) имеет хвост $\bar{F}(x) \sim \bar{A}(x)$, $x \to \infty$, а в случае $A(x) = \exp\{-(x/c)^{-\gamma}\}$, $x > 0$, $c > 0$ (распределение Фреше) верно даже равенство $F = A$. В силу эквивалентности хвостов

Возникающая при этом зависимость признаков частиц в поколении проще всего характеризуется коэффициентами верхней хвостовой зависимости (см. с. 74). Напомним, что согласно [134, §5.4] таким коэффициентом для пары случайных величин (X, Y) с распределениями F и G называется предел

$$\lambda_U = \lim_{t \to 1-0} \mathbf{P}(Y > G^{-1}(t) | X > F^{-1}(t)),$$

если он существует. Будем использовать эквивалентное представление

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \to 1-0} \frac{1 - \mathbf{P}(X \leq F^{-1}(t), Y \leq G^{-1}(t))}{1-t}. \tag{2.62}$$

Теорема 2.2.2.2. *Коэффициент верхней хвостовой зависимости признаков частиц, имеющих ближайшего общего предка k поколений назад, равен*

$$\lambda_U(k) = \sum_{j=k}^{\infty} a_j^{\gamma}, \quad k \geq 1.$$

Доказательство. Указанные признаки частиц X и Y формируются максимумами из общей части, относящейся к поколениям до $(n-k)$-го включительно, и независимых частей, относящихся к последним k поколениям, включая текущее. Таким образом, получаем

$$\mathbf{P}(X \le u, Y \le u) = \prod_{j=k}^{\infty} A\left(\frac{u}{a_j}\right) \left\{\prod_{j=0}^{k-1} A\left(\frac{u}{a_j}\right)\right\}^2 = F(u) \prod_{j=0}^{k-1} A\left(\frac{u}{a_j}\right),$$

откуда в силу (2.59) следует

$$1 - \mathbf{P}(X \le u, Y \le u) \sim \left(1 + \sum_{j=0}^{k-1} a_j^{\gamma}\right) \bar{A}(u), \quad u \to \infty.$$

С помощью (2.62) получаем утверждение теоремы. □

Таким образом, для любой невозрастающей последовательности $\lambda_k \in (0,1)$, $k \ge 1$, стремящейся к нулю, можно взять $a_0 = (1-\lambda_1)^{1/\gamma}$ и $a_k = (\lambda_k - \lambda_{k+1})^{1/\gamma}$, $k \ge 1$, и тогда будет выполняться $\lambda_U(k) = \lambda_k$ для всех $k \ge 1$.

Рассмотрим, в частности, модель максимум-авторегрессии первого порядка

$$\xi_{n,i} = a\xi_{n-1,\kappa(i,n,n-1)} \vee b\xi^*_{n,i}, \quad a \in (0,1), \quad b > 0, \tag{2.63}$$

где $\xi_{n,i}$ — признак i-ой частицы в n-ом поколении, а случайные величины $\xi^*_{n,i}$ независимы и имеют распределение A.

Тогда при $b = (1-a^{\gamma})^{1/\gamma}$ модель эквивалентна (2.60) с $a_k = ba^k$, и $\lambda_U(k) = a^{\gamma k}$, $k \ge 1$, по теореме 2.2.2.2.

Пусть $Z(m,n)$ — число частиц ветвящегося процесса в момент $m \le n$, которые имеют непустое потомство в момент n. Процесс $Z(m,n), 0 \le m \le n$ называется редуцированным процессом[3] [6, §10].

Теорема 2.2.2.3. *Пусть для любого $K \ge 1$ верно*

$$((Z(n-k,n)/c_n)_{0\le k\le K} | Z_n > 0) \xrightarrow{d} \zeta(b_k)_{0\le k\le K}, \quad n \to \infty, \tag{2.64}$$

где ζ — положительная случайная величина, $b_k \ge 0$, $k \ge 0$, и $c_n > 0$, $n \ge 1$, — некоторые числовые последовательности, $c_n \to +\infty$, $n \to \infty$, и $u_n = xv(c_n)$, $n \ge 1$, $x > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n \le u_n | Z_n > 0) \to \mathbf{E}\exp\{-\theta x^{-\gamma}\zeta\}, \quad n \to \infty, \tag{2.65}$$

[3] При $m = n$ полагают $Z(n,n) = Z_n$.

где

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\gamma} b_k. \tag{2.66}$$

Доказательство. Прежде всего, из (2.60) получаем

$$M_n \stackrel{d}{=} \bigvee_{k=0}^{\infty} \left(a_k \bigvee_{l=1}^{Z(n-k,n)} \eta_{k,l} \right),$$

полагая $Z(m,n) = 1$ при $m < 0$.

Пусть $1 \le K \le n$. Определим

$$\begin{aligned} M_n^- &= \bigvee_{k=0}^{K} \left(a_k \bigvee_{l=1}^{Z(n-k,n)} \eta_{k,l} \right), \\ M_n^+ &= \left(\bigvee_{k=K+1}^{\infty} \left(a_k \bigvee_{l=1}^{Z(n-K,n)} \eta_{k,l} \right) \right) \vee \left(\bigvee_{k=0}^{K} \left(a_k \bigvee_{l=1}^{Z(n-k,n)} \eta_{k,l} \right) \right), \end{aligned} \tag{2.67}$$

тогда[4] $M_n^- \le_d M_n \le_d M_n^+$, поскольку $Z(n-k,n)$ не возрастает по k. В силу этого же факта последовательность b_k, $k \ge 1$, является неубывающей.

Тогда из (2.64) и (2.67) следует

$$\begin{aligned} &\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \le u_n | Z_n > 0) \ge \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n^+ \le u_n | Z_n > 0) = \\ &= \mathbf{E} \exp\left\{ -\left(\lambda_U (K+1) b_K + \sum_{k=0}^{K} a_k^{\gamma} b_k \right) x^{-\gamma} \zeta \right\}, \\ &\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \le u_n | Z_n > 0) \le \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n^- \le u_n | Z_n > 0) = \\ &= \mathbf{E} \exp\left\{ -\left(\sum_{k=0}^{K} a_k^{\gamma} b_k \right) x^{-\gamma} \zeta \right\}, \end{aligned}$$

откуда переходя к пределу по $K \to \infty$ получаем (2.65). □

Пример 2.2.2.1А. Для критических процессов с конечной дисперсией числа потомков σ^2, согласно [112], имеем $c_n = n$, $\zeta \sim \mathrm{Exp}(1/B)$, $B = \sigma^2/2$, $b_k = \mathbf{P}(Z_k > 0) = 1 - f^{(k)}(0)$, где $f^{(k)}$ — k-ая итерация производящей функции числа потомков, поэтому

$$\mathbf{P}(M_n \le x v(n) | Z_n > 0) \to \left(1 + \theta B x^{-\gamma}\right)^{-1}, \quad n \to \infty,$$

[4] Здесь через $\le_d$ обозначено отношение стохастического порядка случайных величин: $X \le_d Y$, если $\mathbf{P}(X > u) \le \mathbf{P}(Y > u)$.

где
$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\gamma}(1 - f^{(k)}(0)). \tag{2.68}$$

Так, в модели максимум-авторегрессии, если распределение числа потомков геометрическое (начиная от нуля), то $1 - f^{(k)}(0) = 1/(k+1)$ и
$$\theta = -(1 - a^{\gamma})\frac{\ln(1 - a^{\gamma})}{a^{\gamma}}. \tag{2.69}$$

При $a \to 0$ получаем $\theta \to 1$, а при $a \to 1$ верно $\theta \to 0$, как и следовало ожидать.

Пример 2.2.2.1B. Для критических процессов с бесконечной дисперсией числа потомков, когда $f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha}L(1-s)$, где $\alpha \in (0,1]$, $L(t)$ — медленно меняющаяся в нуле функция [73], согласно [84], имеем $b_k = \mathbf{P}(Z_k > 0) = 1 - f^{(k)}(0)$, $c_n = 1/b_n$, $\mathbf{E}e^{-t\zeta} = 1 - (1 + t^{-\alpha})^{-1/\alpha}$, поэтому
$$\mathbf{P}(M_n \le xv(c_n)|Z_n > 0) \to \left(1 + \theta x^{-\gamma\alpha}\right)^{-1/\alpha}, \quad n \to \infty,$$
где θ также описывается (2.68), причем $b_n \sim n^{-1/\alpha}L_1(n)$, $n \to \infty$, где $L_1(x)$ медленно меняется на бесконечности [7, §3.1.2].

Пример 2.2.2.2. Для околокритических процессов имеем $c_n = g(n)$, $\zeta \sim \mathrm{Exp}(1)$, $b_k \equiv 1$. Это следует из (2.43) с заменой n на $n - K$ и того, что в силу закона больших чисел,
$$((Z_{n-k}/m)_{0\le k\le K}|Z_{n-K} = m) \to (g(n-k)/g(n-K))_{0\le k\le K}, \quad m \to \infty,$$
но $g(n-k)/g(n-K) \to 1$, $n \to \infty$, для всех $0 \le k \le K$. В силу (2.61) получаем $\theta = 1$ и
$$\mathbf{P}(M_n \le xv(g(n))) \to \left(1 + x^{-\gamma}\right)^{-1}, \quad n \to \infty.$$

Пример 2.2.2.3. Для надкритических процессов в силу (2.48) и согласно [85] имеем $c_n = \mu^n$, $\zeta \overset{d}{=} (W|W > 0)$, $b_k = \mu^{-k}$. Поэтому
$$\mathbf{P}(M_n \le xv(\mu^n)|Z_n > 0) \to \mathbf{E}(\exp\{-\theta x^{-\gamma}W\}|W > 0), \quad n \to \infty,$$
где
$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\gamma}\mu^{-k}.$$

В частности, в модели максимум-авторегрессии получаем
$$\theta = (1 - a^{\gamma})/(1 - a^{\gamma}/\mu). \tag{2.70}$$

что совпадает с результатом теоремы 2.2.2.1 для модели линейной авторегрессии.

Заметим, что, как известно, для выполнения (2.48) не обязательно наличие конечной дисперсии, достаточно условия $\mathbf{E}Z_1 \ln_+ Z_1 < \infty$ [7, §3.5], и наш результат останется верным.

Иногда предельное распределение можно найти в явном виде. В [77, гл. 1, §7.1] приведен пример дробно-линейной производящей функции

$$f(s) = 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs}, \quad b, c > 0, \quad b + c \leq 1,$$

(модель Лотки для числа потомков по мужской линии), в случае которой

$$\mu = \frac{b}{(1-c)^2},$$

и при $\mu > 1$ вероятность вырождения

$$q = \frac{1-(b+c)}{c(1-c)}.$$

Тогда согласно [77, гл. 1, §8.5] условное распределение $(W|W > 0)$ оказывается показательным с параметром $p = 1 - q$, так что

$$\mathbf{P}(M_n \leq xv(\mu^n)|Z_n > 0) \to \left(1 + \theta x^{-\gamma}/p\right)^{-1}, \quad n \to \infty.$$

Возникшее предельное распределение называют лог-логистическим или распределением Фиска (в экономике).

На рис. 2.6 представлены графики $\theta(a)$: пример 2.2.2.1A (2.69) с $\gamma = 2$ пунктиром, пример 2.2.2.3 (2.70) с $\gamma = 2$, $\mu = 3$ сплошной линией.

2.2.3 Случай сестринской зависимости

Под сестринской зависимостью, следуя примеру из [77, гл. 6, §28.2], будем понимать ситуацию, в которой признаки сестер зависимы между собой, но не зависят от признаков их матери и признаков других частиц.

Рассмотрим модель при минимальных ограничениях на характеристики ветвящегося процесса, распределения признаков и др. В предположении, что $Z_0 = n$, изучим асимптотическое поведение максимумов признаков частиц первого поколения при $n \to \infty$.

Теорема 2.2.3.1 утверждает, что при нулевом индексе верхней хвостовой зависимости, максимумы ведут себя как в случае независимых

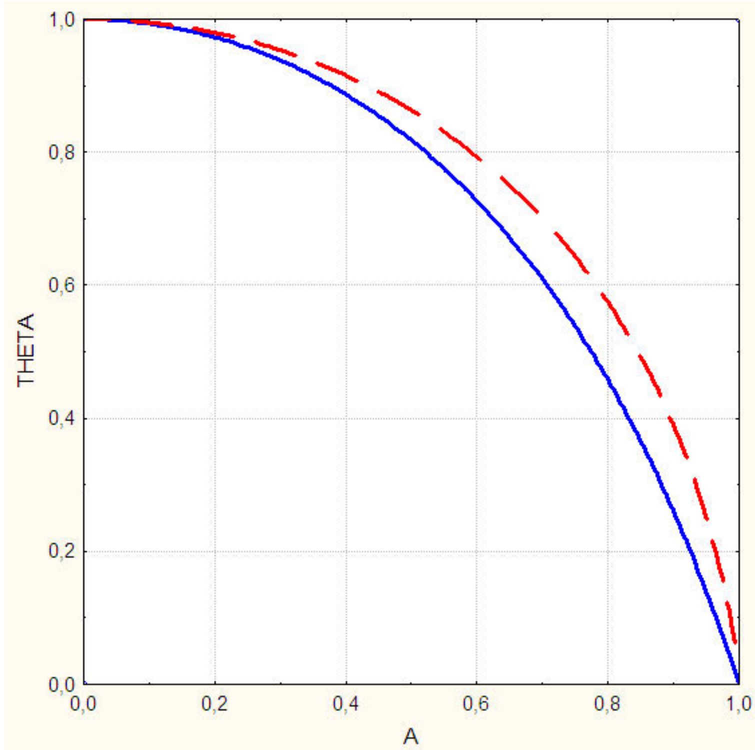

Рис. 2.6: показатели $\theta(a)$

признаков. Теорема 2.2.3.2 относится к случаю, когда признаки сестер связаны строго архимедовой копулой, что сказывается на асимптотическом поведении максимумов.

В модели сестринской зависимости максимум признаков частиц первого поколения M_n^* представляет собой максимум n независимых случайных величин, распределенных как $Y = \vee_{i=1}^{\nu} X_i$, где ν имеет распределение числа потомков, а $X_1, \ldots, X_\nu$ имеют совместное распределение как признаки сестер. Будем предполагать, что $0 < \mu < \infty$, а случайные величины $X_1, \ldots, X_\nu$ симметрично зависимы и каждая имеет распределение F, причем совместное распределение любой пары не зависит от ν (при $\nu \geq 2$). Обозначим распределение Y через G. Если $\nu = 0$, то полагаем $Y = -\infty$, так что распределение G может быть несобственным. Но поскольку $\mathbf{P}(Z_1 > 0) \to 1$ при $n \to \infty$, то предельное распределение M_n^* (при соответствующей нормировке) будет собственным, и нет смысла вводить условные вероятности с условием $Z_1 > 0$ (для $M_n^* > -\infty$).

Пусть для каждого $s \in (0,1)$ существует такая последовательность $u_n(s)$, что $F(u_n(s))^{\mu n} \to s$, что эквивалентно $n\bar{F}(u_n(s)) \to (-\ln s)/\mu$, а в рассматриваемой модели также эквивалентно $\mathbf{E}F(u_n(s))^{Z_1} \to s$, $n \to \infty$, по закону больших чисел.

Напомним, что согласно [54, теорема 1.7.13], если $0 < \tau < \infty$, то последовательность u_n, удовлетворяющая $n\bar{F}(u_n) \to \tau$, существует тогда и только тогда, когда

$$\frac{1 - F(x)}{1 - F(x - 0)} \to 1, \quad x \to x_\omega = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

При этом распределение F не обязано принадлежать области притяжения какого-либо максимум-устойчивого закона при линейной нормировке. Таким образом, мы не накладываем на признаки ни условий нормальности (как в разделе 2.2.1), ни правильно меняющихся хвостов (как в разделе 2.2.2).

Обозначим через λ_U коэффициент верхней хвостовой зависимости между признаками любых двух сестер (см. с. 74, 102 и [134, §5.4]).

Теорема 2.2.3.1. *Если* $\lambda_U = 0$ *и* $\sigma^2 < \infty$, *то* $\mathbf{P}(M_n^* \le u_n(s)) \to s$, $n \to \infty$.

Доказательство. Используя неравенства Бонферрони

$$k\bar{F}(x) - \frac{k(k-1)}{2}\mathbf{P}(X_1 > x, X_2 > x) \le 1 - \mathbf{P}(Y > x|\nu = k) \le k\bar{F}(x)$$

при $k \ge 2$ и равенство $\mathbf{P}(Y > x|\nu = 1) = \bar{F}(x)$, усреднением по ν получаем

$$\mu\bar{F}(x) - \frac{\sigma^2 + \mu^2 - \mu}{2}\mathbf{P}(X_1 > x, X_2 > x) \le \bar{G}(x) \le \mu\bar{F}(x).$$

Поскольку из-за $\lambda_U = 0$ верно $\mathbf{P}(X_1 > x, X_2 > x) = o(\bar{F}(x))$, $u \to \infty$, то получаем $\bar{G}(x) \sim \mu\bar{F}(x)$, $x \to \infty$, и $\mathbf{P}(M_n^* \le u_n(s)) = G(u_n(s))^n \to s$, $n \to \infty$. □

Условие $\lambda_U = 0$ выполнено, например, если признаки сестер имеют совместное нормальное распределение с любым коэффициентом корреляции $|\rho| < 1$.

Утверждение теоремы означает, что максимумы признаков ведут себя асимптотически так же, как в случае независимых признаков.

Рассмотрим теперь случай, когда признаки сестер связаны строго архимедовой копулой. Напомним соответствующие понятия согласно [134] (определение и примеры копул см. на с. 73).

Строго архимедовой копулой называется копула вида

$$C_d(y_1, \ldots, y_d) = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{d} g(y_i)\right), \tag{2.71}$$

где g — убывающая функция на $[0,1]$, называемая генератором, $g(0) = +\infty$, $g(1) = 0$. При $d = 2$ достаточно, чтобы эта функция была выпуклой. Если потребовать еще, чтобы функция g^{-1} была вполне монотонной на $(0, +\infty)$, то формула (2.71) определяет копулу при любом $d \geq 2$ [134, теорема 4.6.2]. Напомним, что вполне монотонной на J называется функция f, если она удовлетворяет условиям

$$(-1)^k \frac{d^k f(x)}{dx^k} \geq 0, \quad x \in J, \quad k \geq 0.$$

Итак, предположим, что копула совместного распределения $X_1, \ldots, X_\nu$ при условии $\nu = d \geq 1$ задается (2.71).

Теорема 2.2.3.2. *Если $g(y) \sim c(1-y)^\gamma$, $y \to 1-0$, то $\mathbf{P}(M_n^* \leq u_n(s)) \to s^\theta$, $n \to \infty$, где $\theta = \mathbf{E}\nu^{1/\gamma}/\mu$.*

Доказательство. Из условия получаем $1 - g^{-1}(t) \sim (t/c)^{1/\gamma}$, $t \to 0+0$, и

$$1 - C_d(1-\varepsilon, \ldots, 1-\varepsilon) \sim d^{1/\gamma}\varepsilon, \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.72}$$

Переходя к распределению Y и усредняя по ν, получаем

$$\bar{G}(u_n(s)) = 1 - \mathbf{E}C_\nu(F(u_n(s)), \ldots, F(u_n(s)) \sim \mathbf{E}\nu^{1/\gamma}\bar{F}(u_n(s)), \quad n \to \infty,$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Заметим, что в силу выпуклости g возможно только $\gamma \geq 1$, и существование $\mathbf{E}\nu^{1/\gamma}$ следует из $\mu < \infty$.

В качестве копулы, удовлетворяющей условию теоремы 2.2.3.2 с $\gamma > 1$, можно назвать, например, копулу Гумбеля-Хоугаарда с $g(y) = (-\ln y)^\gamma$:

$$C_d(y_1, \ldots, y_d) = \exp\left\{-\left(\sum_{i=1}^d (-\ln y_i)^\gamma\right)^{1/\gamma}\right\}, \quad \gamma \geq 1.$$

Напротив, копулы Клейтона и Франка, например (см. [130, табл. 5.5] и с. 126), удовлетворяют условию теоремы 2.2.3.1: для них $\lambda_U = 0$.

Интересно выяснить, как связаны показатели γ и λ_U для строго архимедовых копул. С помощью (2.62) и (2.72) получаем $\lambda_U = 2 - 2^{1/\gamma}$. Отсюда $\gamma = 1/\log_2(2-\lambda_U)$. Таким образом,

$$\theta = \mathbf{E}\nu^{\log_2(2-\lambda_U)}/\mu,$$

и θ убывает от 1 до $\mathbf{P}(\nu > 0)/\mu$ с ростом λ_U от 0 до 1.

Пример 2.2.3.1 Пусть $\mathbf{P}(\nu = 1) = p_1$, $\mathbf{P}(\nu = 2) = p_2$, $p_1 + p_2 = 1$, тогда зависимость оказывается самой простой — линейной:

$$\theta = \frac{p_1 + p_2(2 - \lambda_U)}{p_1 + 2p_2}.$$

Пример 2.2.3.2 Пусть $\mathbf{P}(\nu = k) = k^{-r}/\zeta(r)$, $k \geq 1$, $r > 2$, где $\zeta(r) = 1/\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}$ — дзета-функция Римана. Тогда получаем

$$\theta = \frac{\zeta(r - 1/\gamma)}{\zeta(r-1)} = \frac{\zeta(r - \log_2(2 - \lambda_U))}{\zeta(r-1)}.$$

Пример 2.2.3.3 Пусть $\mathbf{P}(\nu = 2^k) = pq^k$, $k \geq 0$, $p+q = 1$, $0 < q < 1/2$, тогда

$$\theta = \frac{1 - 2q}{1 - (2 - \lambda_U)q} = \left(1 + \frac{q}{1 - 2q}\lambda_U\right)^{-1}.$$

На рис. 2.7 представлены графики $\theta(\lambda_U)$: пример 2.2.3.2 с $r = 5/2$ сплошной линией, пример 2.2.3.3 с $q = 1/4$ крупным пунктиром.

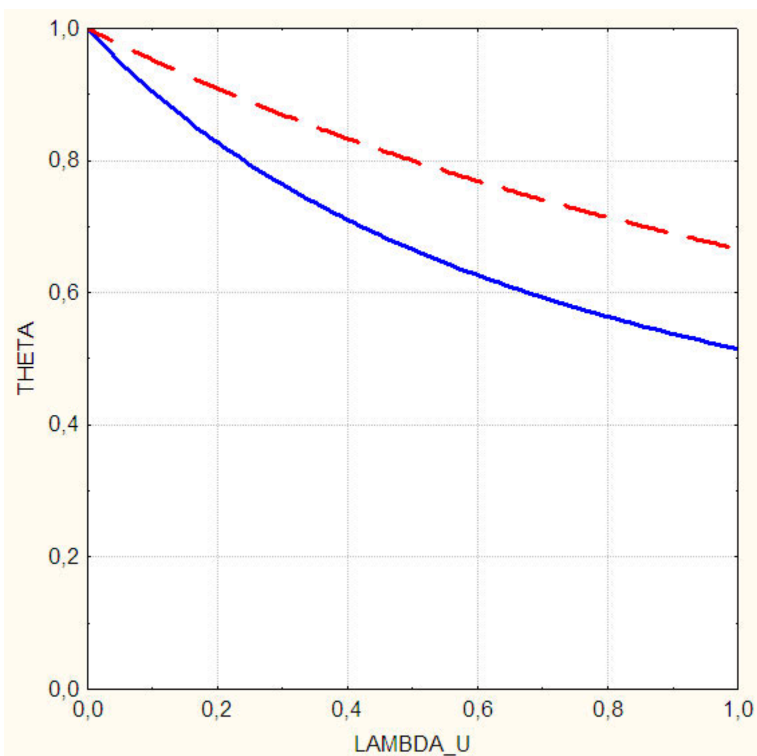

Рис. 2.7: показатели $\theta(\lambda_U)$

Заметим, что утверждение теоремы 2.2.3.2 сформулировано в общем виде, но из него легко получить следствия для частных случаев.

Например, если F — стандартное нормальное распределение (как в разделе 2.2.1), то

$$\mathbf{P}(M_n^* \le a(\mu n)x + b(\mu n)) \to \exp\{-\theta e^{-x}\}, \quad n \to \infty,$$

где $a(n)$ и $b(n)$ определены в (2.36).

Если же $\bar{F}(x) \sim x^{-\alpha}L(x)$, $x \to \infty$, где L — медленно меняющаяся функция, $\alpha > 0$, и $v(r)$ — положительная функция такая, что верно $r\bar{F}(v(r)) \to 1$, $r \to \infty$ (аналогично разделу 2.2.2), то

$$\mathbf{P}(M_n^* \le xv(\mu n)) \to \exp\{-\theta x^{-\alpha}\}, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, получаем максимум-устойчивые законы Гумбеля и Фреше с некоторым параметром θ, возможная интерпретация которого будет дана в разделе 3.2.

Глава 3

Экстремальные индексы в схеме серий

В этой главе мы введем (двумя определениями) экстремальные индексы в схеме серий со случайными длинами, применимые к широкому классу систем случайных величин, взятых в случайном количестве. Будет показано, как с помощью экстремальных индексов можно интерпретировать результаты предыдущих глав, а также будут получены новые результаты для моделей с копулами и пороговых моделей.

Тем самым делается новый шаг в обобщении и развитии понятия экстремального индекса как средства описания влияния зависимости случайных величин на асимптотическое поведение их максимумов.

В разделе 3.1 даны определения и основные свойства экстремальных индексов, в разделе 3.2. рассмотрены их приложения к моделям информационных сетей (раздел 1.3) и признакам частиц в ветвящихся процессах (раздел 2.2), в разделе 3.3 к моделям с копулами, в разделе 3.4 к пороговым моделям.

3.1 Определения и основные свойства

Экстремальный индекс стационарной (в узком смысле) случайной последовательности $\{\xi_n\}$ определяется следующим образом [54, §3.7].

Определение A. *Пусть* ξ_n, $n \geq 1$, *имеют распределение* F *и* $M_n = \vee_{k=1}^{n} \xi_k$. *Если для каждого* $\tau > 0$ *существует такая числовая последовательность* $u_n(\tau)$, *что* $n\bar{F}(u_n(\tau)) \to \tau$ *и* $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(\tau)) \to e^{-\theta\tau}$, *то* θ *называется экстремальным индексом.*

При этом возможно любое значение $\theta \in [0, 1]$.

Заметим, что если взять максимумы $\hat{M}_n$ последовательности независимых случайных величин с тем же распределением F, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \le u_n(\tau)) = e^{-\tau},$$

откуда следует

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \le u_n(\tau)) = \left(\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \le u_n(\tau))\right)^{\theta}, \tag{3.1}$$

т.е. предельные функции распределения M_n и $\hat{M}_n$ связаны степенной зависимостью,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \le u_n(\tau)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_{[\theta n]} \le u_n(\tau)), \quad \theta > 0, \tag{3.2}$$

т.е. M_n растет асимптотически как максимум $[\theta n]$ независимых случайных величин при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \le u_n(\tau)) \ge \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \le u_n(\tau)), \tag{3.3}$$

т.е. M_n стохастически не превосходит максимума независимых случайных величин (в пределе).

Интерес к экстремальному индексу связан отчасти с тем, что его наличие сохраняет экстремальный тип предельного распределения максимумов. Напомним, что если для некоторых числовых последовательностей $a_n > 0$, b_n, $n \ge 1$, и невырожденного распределения G имеет место предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \le a_n x + b_n) = G(x), \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

то G относится к одному из трех экстремальных типов, а именно, $G(x) = G_i(ax + b)$ для некоторых $a > 0$ и b, где $G_1(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ (тип Гумбеля), $G_2(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$, $x > 0$, $\alpha > 0$ (тип Фреше), $G_3(x) = \exp\{-(-x)^{\alpha}\}$, $x \le 0$, $\alpha > 0$ (тип Вейбулла). Такие распределения G называют максимум-устойчивыми или распределениями экстремальных значений. Для любого $s > 0$ существуют такие $a(s) > 0$, $b(s)$, что $G^s(x) = G(a(s)x + b(s))$. Таким образом, возведение в степень $\theta > 0$ предельной функции распределения, возникающее в силу свойства (3.1), сохраняет экстремальный тип.

Одна из интерпретаций экстремального индекса заключается в том, что превышения высокого уровня в последовательности происходят не по одиночке, а группами (кластерами) средней величины $1/\theta$. В приложениях это может означать природные катастрофы, отказы технических систем, потерю данных при передаче информации, финансовые потери и др. Понятно, что когда такие события происходят несколько раз подряд, это гораздо опаснее, чем единичные случаи, и должно учитываться в управлении рисками.

Более подробно об этом можно прочитать в [9, 54, 107, 118].

С 1980-х годов активные исследования в данной области ведутся в двух главных направлениях: вычисление экстремального индекса для различных случайных последовательностей и разработка статистических оценок экстремального индекса по наблюдениям.

С обзором результатов и библиографией можно ознакомиться, например, в [107, §8.1] и [118, §5.5]. Некоторым обобщениям классического понятия экстремального индекса и его статистическим оценкам посвящен раздел диссертации [60, §1.2]. В частности, можно дать следующее определение.

Определение Б. *Пусть ξ_n, $n \geq 1$, имеют распределение F и $M_n = \vee_{k=1}^{n} \xi_k$. Если для каждой числовой последовательности u_n, $n \geq 1$, такой, что*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) \leq \limsup_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) < \infty$$

верно $\mathbf{P}(M_n \leq u_n) - F(u_n)^{\theta n} \to 0$, $n \to \infty$, то θ называется экстремальным индексом.

Такое определение позволяет расширить понятие экстремального индекса на некоторые стационарные последовательности случайных величин с дискретным распределением (например, геометрическим), а для непрерывных эквивалентно определению А.

Исследованиями экстремумов и превышений высокого уровня в связи с моделями телекоммуникаций посвящены работы [127, 128], а в [90, 91] изучались распределения и зависимость экстремумов в процессах выборочного исследования информационных сетей (network sampling processes), в том числе, экстремальные индексы. В [127] также получено геометрическое предельное распределение размеров кластеров при некоторых условиях.

В диссертации [13] получены новые интересные результаты об экстремальных индексах последовательностей вида

$$X_n = A_n X_{n-1} + B_n,$$

где (A_n, B_n), $n \geq 1$, — независимые случайные пары со значениями в $\mathbf{R}_+^2$. Часть результатов представлена в [14, 15]. В некоторых случаях найдены в явном виде экстремальные индексы и распределения размеров кластеров превышений высокого уровня, в более общем случае получены верхние и нижние границы для экстремального индекса. Доказана непрерывность экстремального индекса относительно некоторой сходимости распределений коэффициентов. Введены и изучены индексы многомерных последовательностей с тяжелыми хвостами.

Однако на практике существует необходимость в изучении максимумов на более сложных структурах, чем множество натуральных чисел. Связанные с этим трудности обсуждались еще в [9, §3.9, §3.12]. Например, если речь идет о продолжительностях жизни компонент сложной системы (надежностной схемы), то непонятно, как пронумеровать их так, чтобы использовать модель стационарной последовательности, да и возможно ли это вообще. Несколько проще обстоит дело со случайными полями.

Экстремальный индекс естественным образом обобщается со случайных последовательностей на случайные поля на решетках $\mathbf{N}^d$ [105]. Пусть, например, задано такое поле $\{\xi_{n_1,n_2}\}$ в $\mathbf{N}^2$ и $M_{n_1,n_2} = \vee_{k_1=1}^{n_1} \vee_{k_2=1}^{n_1} \xi_{k_1,k_2}$. Тогда если для каждого $\tau > 0$ существует такое $u_{n_1,n_2}(\tau)$, что $n_1 n_2 \bar{F}(u_{n_1,n_2}(\tau)) \to \tau$ и $\mathbf{P}(M_{n_1,n_2} \leq u_{n_1,n_2}(\tau)) \to e^{-\theta\tau}$, то θ называется экстремальным индексом. Вычислению экстремального индекса случайного поля в $\mathbf{N}^2$ посвящена работа [110], а в [139] изучалось асимптотическое расположение максимума случайного поля с некоторым экстремальным индексом.

Поскольку вышеупомянутые результаты не имеют прямого отношения к теме раздела, не будем останавливаться на них более подробно, а подчеркнем лишь актуальность исследований экстремального индекса в различных моделях и приложениях.

Далее представлено новое обобщение экстремального индекса на схему серий со случайными длинами, которое позволит работать с более широким классом стохастических структур. Более того, мы дадим два различных определения.

Пусть задан набор случайных величин $\xi_{n,m}$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, с распределениями F_n (здесь n — номер серии, m — номер случайной величины в серии), а также последовательность целочисленных случайных величин (длин серий) $\nu_n \xrightarrow{P} +\infty$, $n \to \infty$, и $M_n = \vee_{m=1}^{\nu_n} \xi_{n,m}$.

Определение 1.[1] *Пусть для каждого $s \in (0,1)$ существует такая последовательность $u_n(s)$, что $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\nu_n} \to s$, и $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) \to$*

[1] По сравнению с определением А мы делаем замену $s = e^{-\tau}$ и соответственно переопределяем функции u_n, $n \geq 1$.

$\psi(s)$, $n \to \infty$. *Тогда* ψ *назовем экстремальной функцией. Если* $\psi(s) = s^\theta$, *то* θ *назовем экстремальным индексом.*

В общем случае можем определить частичные индексы

$$\theta^+ = \sup_{s \in (0,1)} \log_s \psi(s), \quad \theta^- = \inf_{s \in (0,1)} \log_s \psi(s),$$

тогда $\theta^+ \geq \theta^-$ и $s^{\theta^+} \leq \psi(s) \leq s^{\theta^-}$, $s \in (0,1)$.

Можно также исследовать асимптотическое поведение экстремальной функции при $s \to 0$ и $s \to 1$. Обозначим пределы

$$\theta_0 = \lim_{s \to 0+0} \log_s \psi(s), \quad \theta_1 = \lim_{s \to 1-0} \log_s \psi(s),$$

если они существуют. Тогда верны неравенства $\theta^- \leq \theta_0 \wedge \theta_1$ и $\theta^+ \geq \theta_0 \vee \theta_1$.

Смысл определения 1 заключается в сравнении предельных распределений M_n и максимумов $\hat{M}_n$ независимых случайных величин в количестве ν_n (не зависящем от них) при одинаковой нормировке, определяемой условием $\mathbf{P}(\hat{M}_n \leq u_n(s)) \to s$, $n \to \infty$. Тем самым обобщается (3.1).

Понятно, что индексы, как и ранее, принимают неотрицательные значения, однако ограничение сверху единицей снимается, по крайней мере, для θ^+, как будет показано далее (примеры 3.3.6, 3.4.1–3.4.3). Это связано с возможностью нарушения неравенства (3.3). Максимумы по сериям могут расти асимптотически быстрее, чем максимумы независимых случайных величин, взятых в тех же количествах, что соответствует случаю $\psi(s) < s$, $s \in (0,1)$.

Определение 2. *Пусть для каждого* $s \in (0,1)$ *существует такая последовательность* $u_n(s)$, *что* $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\nu_n} \to s$, *и* $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) - \mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n} \to 0$, $n \to \infty$, *тогда* θ *назовем экстремальным индексом.*

Смысл определения 2 заключается в подборе такого значения θ, что предельные распределения M_n и максимумов независимых случайных величин в количестве $[\theta\nu_n]$ (не зависящем от них) совпадают при той же нормировке, что и в определении 1 (при $\theta > 0$). Тем самым обобщается (3.2).

Существование экстремального индекса по определению 2 фактически означает, что экстремальная функция из определения 1 допускает представление:

$$\psi(s) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n}.$$

Возникает вопрос, зачем давать два определения, нельзя ли обойтись каким-то одним. Действительно, во многих случаях оба индекса эквивалентны: они существуют и равны между собой (теорема 3.1.1: свойства 1, 3, 6). Но бывает также, что обоих индексов не существует, а по определению 1 существует экстремальная функция и частичные индексы (примеры 3.3.2–3.3.4, 3.4.1–3.4.3); бывает, что существует индекс по определению 2, и не существует индекс по определению 1, а экстремальная функция и частичные индексы по-прежнему существуют (раздел 3.2: признаки частиц); наконец, бывает удивительная ситуация, когда оба индекса существуют, но принимают *различные* значения (пример 3.3.5). Таким образом, это действительно две разные характеристики системы, не сводящиеся к одной.

Заметим, что ранее максимумы в схеме серий рассматривались в [69] для зависимых случайных величин, связанных IT-копулами (копулами преобразования независимости), и выводились условия, при которых максимумы растут асимптотически как в случае независимых величин, т.е. в наших терминах $\theta = 1$. Максимумы независимых разнораспределенных случайных величин в схеме серий ранее изучались, например, в работах [63, 79].

Для определенности терминологии, далее будем говорить об экстремальных индексах *системы* (случайных величин), обозначаемой через $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$.

Теорема 3.1.1 *Экстремальные индексы обладают следующими свойствами:*

1) *Пусть η_n, $n \geq 1$, — стационарная последовательность с экстремальным индексом θ по определению A. Положим $\xi_{n,m} = \eta_m$, $m \geq 1$, и пусть задана целочисленная последовательность $l_n \to +\infty$, тогда система $\{\xi_{n,m}; l_n\}$ имеет экстремальный индекс θ по определениям 1 и 2.*

2) *Пусть система $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$ имеет экстремальный индекс по одному из определений 1 и 2 (или экстремальную функцию), и задана последовательность функций $g_n(x)$, $n \geq 1$, непрерывных и строго возрастающих на множестве точек роста F_n. Положим $\tilde{\xi}_{n,m} = g_n(\xi_{n,m})$, тогда система $\{\tilde{\xi}_{n,m}; \nu_n\}$ имеет тот же экстремальный индекс (экстремальную функцию).*

3) *Пусть система $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$ имеет экстремальный индекс по одному из определений 1 и 2 и существует такая последовательность $c_n \to +\infty$, что $\nu_n / c_n \xrightarrow{P} 1$, $n \to \infty$, тогда система имеет тот же экстремальный индекс по другому определению.*

4) *Пусть имеется система $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$ с экстремальным индексом $\theta >$*

0 *по определению 2, у которой:*

а) $F_n \equiv F$*;*

б) *для некоторого максимум-устойчивого закона* G *и функций* $a(r) > 0$, $b(r)$, $r > 0$, *верно*

$$F^r(a(r)x + b(r)) \to G(x), \quad r \to \infty;$$

в) *существует такая последовательность* $c_n \to +\infty$, *что* $\nu_n/c_n \xrightarrow{d} \zeta > 0$, $n \to \infty$*;*

г) *в определении 2 можно взять* $u_n(s) = A_n H^{-1}(s) + B_n$, *где* $A_n = a(c_n)$, $B_n = b(c_n)$ *и* $H(x)$ *— непрерывная функция распределения.*

Тогда $H(x) = \mathbf{E}G(x)^\zeta$ *и*

$$\mathbf{P}(M_n \le A_n x + B_n) \to H(ax + b), \quad n \to \infty,$$

где $a > 0$ *и* b *определяются из тождества* $G(x)^\theta = G(ax+b)$. *При этом экстремальная функция* $\psi(s) = H(aH^{-1}(s) + b)$ *по определению 1.*

5) *Пусть имеется система* $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$, *у которой:*

а) $F_n \equiv F$*;*

б) *существует такая последовательность* $c_n \to +\infty$, *что* $\nu_n/c_n \xrightarrow{d} \zeta > 0$, $n \to \infty$*;*

в) *для непрерывного распределения* G *и коэффициентов* $A_n > 0$, B_n, *верно*

$$\begin{aligned} &F(A_n x + B_n)^{c_n} \to G(x), \\ &\mathbf{P}(M_n \le A_n x + B_n) \to \mathbf{E}G(x)^{\theta\zeta}, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Тогда θ *является экстремальным индексом по определению 2.*

6) *Пусть имеется система* $\{\xi_{n,m}; l_n\}$ *с экстремальным индексом* θ *по одному из определений, у которой:*

а) $F_n \equiv F$ *— непрерывное распределение;*

б) l_n, $n \ge 1$, *— целочисленная последовательность,* $l_n \to +\infty$, $l_n \sim n^\alpha L(n)$, $n \to \infty$, $\alpha > 0$, $L(x)$ *— медленно меняющаяся функция на* $\mathbf{R}_+$.

Пусть $\nu_n/l_n \xrightarrow{P} 1$, $n \to \infty$, *тогда система* $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$ *имеет тот же экстремальный индекс по обоим определениям.*

7) *Пусть имеется система* $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$ *с экстремальным индексом* θ *по определению 1, у которой* $F_n \equiv F$ *— непрерывное распределение,* $\nu_n/n \xrightarrow{P} c > 0$, $n \to \infty$, *и пусть имеются целочисленная случайная последовательность* η_n, *не зависящая от* $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$, *и числовая последовательность* $\mu_n \to +\infty$ *такие, что* $\eta_n/\mu_n \xrightarrow{d} \zeta > 0$, $n \to \infty$. *Положим*

$\tilde\xi_{n,m} = \xi_{\eta_n,m}$, $\tilde\nu_n = \nu_{\eta_n}$, *тогда система* $\{\tilde\xi_{n,m};\tilde\nu_n\}$ *имеет экстремальный индекс* θ *по определению 2.*

Доказательство.

1) Обозначим через $u_n^0(\tau)$, $n\geq 1$, последовательность, существующую по определению А, и положим $u_n(s) = u^0_{l_n}(-\ln s)$, тогда $F(u_n(s))^{l_n}\to s$, $\mathbf{P}(M_n\leq u_n(s))\to s^\theta$, и $F(u_n(s))^{\theta l_n}\to s^\theta$, что дает тот же экстремальный индекс по обоим определениям.

2) Для новой системы $\tilde F_n(x) = F_n(g_n^{-1}(x))$. Пусть $\tilde u_n(s) = g_n(u_n(s))$, тогда $\tilde F_n(\tilde u_n(s)) = F_n(u_n(s))$ и $\mathbf{P}(\tilde M_n\leq \tilde u_n(s)) = \mathbf{P}(M_n\leq u_n(s))$, так что все пределы сохраняются.

3) В этом случае из $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\nu_n} = \mathbf{E}(F_n(u_n(s))^{c_n})^{\nu_n/c_n}\to s\in(0,1)$ следует $F_n(u_n(s))^{c_n}\to s$ и $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{r\nu_n}\to s^r$, $r\geq 0$, $n\to\infty$. Таким образом, если θ — экстремальный индекс по определению 1, то из $\mathbf{P}(M_n\leq u_n(s))\to s^\theta$ следует $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n}\to s^\theta$, а значит, θ — экстремальный индекс по определению 2. И наоборот, если θ — экстремальный индекс по определению 2, то из $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n}\to s^\theta$ следует $\mathbf{P}(M_n\leq u_n(s))\to s^\theta$, а значит, θ — экстремальный индекс по определению 1.

4) Согласно [54, следствие 1.3.2] для любого максимум-устойчивого закона существуют такие $a>0$ и b, что $G(x)^\theta = G(ax+b)$. Пусть $x = H^{-1}(s)$. Поскольку

$$\mathbf{E}F(A_nx+B_n)^{\nu_n} = \mathbf{E}(F(a_{l_n}x+b_{l_n})^{l_n})^{\nu_n/l_n}\to \mathbf{E}G(x)^\zeta,\quad n\to\infty,$$

то $H(x) = \mathbf{E}G(x)^\zeta$. Тогда

$$\mathbf{E}F(A_nx+B_n)^{\theta\nu_n}\to \mathbf{E}G(x)^{\theta\zeta} = \mathbf{E}G(ax+b)^\zeta = H(ax+b),\quad n\to\infty.$$

По определению 2 отсюда следует $\mathbf{P}(M_n\leq A_nx+B_n)\to H(ax+b)$, $n\to\infty$, а по определению 1 получаем $\psi(s) = H(aH^{-1}(s)+b)$.

5) Прежде всего, получаем $\mathbf{E}F(A_nx+B_n)^{\nu_n}\to\mathbf{E}G(x)^\zeta$. Обозначим $H(x) = \mathbf{E}G(x)^\zeta$, это непрерывная функция, пробегающая все значения в $(0,1)$. Полагаем $x = H^{-1}(s)$, $u_n(s) = A_nx+B_n$, тогда $\mathbf{E}F(u_n(s))^{\nu_n}\to s$ и $\mathbf{E}F(u_n(s))^{\theta\nu_n}\to\mathbf{E}G(x)^{\theta\zeta}$. Поскольку по условию верно также $\mathbf{P}(M_n\leq u_n(s))\to\mathbf{E}G(x)^{\theta\zeta}$, то $\mathbf{P}(M_n\leq u_n(s)) - \mathbf{E}F(u_n(s))^{\theta\nu_n}\to 0$, $n\to\infty$, и θ является экстремальным индексом по определению 2.

6) По свойству 3 каждая из систем имеет одинаковые экстремальные индексы по обоим определениям. Обозначим через M_n максимумы для системы $\{\xi_{n,m};l_n\}$ и через $\tilde M_n$ для системы $\{\xi_{n,m};\nu_n\}$.

Для любого $\rho > 0$ верно $l_{[n\rho]} \sim \rho^\alpha l_n$, $n \to \infty$. Поэтому из $\nu_n/l_n \xrightarrow{P} 1$, $n \to \infty$, следует

$$\mathbf{P}(M_{[n(1-\varepsilon)]} \le \tilde{M}_n \le M_{[n(1+\varepsilon)]}) \to 1, \quad n \to \infty,$$

для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку $F(u_n(s))^{l_n} \to s$, то

$$u_n(s) = F^{-1}(1 + (1 + o(1))(\ln s)/l_n), \quad n \to \infty,$$

и для любого $\rho > 0$ в силу определения 1 верно

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(M_{[n\rho]} \le u_n(s)) = \mathbf{P}(M_{[n\rho]} \le F^{-1}(1 + (1 + o(1))(\ln s)/l_n)) = \\ &= \mathbf{P}(M_{[n\rho]} \le F^{-1}(1 + (1 + o(1))(\ln s^{1/\rho^\alpha})/l_{[n\rho]})) \to s^{\theta/\rho^\alpha}, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Полагая $\rho = 1 \pm \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, получаем

$$s^{\theta/(1+\varepsilon)^\alpha} \le \liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(\tilde{M}_n \le u_n(s)) \le \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(\tilde{M}_n \le u_n(s)) \le s^{\theta/(1-\varepsilon)^\alpha}.$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, получаем $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\tilde{M}_n \le u_n(s)) = s^\theta$, значит, θ является экстремальным индексом системы $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$ по определению 1.

7) Для последовательности $u_n(s)$ из определения 1 для системы $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$ верно $\mathbf{E}F(u_n(s))^{\nu_n} \to s$, откуда $F(u_n(s))^{cn} \to s$, $n \to \infty$, так что

$$u_n(s) = F^{-1}(1 + (1 + o(1))(\ln s)/(cn)), \quad n \to \infty.$$

Для любого $x \in (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}F(u_{[\mu_n]}(x))^{\tilde{\nu}_n} = \mathbf{E}F(u_{[\mu_n]}(x))^{\tilde{\nu}_n} = \\ &= \mathbf{E}F(u_{[\mu_n]}(x))^{(\nu_{\eta_n}/\eta_n)(\eta_n/\mu_n)\mu_n} \to \mathbf{E}x^\zeta, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Обозначим $H(x) = \mathbf{E}x^\zeta$, $x = H^{-1}(s)$ и $\tilde{u}_n(s) = u_{[\mu_n]}(x)$, тогда

$$\mathbf{E}F(\tilde{u}_n(s))^{\tilde{\nu}_n} \to s, \quad \mathbf{E}F(\tilde{u}_n(s))^{\theta\tilde{\nu}_n} \to \mathbf{E}x^{\theta\zeta}, n \to \infty.$$

С другой стороны, по определению 1 для системы $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$ получаем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\tilde{M}_n \le \tilde{u}_n) = \mathbf{P}(M_{\eta_n} \le u_{[\mu_n]}(x)) = \\ &= \mathbf{P}(M_{\eta_n} \le F^{-1}(1 + (1 + o(1))(\ln x)/(c\mu_n))) = \\ &= \mathbf{P}(M_{\eta_n} \le F^{-1}(1 + (1 + o(1))(\ln x^{\eta_n/\mu_n})/(c\eta_n))) \to \mathbf{E}x^{\theta\zeta}, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{P}(\tilde{M}_n \le \tilde{u}_n) - \mathbf{E}F(\tilde{u}_n(s))^{\theta\tilde{\nu}_n} \to 0$, $n \to \infty$, и θ является экстремальным индексом системы $\{\tilde{\xi}_{n,m}; \tilde{\nu}_n\}$ по определению 2. $\square$

Прокомментируем доказанные свойства.

Свойство 1 означает инвариантность экстремальных индексов относительно непрерывных строго возрастающих преобразований серий. Это означает, например, что в случае непрерывных случайных величин их все можно привести к равномерному распределению на $[0, 1]$, преобразованием с $g_n = F_n$. Аналогичное свойство имеет место для классического экстремального индекса (по определению А), когда речь идет об одном непрерывном строго возрастающем преобразовании ко всем членам последовательности.

Свойство 2 означает, что введенные индексы действительно являются обобщениями классического экстремального индекса (по определению А), и совпадают с ним при неслучайных длинах серий.

Свойство 3 определяет ограничение на случайность длин серий, при котором оба новых индекса эквивалентны. Длины должны расти асимптотически эквивалентно неслучайной последовательности.

Свойство 4 обобщает известное утверждение для классического экстремального индекса [54, следствие 3.7.3]: предельное распределение максимумов стационарной последовательности имеет тот же экстремальный тип, что и предельное распределение максимумов независимых случайных величин с тем же частным распределением. В нашем случае предельный закон уже не обязан быть максимум-устойчивым, однако его тип сохраняется. Максимум-устойчивый он только при $\zeta = const$ п.н., т.е. при условии свойства 3.

Свойство 5 позволяет интерпретировать некоторый параметр предельного распределения максимумов зависимых случайных величин как экстремальный индекс по определению 2.

Свойство 6 дает условие на скорость роста длин серий, при котором индексы для случайных и неслучайных длин совпадают.

Свойство 7 показывает, что рандомизацией по случайно растущему номеру серии можно перейти от экстремального индекса по определению 1 к тому же индексу по определению 2.

Заметим, что утверждения об экстремальных индексах системы представляют собой фактически утверждения о совместных распределениях случайных величин, поэтому их можно распространить и на условные совместные распределения. Например, пусть каждая серия рассматривается при некотором условии A_n, $\mathbf{P}(A_n) > 0$, $n \geq 1$, тогда будем говорить об *условной системе* $\{\xi_{n,m}; \nu_n | A_n\}$. Для нее можно аналогично сформулировать определения 1 и 2, заменив вероятности $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s))$

на условные вероятности $\mathbf{P}(M_n \le u_n(s)|A_n)$, а математические ожидания $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\nu_n}$ и $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n}$ на условные математические ожидания $\mathbf{E}(F_n(u_n(s))^{\nu_n}|A_n)$ и $\mathbf{E}(F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n}|A_n)$. При этом, конечно, предполагается, что условное одномерное распределение случайных величин в серии остается равным F_n (не зависит от A_n). Таким образом, будем считать, что понятия экстремальных индексов и функции применимы также к условным системам случайных величин.

3.2 Приложения для активностей в информационных сетях и признаков частиц в ветвящихся процессах

Заметим, что многие результаты, полученные ранее в главах 1 и 2, можно теперь интерпретировать как утверждения об экстремальных индексах систем случайных величин.

В разделе 1.3 рассмотрены модели информационных сетей, для которых доказана асимптотическая эквивалентность максимумов суммарных активностей максимумам индивидуальных активностей (независимых одинаково распределенных случайных величин с тяжелыми хвостами). Суммарные активности образуют систему зависимых случайных величин, причем для модели из раздела 1.3.2 (со степенным законом числа входящих вершин) и моделей 1 и 2 из раздела 1.3.3 (со случайными весами) все суммарные активности одинаково распределены и имеют предельное распределение, обусловленное предельным распределением числа слагаемых (самой вершины и ее соседей или входящих соседей).

Согласно сделанным предположениям, индивидуальные активности неотрицательны и имеют распределение $\bar{F}(x) \sim x^{-a}L(x)$, $x \to \infty$, $a > 0$, где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция, и $v(r)$ — положительная функция такая, что верно $r\bar{F}(v(r)) \to 1$, $r \to \infty$. При определенных ограничениях на параметры моделей в разделе 1.3 для максимумов суммарных активностей доказан предельный закон Фреше:

$$\mathbf{P}(M_n/v(n) \le x) \to \exp\{-x^{-a}\} \quad , x > 0, \quad n \to \infty.$$

С другой стороны, если число соседей (либо входящих соседей) описывается случайной величиной K, не зависящей от активности, то предельное распределение F_S суммарной активности в каждом узле имеет хвост

$$\bar{F}_S(x) \sim (1 + \mathbf{E}K)\bar{F}(x), \quad x \to \infty,$$

при условии

$$\mathbf{E}K^{1\vee(a+\varepsilon)} < \infty, \quad \varepsilon > 0, \tag{3.4}$$

согласно результатам [144] о распределении суммы случайного числа независимых случайных величин с тяжелыми хвостами. Поэтому

$$F_S(xv(n))^n \to \exp\{-(1+\mathbf{E}K)x^{-a}\} \quad , x > 0, \quad n \to \infty.$$

В разделе 1.3.2 мы так и имеем дело со случайной величиной K, с распределением, заданным вероятностями $p_k \sim ck^{-\beta}$, $k \to \infty$, $\beta > 1$. При условиях теоремы 1.3.2.1 условие (3.4) выполняется. Обозначив $s = \exp\{-(1+\mathbf{E}K)x^{-a}\} \in (0,1)$, $u_n(s) = xv(n)$, приходим в выводу, что система суммарных активностей имеет экстремальный индекс $\theta = 1/(1+\mathbf{E}K)$ по определению 1.

В разделе 1.3.3 по теореме 1.3.3.4 при $s = 1$ в модели 1 мы имеем предельное распределение числа соседей MPois($W\mathbf{E}W$), а в модели 2 предельное распределение числа входящих соседей MPois(W), где W — случайная величина с распределением весов. При условии $\mathbf{E}W^\beta < \infty$ условие (3.4) также выполняется. Отсюда получаем $\theta = 1/(1+(\mathbf{E}W)^2)$ и $\theta = 1/(1+\mathbf{E}W)$ для этих моделей соответственно.

Для последовательностей значение $\theta \in (0,1)$ означает, что превышения высокого уровня происходят не по одиночке, а группами (кластерами) средней величины $1/\theta$ [107, §8.1]. В нашем случае также можно предположить образование подобных кластеров.

Применительно к информационным сетям речь может идти о группах узлов с высокими суммарными активностями, вызванными высокой индивидуальной активностью одного узла, являющегося их общим соседом (входящим соседом), взятых вместе с ним самим. Заметим, что во всех трех рассмотренных выше моделях средние числа исходящих соседей, взятых вместе с самой вершиной, как раз оказываются равны полученным значениям $1/\theta$, так что результат может показаться тривиальным. Однако его более глубокий смысл в том, что *другие* механизмы формирования превышений высокого уровня (например, суммирование небольших активностей от большого числа входящих соседей) оказываются асимптотически не значимы.

В разделе 2.2.2 доказан ряд предельных теорем для признаков частиц в ветвящихся процессах и разобран ряд примеров, в которых фигурирует показатель θ. Пользуясь свойством 5 (теорема 3.1.1) нетрудно понять, что во всех случаях это ни что иное, как экстремальный индекс по определению 2 для условной системы признаков частиц при условии невырождения ветвящегося процесса ($Z_n > 0$). При этом сериям соответствуют поколения.

Здесь также можно предположить образование кластеров. Очевидно, речь идет о родственных группах частиц, имеющих общего предка с аномально большим признаком, и унаследовавшим эту мутацию.

Было проведено компьютерное моделирование. Для простоты рассмотрен ветвящийся процесс, в котором каждая частица имеет ровно двух дочерей. В качестве распределения A взято распределение Стьюдента с двумя степенями свободы (так что $\gamma = 2$); параметр $a = 0,9$. В этом случае получаем $\theta \approx 0,32$ и ожидаемый средний размер кластера $1/\theta \approx 3,13$.

Результат для популяции из 1024 частиц (в 10-м поколении) представлен на рис. 3.1. Видно, что основная масса (более 80%) сосредоточена в диапазоне признаков $[-2, 2]$, но есть и значительные отклонения. Частицы пронумерованы в лексикографическом порядке (по своему положению на двоичном дереве), поэтому родственники находятся рядом (обратное необязательно). Группы родственных частиц с аномальными признаками выглядят как вертикально вытянутые группы точек.

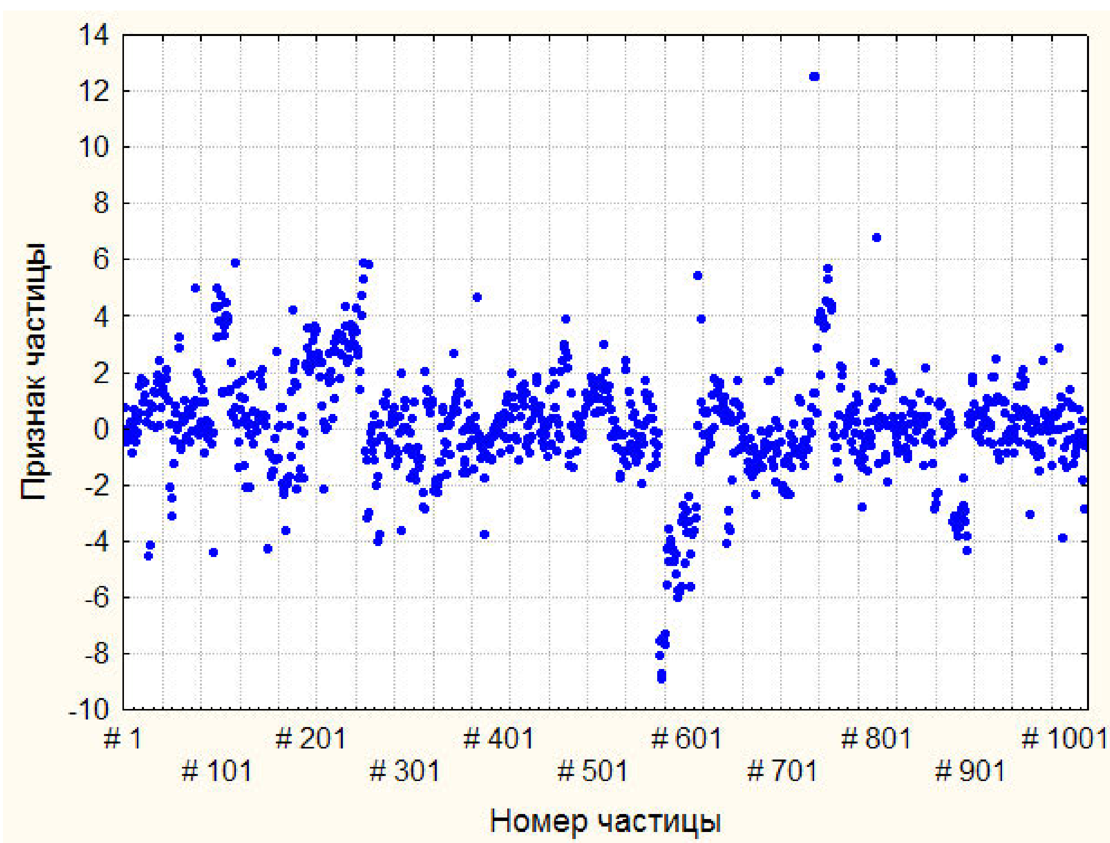

Рис. 3.1: результаты моделирования

Как было отмечено во Введении, частицы поколения с введенным расстоянием по степени родства представляют собой ультраметрическое пространство, в котором для любых трех расстояний между точками (частицами) либо равны все три расстояния, либо два равны, а третье — меньше [82, с. 131–132]. Поэтому их нельзя расположить соответственно на прямой или в обычном пространстве.

В разделе 2.2.3, посвященном случаю сестринской зависимости, легко заметить, что показатель θ в утверждении теоремы 2.2.3.1 представляет собой экстремальный индекс системы признаков частиц по определению 1. При этом, в отличие от предыдущего случая, сериям соответствуют числа частиц нулевого поколения, а признаки частиц рассматриваются в первом поколении. Здесь можно ожидать образование кластеров из сестринских групп, которые выглядят аналогично.

Поскольку в данной модели зависимость признаков существует лишь внутри поколения, полученные результаты могут относиться не только к первому поколению, но и к любому поколению, когда известна численность предыдущего. Предположим теперь, что мы хотим и здесь рассмотреть условную систему признаков по поколениям при условии невырождения, как в разделах 2.2.1 и 2.2.2. Тогда мы получаем рандомизацию по случайно растущему номеру серии — численности предыдущего поколения (при условии, что она больше нуля), и согласно свойству 7 (теорема 3.1.1) переходим от экстремального индекса по определению 1 к тому же индексу по определению 2. Единственный нюанс здесь заключается в том, что признаки в n-ом поколении рассматриваются при условии $Z_{n-1} > 0$, т.е. невырождения предыдущего поколения, а не текущего.

3.3 Модели с копулами

В этом разделе нам понадобятся понятия из теории копул (см. с. 73 и [130, гл. 5 и §7.5], [134]).

Далее мы для простоты будем полагать, что $\nu_n = n$ (треугольная схема), $F_n(x) \equiv x$, $x \in [0,1]$, а случайные величины $\xi_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, связаны n-мерной копулой C_n. Напомним, что к равномерному распределению можно перейти от любого непрерывного в силу свойства 2.

Пусть для любого $s \in (0,1)$ последовательность $u_n(s)$ такова, что $u_n(s)^n \to s$, $n \to \infty$, тогда $u_n(s) = 1 + (1 + o(1))(\ln s)/n$, $n \to \infty$.

Рассмотрим сначала несколько конкретных примеров копул, для которых все хорошо считается.

Пример 3.3.1. Копула Гумбеля-Хоугаарда имеет вид

$$C(y_1, \dots, y_d) = \exp\left\{ -\left(\sum_{i=1}^{d} (-\ln y_i)^\alpha \right)^{1/\alpha} \right\}, \quad \alpha \geq 1,$$

откуда следует

$$C(y, \dots, y) = y^{d^{1/\alpha}}.$$

Полагая C_n копулой Гумбеля-Хоугаарда с $\alpha_n \geq 1$ и $(\alpha_n - 1)\ln n \to \gamma \geq 0$, получаем

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) = u_n(s)^{n^{1/\alpha_n}} \to s^\theta, \quad \theta = e^{-\gamma} \in [0, 1].$$

Данная копула относится к классу копул экстремальных значений (или максимум-устойчивых). В общем случае для них имеет место представление Пикандса [130, с. 312, теорема 7.45]:

$$C(y_1, \dots, y_d) = \exp\left\{ B\left(\frac{\ln y_1}{\sum_{i=1}^{d} \ln y_i}, \dots, \frac{\ln y_1}{\sum_{i=1}^{d} \ln y_i} \right) \sum_{i=1}^{d} \ln y_i \right\},$$

где

$$B(w_1, \dots w_d) = \int_{S^d} \left(\bigvee_{i=1}^{d} x_i w_i \right) dH(x),$$

и H — конечная мера на $S^d = \{x = (x_1, \dots x_d) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d} x_d = 1\}$. Причем эта мера должна быть нормирована так, что $\int_{S^d} x_i \, dH(x) = 1$ для всех $1 \leq i \leq d$ (о чем в [130] забыли упомянуть).

Заметим, что функция B однородна первого порядка. Таким образом, в общем случае верно

$$C(y, \dots, y) = y^{B(1, \dots 1)}.$$

Обозначим $\beta_n = B_n(1, \dots 1)$, тогда если $\beta_n / n \to \theta$, то θ — экстремальный индекс. Поскольку $0 \leq \beta_n \leq n$, то $\theta \in [0, 1]$.

Пример 3.3.2. Копула Клейтона имеет вид

$$C(y_1, \dots, y_d) = \left(\sum_{i=1}^{d} y_i^{-\alpha} - d + 1 \right)^{-1/\alpha}, \quad \alpha \geq 0,$$

где вырожденный случай $\alpha = 0$ соответствует копуле независимости $C(y_1, \dots, y_d) = y_1 \dots y_d$, возникающей в пределе при $\alpha \to 0$. Отсюда

$$C(y, \dots, y) = \left(d(y^{-\alpha} - 1) + 1 \right)^{-1/\alpha}.$$

Пусть C_n — копула Клейтона с $\alpha_n \equiv \alpha > 0$, тогда

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(M_n \le u_n(s)) = (n(u_n(s)^{-\alpha} - 1) + 1)^{-1/\alpha} \to \\ &\to (1 - \alpha \ln s)^{-1/\alpha} = \psi(s).\end{aligned}$$

Здесь $\theta^- = 0$, $\theta^+ = 1$.

Пример 3.3.3. Копула Франка имеет вид

$$C(y_1, \ldots, y_d) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 - \frac{\prod_{i=1}^d (1 - e^{-\alpha y_i})}{(1 - e^{-\alpha})^{d-1}} \right), \quad \alpha \ge 0,$$

где вырожденный случай $\alpha = 0$ соответствует копуле независимости $C(y_1, \ldots, y_d) = y_1 \ldots y_d$, возникающей в пределе при $\alpha \to 0$. Отсюда

$$C(y, \ldots, y) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 - \frac{(1 - e^{-\alpha y})^d}{(1 - e^{-\alpha})^{d-1}} \right).$$

Пусть C_n — копула Франка с $\alpha_n \equiv \alpha > 0$, тогда переходя к пределу, получаем

$$\mathbf{P}(M_n \le u_n(s)) \to -\frac{1}{\alpha} \ln \Big(1 - (1 - e^{-\alpha}) s^{\alpha/(e^\alpha - 1)} \Big) = \psi(s).$$

В этом случае

$$\theta_0 = \alpha/(e^\alpha - 1), \quad \theta_1 = 1,$$

а на интервале $(0, 1)$ функцией $\log_s \psi(s)$ принимаются промежуточные значения. Поэтому $\theta^- = \alpha/(e^\alpha - 1) \in (0, 1)$, $\theta^+ = 1$.

На рис. 3.2 представлены графики функций $\psi(s)$: пример 3.3.2 с $\alpha = 2$ сплошной линией, 3.3.3 с $\alpha = 2$ крупным пунктиром, диагональ мелким пунктиром (видно, что оба графика выше ее).

Во всех трех примерах мы имели дело со строго архимедовыми копулами (см. с. 108). Напомним, что строго архимедовой называется копула вида

$$C_d(y_1, \ldots, y_d) = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \varphi(y_i) \right), \tag{3.5}$$

где φ — убывающая функция на $[0, 1]$, называемая генератором, $\varphi(0) = +\infty$, $\varphi(1) = 0$. При $d = 2$ достаточно, чтобы эта функция была выпуклой. Если потребовать, чтобы функция φ^{-1} была вполне монотонной на $(0, +\infty)$, то формула (3.5) определяет копулу при любом $d \ge 2$ [134, теорема 4.6.2]. Далее будем считать это условие на φ выполненным.

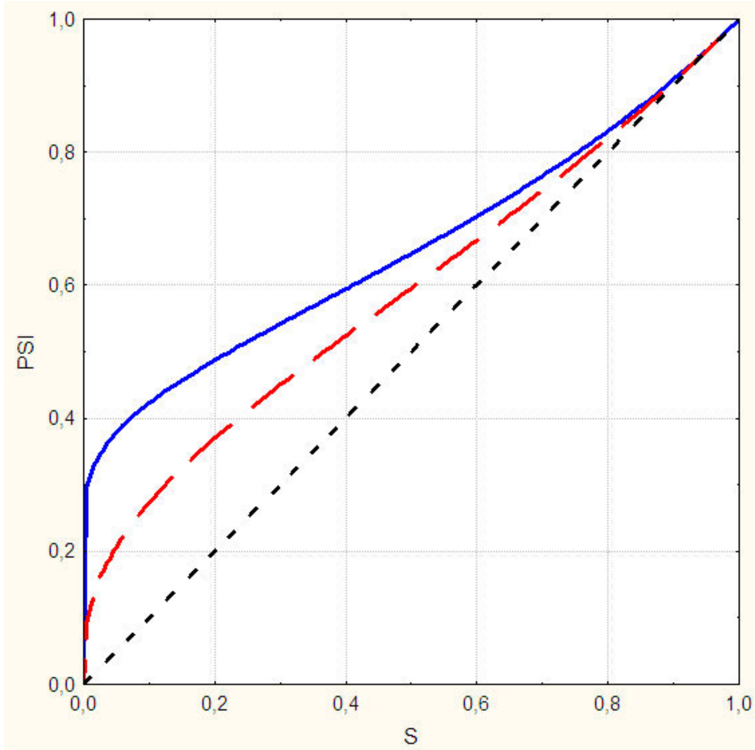

Рис. 3.2: функции $\psi(s)$

С другой стороны, функция f является преобразованием Лапласа-Стилтьеса некоторого распределения тогда и только тогда, когда f вполне монотонна и $f(0) = 1$ [76, гл. 13, §4, теорема 1]. Отсюда следует, что функция φ^{-1} должна быть преобразованием Лапласа-Стилтьеса некоторого распределения, причем в силу условия $\varphi(0) = +\infty$, а значит, и $\varphi^{-1}(+\infty) = 0$, это распределение не должно иметь атомов в нуле. Таким образом, существует некоторая случайная величина $\zeta > 0$ п.н. такая, что

$$\varphi^{-1}(u) = \mathbf{E}e^{-u\zeta}, \quad u \geq 0$$

и C_n является LT-архимедовой копулой [130, с. 223–224]. Введем обозначения

$$x_0 = \inf\{x > 0 : \mathbf{P}(\zeta \leq x) > 0\}, \quad \mu = \mathbf{E}\zeta.$$

Будем для краткости обозначать $f(u) = \varphi^{-1}(u)$.

Далее теоремы 3.3.1 и 3.3.2 дают экстремальные функции и частичные индексы для моделей с копулами.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\mu < \infty$, тогда экстремальная функция $\psi(s) = f(-(\ln s)/\mu) = \mathbf{E}s^{\zeta/\mu}$, $\theta^+ = 1$, $\theta^- = x_0/\mu$.*

Доказательство. Поскольку $1 - f(u) \sim \mu u$, $u \to 0+0$, то $\varphi(1-t) \sim$

t/μ, $t \to 1-0$. Имеем

$$\mathbf{P}(M_n \le u_n(s) = f(n\varphi(u_n(s))) = f(n\varphi(1+(1+o(1))(\ln s)/n))) \to \\ \to f(-(\ln s)/\mu), \quad n \to \infty.$$

Из неравенства Иенсена получаем $\psi(s) = \mathbf{E}s^{\zeta/\mu} \ge s^{\mathbf{E}\zeta} = s$. С другой стороны, поскольку $\zeta > 0$ п.н., то $\psi(s) \le s^{x_0/\mu}$. Следовательно, $\theta^+ \le 1$ и $\theta^- \ge x_0/\mu$. Кроме того, получаем $\theta_0 = x_0/\mu$, $\theta_1 = 1$, так что эти оценки достигаются в пределе, и верно $\theta^+ = 1$, $\theta^- = x_0/\mu$. □

Как это соотносится с нашими примерами?

В случае копулы Клейтона генератор $\varphi(t) = t^{-\alpha} - 1$, и обратная функция $f(u) = 1/(1+u)^{1/\alpha}$ соответствует гамма-распределению с параметром формы $1/\alpha$, для которого $x_0 = 0$, так что $\theta^- = 0$, $\theta^+ = 1$.

В случае копулы Франка генератор $\varphi(t) = -\ln((1-e^{-\alpha t})/(1-e^{-\alpha}))$, и обратная функция $f(u) = -(1/\alpha)\ln(1-(1-e^{-\alpha})e^{-u})$ соответствует дискретному распределению с вероятностями $\mathbf{P}(\zeta = k) = (1-e^{-\alpha})^k/(\alpha k)$, $k \ge 1$. Тогда $x_0 = 1$ и $\mu = f'(0) = (e^{\alpha}-1)/\alpha$, откуда $\theta^- = \alpha/(e^{\alpha}-1)$, $\theta^+ = 1$.

Рассмотрим обратный пример построения копулы по распределению случайной величины ζ.

Пример 3.3.4. Пусть ζ имеет геометрическое распределение (начиная от 1) с параметром $p \in (0,1)$. Тогда $f(u) = pe^{-u}/(1-qe^{-u})$, где $q = 1-p$, и $\varphi(t) = \ln((p+qt)/t) = \ln((1-q(1-t))/t)$, что является генератором копулы Али-Михаил-Хака [134, таблица 4.1] (которая обычно рассматривается в двумерном случае). Таким образом, получаем многомерную копулу Али-Михаил-Хака

$$C_n(y_1, \dots y_n) = \frac{p}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{1-q(1-y_i)}{y_i}\right) - q} = p\left(\prod_{i=1}^n (py_i^{-1}+q) - q\right)^{-1}.$$

В этом случае $x_0 = 1$, $\mu = 1/p$, поэтому $\theta^- = p$, $\theta^+ = 1$.

В условия теоремы 3.3.1 из рассмотренных не вписывается только пример копулы Гумбеля-Хоугаарда, поскольку она имеет генератор $\varphi(t) = (-\ln t)^{\alpha}$ с обратной функцией $f(u) = \exp\{-u^{1/\alpha}\}$, $\alpha \ge 1$, что соответствует асимметричному $(1/\alpha)$-устойчивому распределению на $\mathbf{R}_+$, не имеющему конечного среднего.

Для изучения таких случаев применим следующую модификацию.

Заметим, что если $\varphi(t)$ — генератор с вполне монотонной обратной функцией, то $\varphi(t)^{\beta}$, $\beta \ge 1$, — также генератор с вполне монотонной обратной функцией [134, лемма 4.6.4].

Теорема 3.3.2. *Пусть n-мерная копула C_n имеет генератор $\varphi_n(t) = \varphi(t)^{\beta_n}$, где $\beta_n \geq 1$, $(\beta_n - 1)\ln n \to \gamma \geq 0$, и для генератора $\varphi(t)$ верно $\mu < \infty$. Тогда $\psi(s) = f(-e^{-\gamma}(\ln s)/\mu)$, $\theta^- = (x_0/\mu)e^{-\gamma}$, $\theta^+ = e^{-\gamma}$.*

Доказательство. Из $\varphi_n(t) = \varphi(t)^{\beta_n}$ следует $f_n(u) = f(u^{1/\beta_n})$. Имеем

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) = f_n(n\varphi_n(u_n(s))) = f(n^{1/\beta_n}\varphi(1 + (1 + o(1))(\ln s)/n))) = \\ = f(e^{((1-\beta_n)\ln n)/\beta_n}(-(\ln s)/\mu)) \to f(-e^{-\gamma}(\ln s)/\mu), \quad n \to \infty.$$

Частичные индексы получаем из соотношения

$$\log_s \psi(s) = \frac{\ln f(-e^{-\gamma}(\ln s)/\mu)}{\ln s} = e^{-\gamma}\frac{\ln f(-(\ln r)/\mu)}{\ln r}, \quad r = s^{e^{-\gamma}} \in (0, 1),$$

где дробь в правой части представляет собой логарифм экстремальной функции из теоремы 3.3.1, принимающий значения от x_0/μ до 1. $\square$

В частности, результат примера 3.3.1 для копулы Гумбеля-Хоугаарда получаем при $\varphi_n(t) = (-\ln t)^{\alpha_n}$, где $\varphi(t) = -\ln t$ соответствует $\zeta = 1$ п.н. и копуле независимости.

Таким образом, мы видим, что в рассмотренных нами моделях с копулами могут быть любые $\theta \in [0, 1]$ и любые $0 \leq \theta^- < \theta^+ \leq 1$.

Более того, согласно [134, следствие 4.6.3], для генераторов с вполне монотонной обратной функцией всегда верно

$$C_n(y_1, \ldots y_n) \geq y_1 \ldots y_n,$$

так что $\psi(s) \geq s$, $s \in (0, 1)$, откуда следует $\theta^+ \leq 1$.

Рассмотрим теперь один поучительный пример модели с копулами и случайными длинами серий.

Пример 3.3.5. Пусть длины серий удовлетворяют условию $\nu_n/n \xrightarrow{d} \zeta$, $n \to \infty$, где ζ имеет устойчивое распределение с преобразованием Лапласа-Стилтьеса $\mathbf{E}e^{-u\zeta} = e^{-u^\beta}$, $0 < \beta < 1$, и в каждой серии случайные величины (не зависящие от ν_n) связаны копулой Гумбеля-Хоугаарда с $\alpha_n > 1$, $(\alpha_n - 1)\ln n \to \gamma > 0$, $n \to \infty$ (см. пример 3.3.1).

Предположим сначала, что $u_n(s)^n \to e^{-\tau}$, $n \to \infty$, $\tau > 0$, тогда

$$\mathbf{E}u_n(s)^{\nu_n} = \mathbf{E}(u_n(s)^n)^{\nu_n/n} \to \mathbf{E}e^{-\tau\zeta} = e^{-\tau^\beta}, \quad n \to \infty.$$

Возьмем $\tau = (-\ln s)^{1/\beta}$, тогда $\mathbf{E}u_n(s)^{\nu_n} \to s$, что нам и нужно.

Далее, имеем

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) = u_n(s)^{\nu_n^{1/\alpha_n}} = \left(u_n(s)^{n^{1/\alpha_n}}\right)^{(\nu_n/n)^{1/\alpha_n}} \to \\ \to \mathbf{E}e^{-\tau e^{-\gamma}\zeta} = e^{-(e^{-\gamma}\tau)^\beta} = s^{e^{-\gamma\beta}}, \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$

Отсюда экстремальный индекс по определению 1 равен $e^{-\gamma\beta}$.

С другой стороны, для любого $\theta > 0$ верно

$$\mathbf{E}u_n(s)^{\theta\nu_n} \to \mathbf{E}e^{-\tau\theta\zeta} = e^{-(\theta\tau)^\beta} = s^{\theta^\beta}, \quad n \to \infty,$$

откуда и из (3.6) следует, что экстремальный индекс по определению 2 равен $e^{-\gamma}$.

Таким образом, система имеет два *разных* экстремальных индекса по двум разным определениям!

До сих пор мы встречались лишь со случаями, когда либо оба экстремальных индекса существовали и были равны, либо существовал только второй, либо ни одного. Можно было предположить, что если первый индекс существует, то он равен второму, и что оба индекса на самом деле отражают какую-то одну характеристику системы, которая проявляется либо в них обоих, либо в одном. Однако данный пример показывает, что это не так: индексы отражают две разные характеристики системы.

Во всех рассмотренных ранее моделях классическое свойство (3.3) сохраняло силу в форме $\psi(s) \geq s$ при всех $s \in [0,1]$. В заключение рассмотрим пример, когда оно нарушается. При этом симметричную зависимость случайных величин в серии можно описать некоторой копулой, но проще сделать это конструктивно.

Пример 3.3.6. Пусть $\eta_{n,m}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, независимы и имеют равномерное распределение на $[0,1]$, $\nu_n = n$, κ_n принимают значения от 1 до n равновероятно и не зависят от $\eta_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$; $\gamma > 0$. Положим

$$\xi_{n,m} = \begin{cases} \eta_{n,m}^{1/(\gamma n)}, & m = \kappa_n, \\ \eta_{n,m}, & m \neq \kappa_n. \end{cases}$$

Тогда совместная функция распределения $\xi_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, имеет вид

$$F^{(n)}(x_1, \dots x_n) = \left(\prod_{m=1}^{n} x_m\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_m^{\gamma n-1}\right),$$

откуда

$$F_n(x) = x\left(1 + \frac{x^{\gamma n-1} - 1}{n}\right), \quad \mathbf{P}(M_n \leq x) = x^{(1+\gamma)n-1}.$$

Полагая $u_n(s) = 1 - (1+o(1))\tau/n$, $\tau > 0$, получаем при $n \to \infty$

$$F_n(u_n(s))^n \to e^{-\tau}\exp\{e^{-\gamma\tau} - 1\} = s, \quad \mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) \to e^{-(1+\gamma)\tau} = \psi(s),$$

откуда можно найти в явном виде обратную экстремальную функцию

$$\psi^{-1}(u) = u^{1/(1+\gamma)} \exp\{u^{\gamma/(1+\gamma)} - 1\},$$

для которой верно $\psi^{-1}(u) > u$ при всех $u \in (0, 1)$, а значит, $\psi(s) < s$ при всех $s \in (0, 1)$. В этом случае получаем $\theta^- = 1$, $\theta^+ = 1 + \gamma$.

На рис. 3.3 представлен график экстремальной функции в примере 3.3.6 при $\gamma = 2$ сплошной линией, диагональ проведена пунктиром.

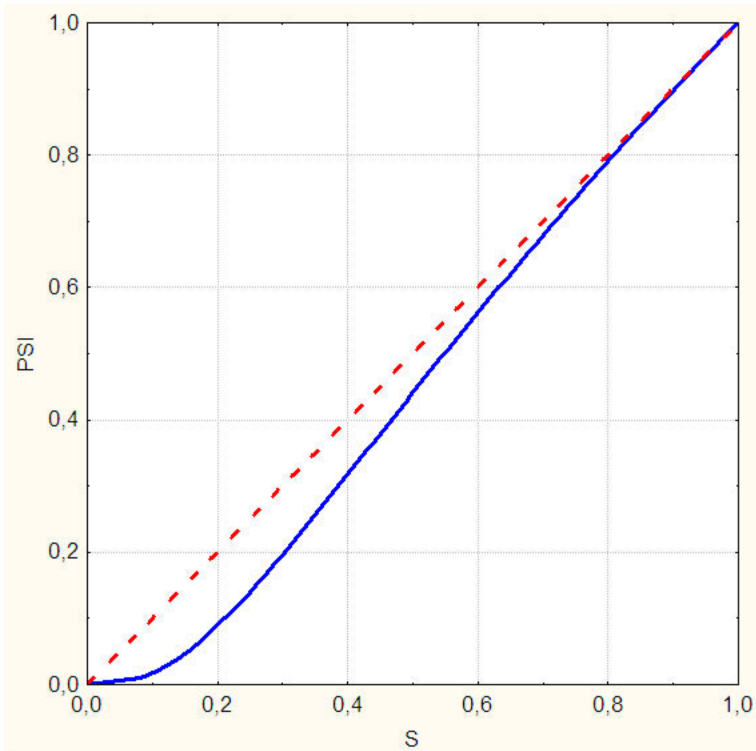

Рис. 3.3: функция $\psi(s)$

Видно, что график лежит ниже диагонали и касается ее в точке $s = 1$. Свойство (3.3) нарушается при всех $s \in (0, 1)$.

3.4 Пороговые модели

До сих пор мы рассматривали модели, в которых величина ν_n определялась внешними причинами по отношению к величинам $\{\xi_{n,m}\}$. Теперь введем модели, в которых ν_n представляет собой момент остановки относительно последовательности $\{\xi_{n,m},\, m \geq 1\}$, где $\xi_{n,m}$, $m \geq 1$ независимы и имеют равномерное распределение на $[0, 1]$, а остановка происходит в момент превышения очередной случайной величиной некоторого порога.

Заметим, что в [58, 60] рассматривалась модель максимумов случайных величин, в которой остановка происходила в момент превышения порога (а именно, времени t) не очередной величиной, а их накопленной суммой. Это обобщение классической задачи о наиболее длинной серии успехов в испытаниях Бернулли [107, §8.5]. Однако в этом случае момент остановки растет просто асимптотически пропорционально порогу, и не происходит таких интересных эффектов, как в наших моделях.

Пример 3.4.1. Числовой порог. Пусть задана числовая последовательность $a_n \in (0,1)$, $n \geq 1$, и $a_n \to 1$, $n \to \infty$. Обозначим $\varepsilon_n = 1 - a_n > 0$, тогда $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$. Положим $\nu_n = \min\{m \geq 1 : \xi_{n,m} > a_n\}$. Тогда

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) = \mathbf{P}(\xi_{n,\nu_n} \leq u_n(s)) = \mathbf{P}(\xi_{1,1} \leq u_n(s) | \xi_{1,1} > a_n) = \\ &= (u_n(s)) - a_n)_+ / \varepsilon_n = (1 - (1 - u_n(s))/\varepsilon_n)_+, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $u_n(s)$ определяются из условия

$$\mathbf{E} u_n(s)^{\nu_n} = \frac{\varepsilon_n u_n(s)}{1 - (1-\varepsilon_n) u_n(s)} \to s, \quad n \to \infty, \tag{3.8}$$

поскольку ν_n имеет геометрическое распределение (начиная от единицы) с параметром ε_n. Из (3.8) следует

$$1 - u_n(s) \sim \varepsilon_n \frac{1-s}{s}, \quad n \to \infty. \tag{3.9}$$

Подставляя это в (3.7) и переходя к пределу, получаем $\psi(s) = (2 - 1/s)_+$ по определению 1. В этом случае $\psi(s) < s$ при всех $s \in (0,1)$. Имеем $\psi(s) = 0$, а значит, и $\log_s \psi(s) = +\infty$, при $s \in [0, 1/2]$, и $\log_s \psi(s) > 1$ при $s \in (1/2, 1)$, а также $\log_s \psi(s) \to 1$, $s \to 1$. Отсюда $\theta^- = 1$, $\theta^+ = +\infty$.

Удивительно, что результат совершенно не зависит от выбора последовательности a_n, $n \geq 1$.

Что можно сказать в этом случае об экстремальном индексе по определению 2? Из (3.8) с учетом (3.9) получаем

$$\mathbf{E} u_n(s)^{\theta\nu_n} = \frac{\varepsilon_n u_n(s)^\theta}{1 - (1-\varepsilon_n) u_n(s)^\theta} \to \frac{s}{\theta + (1-\theta)s}, \quad n \to \infty, \tag{3.10}$$

однако экстремальная функция не имеет такого вида, следовательно, экстремальный индекс по определению 2 не существует.

Рассмотрим теперь модель со случайными порогами ζ_n, $n \geq 1$. Пусть $0 < \zeta_n < 1$ п.н.; $\xi_{n,m}$, $m \geq 1$, не зависят от ζ_n, и $\nu_n = \min\{m \geq 1 : \xi_{n,m} > \zeta_n\}$.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $n(1-\zeta_n) \xrightarrow{L_1} \zeta > 0$, $n \to \infty$, $\mathbf{E}\zeta = 1$. *Тогда* $\psi(s) = g(f^{-1}(s))$, *где* $f(t) = \mathbf{E}(1+t/\zeta)^{-1}$ *и* $g(t) = \mathbf{E}(\zeta - t)_+$.

Доказательство. При условии, что $\zeta_n = x \in (0,1)$, длина серии ν_n имеет геометрическое распределение (начиная с единицы) с параметром $1-x$. Отсюда следует, что $(1-\zeta_n)\nu_n \xrightarrow{d} \eta$ и $\nu_n/n \xrightarrow{d} \eta/\zeta$, $n \to \infty$, где η имеет стандартное показательное распределение и не зависит от ζ. Обозначим $f(t) = \mathbf{E}e^{-t\eta/\zeta}$, тогда $f(t) = \mathbf{E}(1+t/\zeta)^{-1}$.

Пусть $\tau > 0$, тогда

$$\mathbf{E}(1-\tau/n)^{\nu_n} = \mathbf{E}((1-\tau/n)^n)^{\nu_n/n} \to \mathbf{E}e^{-\tau\eta/\zeta} = f(\tau), \quad n \to \infty.$$

Так что из $\mathbf{E}u_n(s)^{\nu_n} \to s$ следует $u_n(s) = 1-(1+o(1))f^{-1}(s)/n$, $n \to \infty$.

Получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(M_n \le u_n(s)) = \mathbf{P}(\xi_{1,1} \le u_n(s) | \xi_{1,1} > \zeta_n) = \\
&= \mathbf{P}(\zeta_n < \xi_{1,1} \le u_n(s))/\varepsilon_n = \mathbf{E}(1-(1+o(1))f^{-1}(s)/n - \zeta_n)_+/\varepsilon_n \to \\
&\to \mathbf{E}(\zeta - f^{-1}(s))_+, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

□

Напомним удобную для вычислений формулу

$$\mathbf{E}(\zeta - t)_+ = \int_t^{+\infty} \bar{F}_\zeta(x)\,dx, \tag{3.11}$$

получаемую интегрированием по частям.

Пример 3.4.2. Пусть ζ равновероятно принимает значения $1-\delta$ и $1+\delta$, $0<\delta<1$ (случай $\delta = 0$ сводится к примеру 3.4.1). Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t/(1-\delta)} + \frac{1}{1+t/(1+\delta)}\right) = \frac{(1+t)-\delta^2}{(1+t)^2-\delta^2},$$

откуда

$$f^{-1}(s) = \frac{1+\sqrt{1-4s(1-s)\delta^2}}{2s} - 1,$$

и

$$\psi(s) = \frac{1}{2}(1-\delta-f^{-1}(s))_+ + \frac{1}{2}(1+\delta-f^{-1}(s))_+$$

Имеем $\psi(s) = 0$ при $0 < s < f(1+\delta) = (2-\delta)/4$, так что $\theta^+ = +\infty$.

На рис. 3.4 представлены графики экстремальной функции: в примере 3.4.1 — сплошной линией, в примере 3.4.2 при $\delta = 0,5$ — крупным пунктиром, при $\delta = 0,9$ — штрих-пунктиром. Диагональ обозначена мелким пунктиром. Видно, что в примере 3.4.2 графики пересекают диагональ снизу вверх, т.е. сначала $\psi(s) < s$, а затем $\psi(s) > s$.

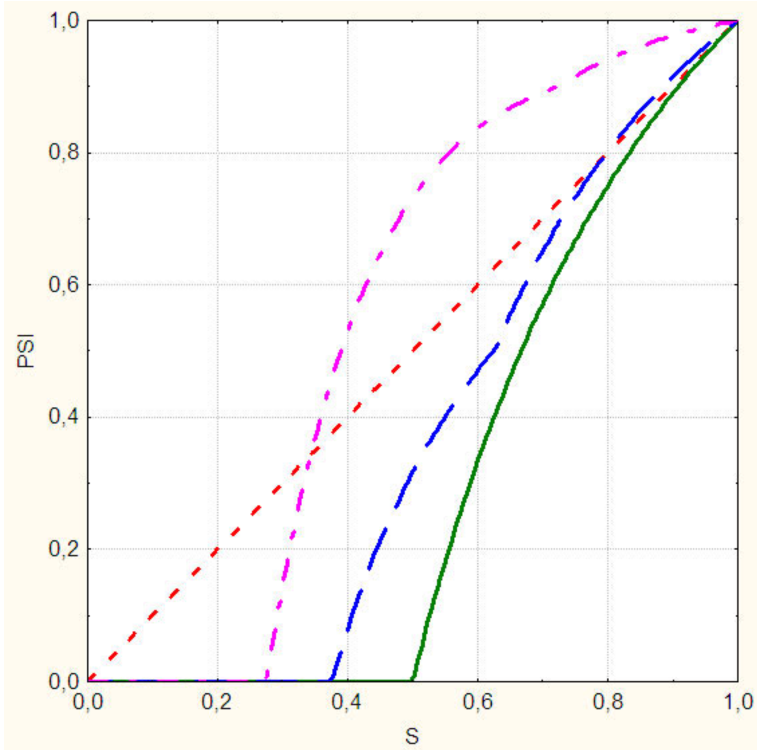

Рис. 3.4: функции $\psi(s)$

В общем случае найти $\psi(s)$ в явном виде невозможно, но можно построить ее график с помощью параметрического представления $\{(f(t), g(t)), t \geq 0\}$. А иногда бывает проще обратить g, чем f, и получить в явном виде обратную функцию $\psi^{-1}(u) = f(g^{-1}(u))$.

Пример 3.4.3. Рассмотрим распределение Парето

$$F_\zeta(x) = 1 - \frac{1}{(1 + x/c)^\alpha}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 1.$$

Прежде всего, из условия $\mathbf{E}\zeta = 1$ находим $c = \alpha - 1$. В общем случае имеем

$$g(t) = \frac{1}{(1 + t/c)^{\alpha-1}} \quad f(t) = \frac{\alpha}{c} \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x + t)(1 + x/c)^{\alpha+1}}.$$

В частности, при $\alpha = 2$ получаем

$$f(t) = \frac{t^2 - 2t\ln t - 1}{(t-1)^3}, \quad g^{-1}(u) = u^{-1} - 1,$$

а при $\alpha = 3$ получаем

$$f(t) = \frac{(t-2)(t^2 - 10t - 8) + 24t\ln(t/2)}{(t-1)^4}, \quad g^{-1}(u) = 2(u^{-1/2} - 1).$$

На рис. 3.5 представлены графики обратной экстремальной функции: при $\alpha = 2$ — сплошной линией, при $\alpha = 3$ — крупным пунктиром. Диагональ обозначена мелким пунктиром. Видно, что при $\alpha = 2$ имеет место $\psi(s) > s$ при всех $s \in (0, 1)$, причем в нуле наблюдается касание диагонали, а при $\alpha = 3$ сначала $\psi(s) < s$, а затем $\psi(s) > s$.

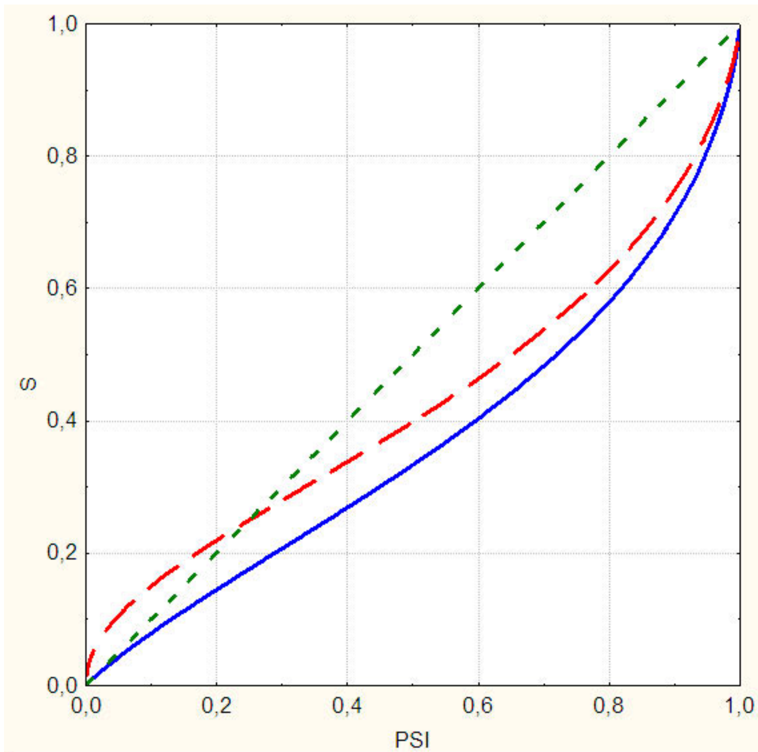

Рис. 3.5: функции $\psi^{-1}(u)$

Можно сделать вывод, что классическое свойство (3.3) в форме $\psi(s) \geq s$ при всех $s \in [0, 1]$ в пороговых моделях может нарушаться как при некоторых $s \in (0, 1)$ (примеры 3.4.2 и 3.4.3 при $\alpha = 3$), так и при всех (пример 3.4.1), а может и не нарушаться (пример 3.4.3 при $\alpha = 2$). Таким образом, здесь наблюдается большое разнообразие поведения экстремальных функций.

Следствие 3.4.1.

1) *Если* $\bar{F}_\zeta(x) \sim Cx^{-\alpha}$, $x \to \infty$, $C > 0$, $\alpha > 1$, *то* $\psi(s) \sim Cs^{\alpha-1}/(\alpha - 1)$, $s \to 0$, *и* $\theta_0 = \alpha - 1$. *Если* $\bar{F}_\zeta(x)$ *убывает быстрее любой степени, то* $\theta_0 = +\infty$.

2) *Если* $\mathbf{E}\zeta^{-1} < \infty$, *то* $\theta_1 = 1/\mathbf{E}\zeta^{-1}$. *Если* $\mathbf{E}\zeta^{-1} = \infty$, *то* $\theta_1 = 0$.

Доказательство.

1) Заметим, что $f(t) = \mathbf{E}(\zeta/(\zeta + t)) \sim \mathbf{E}\zeta/t = 1/t$, $t \to \infty$. Поэтому $f^{-1}(s) \sim 1/s$, $s \to 0$. Из $\bar{F}_\zeta(x) \sim Cx^{-\alpha}$, $x \to \infty$, по формуле (3.11) следует

$g(t) \sim Ct^{-(\alpha-1)}/(\alpha-1)$, $t \to \infty$. Следовательно, $\psi(s) = g(f^{-1}(s)) \sim Cs^{\alpha-1}/(\alpha-1)$, $s \to 0$, и $\theta_0 = \alpha - 1$.

Если $\bar{F}_\zeta(x) = o(x^N)$, $x \to \infty$, то $g(t) = o(t^{N-1})$, $t \to \infty$, и $\psi(s) = o(s^{N-1})$, $s \to 0$, для любого $N > 0$, откуда $\theta_0 = +\infty$.

2) При $\mathbf{E}\zeta^{-1} < \infty$ имеем $1 - f(t) = \mathbf{E}(t/(\zeta + t)) \sim t\mathbf{E}\zeta^{-1}$, $t \to 0$. Отюда $f^{-1}(s) \sim (1-s)/\mathbf{E}\zeta^{-1}$, $s \to 1$. Кроме того, $1 - g(t) \sim t$, $t \to 0$. Следовательно, $1 - \psi(s) \sim (1-s)/\mathbf{E}\zeta^{-1}$, $s \to 0$, откуда $\theta_1 = 1/\mathbf{E}\zeta^{-1}$. Результат для $\mathbf{E}\zeta^{-1} = \infty$ получаем предельным переходом. $\square$

Понятно, что если из показателей θ_0 и θ_1 один больше единицы, а другой меньше, то график $\psi(s)$ неизбежно пересекает диагональ.

По следствию 3.4.1 в примере 3.4.2 получаем $\theta_0 = +\infty$, $\theta_1 = 1 - \delta^2$, а в примере 3.4.3 получаем $\theta_0 = \alpha - 1$ и $\theta_1 = 0$.

Глава 4

Максимальные ветвящиеся процессы с одним типом частиц

Параллели между теорией суммирования и стохастической теорией экстремумов давно и хорошо известны.

Так, центральной предельной теореме (и ее аналогам) соответствует теорема об экстремальных типах, устойчивым распределениям — максимум-устойчивые [54, гл.1], процессам авторегрессии и скользящего среднего можно сопоставить процессы максимум-авторегрессии и скользящего максимума [106], устойчивым процессам Леви — экстремальные процессы [9, §6.5] и т.д.

Классическими объектами исследования в теории случайных процессов являются ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона (с одним типом частиц и дискретным временем) [6, 77]. Оказывается, для них также возможно разумным образом построить экстремальные аналоги, которые и называются максимальными ветвящимися процессами (МВП). А именно, мы заменяем суммирование числа потомков частиц (при определении численности очередного поколения) на максимум.

Напомним историю вопроса. МВП были введены и изучались Дж.Ламперти [123, 124] в 1970–72 гг., однако в дальнейшем были совершенно всеми заброшены (хотя и упомянуты в обзоре [145]). Новый этап исследований МВП был начат А.В.Лебедевым с 2001 года. Было проведено обобщение процессов с целочисленных значений на произвольные неотрицательные [39]. Изучались МВП сначала с одним типом частиц (см. обзор [42]), а затем с несколькими типами (многотипные) [46, 47, 48]. До недавнего времени исследования автора в этой тематике оставались уникальными. Лишь в 2012 году они были неожиданно подхвачены в работе О.Айдогмуса, А.П.Гхоша, С.Гхоша и А.Ройтерштейна [92], где были введены раскрашенные максимальные ветвящиеся процессы. Их отличие от многотипных МВП заключается в том, что типы (цвета) частиц определяются уже после формирования поколения, случайным образом, причем тип влияет на дальнейшую плодовитость. Другим отличием от подхода автора стало рассмотрение только процессов, уходящих в бесконечность.

Далее в этой главе мы рассмотрим МВП с одним типом частиц, а в следующей — с несколькими типами частиц. В разделе 4.1 даны определение и основные свойства МВП (включая теорему эргодичности). В разделе 4.2 доказаны предельные теоремы для стационарных распределений для некоторых семейств распределений числа потомков. В разделе 4.3 рассмотрены вентильные бесконечнолинейные системы как приложения теории МВП. В разделе 4.4 изучена асимптотика хвостов стационарных распределений.

4.1 Определение и основные свойства

Рассмотрим случайные процессы со значениями в $\mathbf{Z}_+$, заданные стохастически рекуррентными формулами вида

$$Z_{n+1} = \bigvee_{m=1}^{Z_n} \xi_{m,n}, \tag{4.1}$$

где через $\bigvee$ обозначена операция взятия максимума, и $\xi_{m,n}$, $m \geq 1, n \geq 0$, — независимые случайные величины с общим распределением F на $\mathbf{Z}_+$. Полагаем (как и в случае суммирования), что результат взятия максимума “ноль раз” (при $Z_n = 0$) равен нулю.

Можно сказать (по аналогии с процессами Гальтона-Ватсона), что в максимальном ветвящемся процессе выживают потомки только одной частицы, у кого их больше всего. Понятно также, что множество возможных значений МВП (при $n \geq 1$) совпадает с множеством возможных значений числа потомков. Из (4.1) следует, что процесс является однородной цепью Маркова на этом множестве.

Другую интерпретацию МВП можно предложить в теории массового обслуживания, рассмотрев вентильные бесконечнолинейные системы. Так называют системы с бесконечным числом приборов, в которых доступ заявок к обслуживанию регулируется вентилем. Предполагается, что вентиль открыт только в том случае, когда все приборы свободны. Заявки поступают в очередь с бесконечным числом мест ожидания, а обслуживание происходит по стадиям. В начале стадии, когда вентиль открывается, все заявки из очереди мгновенно получают доступ к приборам и далее обслуживаются параллельно и независимо, до полного освобождения всех приборов. В момент освобождения всех приборов вентиль вновь открывается для новой партии заявок (пришедших за это время) и следующей стадии.

Рассмотрим подобную систему с дискретным временем, и пусть в каждый момент времени поступает ровно по одной заявке. Тогда в силу параллельности работы приборов время обслуживания очередной партии заявок (а значит, и количество заявок в следующей) равно максимуму из времен их обслуживания. Таким образом, обозначая через Z_n длительность n-ой стадии, а через $\xi_{m,n}$ — времена обслуживания заявок на ней, получаем в точности (4.1).

Вентильные бесконечнолинейные системы с непрерывным временем и пуассоновским входным потоком изучались в [101, 102, 122, 141] (другими методами). В этом случае необходимо оговорить, что происходит, если вентиль открывается при пустой очереди. Наиболее естественно предположить, что система ждет поступления новой заявки, с которой и начинается следующая стадия.

МВП были введены в [123] (в связи с моделями дальнодействующей перколяции), и там же были получены критерии их возвратности. А именно (в предположении $F(0) = 0$), при выполнении условия

$$\limsup_{x\to+\infty} x(1 - F(x)) < e^{-\gamma}, \tag{4.2}$$

где $\gamma = 0,577...$ — константа Эйлера, цепь $\{Z_n\}$ положительно возвратна, и напротив, при

$$\liminf_{x\to+\infty} x(1 - F(x)) > e^{-\gamma}$$

имеет место $Z_n \to +\infty$, $n \to \infty$ почти наверное (п.н.).

Далее, в [124] рассмотрен критический случай $x(1-F(x)) \to e^{-\gamma}$, $x \to +\infty$, с учетом дальнейших членов разложения хвоста на бесконечности. Показано, что если $(e^{\gamma}x(1 - F(x)) - 1)\ln x \to d$, $x \to +\infty$, то процесс возвратен при $d < \pi^2/12$ и уходит на бесконечность п.н. при $d > \pi^2/12$.

Согласно (4.1) и предположению о случае $Z_n = 0$ процесс имеет переходные вероятности

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} \le j | Z_n = i) = F(j)^i, \quad i, j \in \mathbf{Z}_+$$

(где полагаем $0^0 = 1$), что подсказывает рассмотреть цепи Маркова на произвольном измеримом множестве $T \subset \mathbf{R}_+$ с переходными вероятностями

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} \le y | Z_n = x) = F(y)^x, \quad x, y \in T, \tag{4.3}$$

где F также сосредоточено на T.

Подобные процессы могут рассматриваться как самостоятельно, так и в качестве предельных (в каком-либо смысле) для МВП на $\mathbf{Z}_+$ (нормированных определенным образом). Например, они могут пригодиться для описания поведения вентильных бесконечнолинейных систем, в том числе предельного при большой загрузке и т.п.

В частности, для вентильной бесконечнолинейной системы с непрерывным временем и пуассоновским входным потоком последовательность длительностей стадий на периоде занятости удовлетворяет (4.3) с $F(x) = \exp\{-\lambda \bar{B}(x)\}$, $x \ge 0$, где λ — интенсивность входного потока, $B(x)$ — функция распределения времени обслуживания одной заявки, $\bar{B}(x) = 1 - B(x)$. Действительно, обозначим длительность n-ой стадии через Z_n. При условии $Z_n = x$ число заявок, поступивших на данной стадии, пуассоновское с параметром λx, а Z_{n+1} есть максимум этого (случайного) числа независимых случайных величин с распределением B. Таким образом,

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} \le y | Z_n = x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} B(y)^k = \exp\{-\lambda x \bar{B}(y)\} = F(y)^x.$$

Для описания системы на всем протяжении времени требуются уже МВП с иммиграцией в момент обнуления и т.п. (об этом подробнее в разделе 4.3).

Далее будем говорить о максимальных ветвящихся процессах на T и обозначать МВП(T). Заметим, что аналогичным обобщением для процессов Гальтона-Ватсона являются процессы Иржины [23, 120] (с непрерывным множеством состояний и дискретным временем), однако в данном случае T может быть любым измеримым подмножеством $\mathbf{R}_+$.

Если $T_1 \subset T_2$, то всякий МВП(T_1) является также МВП(T_2). Таким образом, любой МВП(T), в частности МВП($\mathbf{Z}_+$), является МВП($\mathbf{R}_+$).

Формула (4.1) для таких МВП в общем случае уже не имеет места, но в соответствии с (4.3) они допускают эквивалентное представление стохастической рекуррентной последовательностью вида:

$$Z_{n+1} = \begin{cases} F^{-1}(U_{n+1}^{1/Z_n}), & Z_n > 0 \\ 0, & Z_n = 0 \end{cases}, \quad n \ge 0, \tag{4.4}$$

где $F^{-1}(y) = \sup\{x : F(x) \le y\}$ и U_n, $n \ge 1$, — независимые равномерно распределенные на $(0,1)$ случайные величины, а $Z_0 \ge 0$ и не зависит от них. При этом распределение F будем по-прежнему называть распределением числа потомков.

Далее доказан ряд свойств МВП (свойства 4.1.1–4.1.4), теорема эргодичности (теорема 4.1.1) и условия вырождения (следствие 4.1.1).

Докажем некоторые простые свойства МВП, такие как свойство преобразования подобия, ассоциированность [5, 109] и монотонность по параметрам [83].

Свойство 4.1.1. *Если* $\{Z_n\}$ *является МВП(*T*) с* $F(x)$, *то* $\{\lambda Z_n\}$ *при любом* $\lambda > 0$ *является МВП(*λT*) с* $F(x/\lambda)^{1/\lambda}$.

Это свойство доказывается непосредственно подстановкой в (4.3).

Из данного свойства следует замкнутость класса МВП($\mathbf{R}_+$) относительно умножения на $\lambda > 0$ и замкнутость МВП($\mathbf{Z}_+$) при $\lambda \in \mathbf{N}$.

Лемма 4.1.1. *Для любых чисел* $Z_0' \le Z_0''$ *и* $U_n'' \le U_n''$, $n \ge 1$, *где* $Z_0', Z_0'' \ge 0$ *и* $U_n', U_n'' \in (0,1)$, *числовые последовательности* $\{Z_n'\}$ *и* $\{Z_n''\}$, *построенные по формуле* (4.4), *удовлетворяют условию* $Z_n' \le Z_n''$ *для всех* $n \ge 0$.

Доказательство. По условию $Z_0' \le Z_0''$. Пусть верно $Z_n' \le Z_n''$ для некоторого $n \ge 0$. Тогда, поскольку F^{-1} — неубывающая функция, из $U_{n+1}' \le U_{n+1}''$ и формулы (4.4) получаем $Z_{n+1}' \le Z_{n+1}''$. Утверждение леммы верно по принципу математической индукции. $\square$

Будем далее пользоваться понятием ассоциированности случайных величин [5, 109].

Функцию многих переменных $f(x)$, где $x = (x_1, \dots x_n)$, назовем монотонно неубывающей, если из $x_i' \le x_i''$, $1 \le i \le n$, следует $f(x') \le f(x'')$. Случайные величины набора $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ называются ассоциированными, если $\mathrm{cov}(f(\zeta), g(\zeta)) \ge 0$ для всех тех монотонно неубывающих f и g, для которых эта ковариация существует. Говорят, что случайный процесс или поле $\{\zeta(t) : t \in \mathcal{T}\}$ ассоциированы, если ассоциированы их значения $\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n)$ для любого конечного множества $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathcal{T}$.

Согласно [5, теорема 1.8], [109], независимые случайные величины ассоциированы; монотонно неубывающие функции от ассоциированных случайных величин также обладают этим свойством.

Свойство 4.1.2. *Любой МВП ассоциирован.*

Доказательство. Достаточно заметить, что по лемме 4.1.1 любые $Z_{i_1}, \dots Z_{i_m}$ представляют собой неубывающие функции от независимых случайных величин Z_0 и U_n, $1 \le n \le \max\{i_1, \dots, i_m\}$. $\square$

Для установления монотонности по параметрам [83] введем отношение (частичного) порядка между распределениями: $F_1 \prec F_2$, если $F_1(x) \geq F_2(x)$, $\forall x$. Заметим, что из $F_1 \prec F_2$ следует $F_1^{-1}(y) \leq F_2^{-1}(y)$, $y \in (0, 1)$.

Обозначим через $Z = \mathcal{Z}(F, G)$ МВП с распределением числа потомков F и начальным распределением G для Z_0.

Свойство 4.1.3. *Если $F' \prec F''$ и $G' \prec G''$, то можно построить процессы $Z' = \mathcal{Z}(F', G')$ и $Z'' = \mathcal{Z}(F'', G'')$ на одном вероятностном пространстве так, что $Z'_n \leq Z''_n$ для всех $n \geq 0$ п.н.*

Доказательство. Пусть U_0 — равномерно распределенная на $(0, 1)$ случайная величина, не зависящая от U_n, $n \geq 1$. Полагая $Z'_0 = (G')^{-1}(U_0)$ и $Z''_0 = (G'')^{-1}(U_0)$, получаем $Z'_0 \leq Z''_0$. Далее, из отношения $(F')^{-1}(y) \leq (F'')^{-1}(y)$ и формулы (4.4) получаем свойство 4.1.3 по принципу математической индукции. $\square$

Заметим, что для МВП нуль всегда является поглощающим состоянием. Так, для МВП($\mathbf{Z}_+$) при условии (4.2) и $F(0) > 0$ это приводит к вырождению п.н. [123]. Для МВП(T), если $F(0) = 0$, нуль можно просто исключить из множества состояний, рассматривая процесс с ненулевым начальным условием. Однако если нуль является предельной точкой T, остается возможность асимптотической сходимости к нему при $n \to \infty$. Следующая теорема дает достаточные условия для того, чтобы исключить уход процесса как в нуль, так и на бесконечность, и сделать его эргодическим. Здесь и далее имеется в виду эргодичность по Харрису [3, гл.1].

Теорема 4.1.1. *Если для МВП(T), $T \subset (0, +\infty)$, выполнено* (4.2) *и*

$$\liminf_{x \to 0} x(-\ln F(x)) > e^{-\gamma}, \tag{4.5}$$

то процесс эргодический.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать $T = (0, +\infty)$. Прежде всего заметим, что условия (4.2) и (4.5) эквивалентны утверждению о существовании таких $0 < x_1 \leq x_2$ и $0 < c_2 < e^{-\gamma} < c_1$, что $F(x) \leq e^{-c_1/x}$ при $x \leq x_1$ и $F(x) \geq e^{-c_2/x}$ при $x \geq x_2$.

В качестве функции Ляпунова рассмотрим $g(x) = (\ln(x/x_2))_+ + (\ln(x_1/x))_+$, где $y_+ = \max\{0, y\}$. Обозначим

$$\mu(x) = \mathbf{E}(g(Z_{n+1}) | Z_n = x) - g(x),$$

тогда

$$
\begin{gathered}
\mu(x) = \mathbf{E}\{\ln(Z_{n+1}/x_2)\mathbf{I}(Z_{n+1} > x_2)|Z_n = x\} + \\
\mathbf{E}\{\ln(x_1/Z_{n+1})\mathbf{I}(Z_{n+1} < x_1)|Z_n = x\} - g(x) = \\
\int_0^\infty \mathbf{P}(\ln(Z_{n+1}/x_2)\mathbf{I}(Z_{n+1} > x_2) > y|Z_n = x)\,dy + \\
\int_0^\infty \mathbf{P}(\ln(x_1/Z_{n+1})\mathbf{I}(Z_{n+1} < x_1) > y|Z_n = x)\,dy - g(x) \le \\
\int_0^\infty (1 - F(x_2e^y)^x)\,dy + \int_0^\infty F(x_1e^{-y})^x\,dy - g(x) \le \\
\int_0^\infty (1 - \exp\{-(c_2x/x_2)e^{-y}\})\,dy + \int_0^\infty \exp\{-(c_1x/x_1)e^y\}\,dy - g(x) = \\
\gamma + \ln(c_2x/x_2) - \mathrm{Ei}(-c_2x/x_2) - \mathrm{Ei}(-c_1x/x_1) - \\
((\ln(x/x_2))_+ + (\ln(x_1/x))_+),
\end{gathered}
\tag{4.6}
$$

где $\mathbf{I}(A)$ — индикатор события A, и через Ei обозначена интегральная показательная функция

$$
\mathrm{Ei}(x) = -\int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt, \quad x < 0,
$$

обладающая, в частности, следующими свойствами:

$$
\mathrm{Ei}(-x) - \ln x \to \gamma, \quad x \to 0; \quad \mathrm{Ei}(-x) \to 0, \quad x \to +\infty. \tag{4.7}
$$

Обозначим правую часть (4.6) через $\mu^*(x)$, тогда, используя (4.7), получаем $\mu^*(x) \to \ln(c_2/e^{-\gamma}) < 0$, $x \to \infty$, и $\mu^*(x) \to -\ln(c_1/e^{-\gamma}) < 0$, $x \to 0$. Следовательно, в силу оценки (4.6), существуют такие $\varepsilon > 0$ и $0 < v_1 \le v_2$, что $\mu(x) \le -\varepsilon$ при $x \notin V = [v_1, v_2]$. Кроме того, $\sup_{x\in V} \mathbf{E}(g(Z_{n+1})|Z_n = x) < \infty$. Таким образом, условия Ляпунова [3, §4.2] выполнены.

Проверим теперь условие перемешивания. Заметим, что для любых $0 < a < b$ и $0 < y_1 \le y \le y_2$, верно

$$
F(b)^y - F(a)^y \ge \frac{y_1}{y_2}(F(b)^{y_2} - F(a)^{y_2}),
$$

откуда следует, что для любого измеримого B выполняется

$$
\mathbf{P}(Z_{n+1} \in B|Z_n = x) \ge \frac{v_1}{v_2}\mathbf{P}(Z_{n+1} \in B|Z_n = v_2), \quad \forall x \in V. \tag{4.8}
$$

Кроме того, любой МВП неприводим и апериодичен (иначе говоря, из любого состояния $x \in T$ можно попасть в любое множество $B \subset T$, причем за один шаг). Из условий Ляпунова и (4.8) по [3, §2, теорема 2] следует эргодичность МВП. $\square$

Достаточное условие Ламперти для положительной возвратности МВП на $\mathbf{Z}_+$ [123] получается из теоремы 4.1.1 как частный случай.

Далее будем обозначать эргодическое распределение $\{Z_n\}$ через Ψ, а случайную величину с таким распределением через $\tilde{Z}$.

Свойство 4.1.4. *Если для двух эргодических МВП(T) с F' и F'' верно $F' \prec F''$, то $\Psi' \prec \Psi''$.*

Доказательство. Возьмем произвольные $G' = G''$ на T и построим процессы на одном вероятностном пространстве согласно свойству 4.1.3. Тогда из $Z_n' \le Z_n''$ п.н. следует $\mathbf{P}(Z_n' \le x) \ge \mathbf{P}(Z_n'' \le x)$, $n \ge 1$, откуда при $n \to \infty$ получаем $\Psi'(x) \ge \Psi''(x)$, $x > 0$. $\square$

Очевидно, свойство 4.1.4 верно и в тех случаях, когда одно или оба предельных распределения сосредоточены в нуле.

Следствие 4.1.1. *Если для МВП($\mathbf{R}_+$) выполнено* (4.2) *и* $F(0) > 0$, *то процесс вырождается п.н.*

Здесь под вырождением понимается обращение процесса в нуль, начиная с некоторого (случайного) момента.

Доказательство. Заметим, что для любых $C > 0$, $n \ge 0$ верно

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} = 0) = \mathbf{E}F(0)^{Z_n} \ge \mathbf{P}(Z_n = 0) + F(0)^C \mathbf{P}(0 < Z_n \le C).$$

Последовательность $\mathbf{P}(Z_n = 0)$ монотонно неубывает и ограничена, а значит, стремится к некоторому пределу $p_0 \in (0, 1]$. Получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(0 < Z_n \le C) \le p_0 F(0)^{-C} < \infty,$$

так что по лемме Бореля-Кантелли Z_n попадает в $(0, C]$ конечное число раз п.н. при любом $C > 0$, что может означать либо вырождение, либо уход на бесконечность при $n \to \infty$.

Пусть $F^*(x) = F(x) \exp\{-1/x^2\} \mathbf{I}(x > 0)$, тогда $F \prec F^*$. Согласно свойству 4.1.3 можем построить МВП($\mathbf{R}_+$) с F^*, такой, что $Z_n \le Z_n^*$ п.н. Заметим, что F^* удовлетворяет условиям теоремы 4.1.1, так что $\mathbf{P}(Z_n^* \to +\infty) = 0$, а следовательно и $\mathbf{P}(Z_n \to +\infty) = 0$. Таким образом, происходит вырождение п.н. $\square$

Это следствие можно применить для вывода достаточного условия конечности (п.н.) периода занятости вентильной бесконечнолинейной системы с непрерывным временем и пуассоновским входным потоком (см.

выше). Поскольку в данном случае $\bar{F}(x) \sim \lambda \bar{B}(x)$, $x \to +\infty$, то оказывается достаточно выполнения неравенства

$$\lambda \limsup_{x\to+\infty} x(1 - B(x)) < e^{-\gamma}.$$

Пример 4.1.1. Переходные вероятности цепи Маркова для МВП($\mathbf{N}$) имеют вид:

$$p_{i,j} = F(j)^i - F(j-1)^i, \quad i, j \in \mathbf{N}.$$

Таким образом, в случае конечного $T \subset \mathbf{N}$ по матрице $P = (p_{i,j})$ не составляет труда рассчитать стационарное распределение.

Например, пусть число потомков принимает значения K и L с вероятностями p и $1-p$ соответственно, $1 \leq K < L$, $p \in [0,1]$. Тогда стационарные вероятности определяются по формулам:

$$\mathbf{P}(\tilde{Z} = K) = \frac{p^L}{1 - p^K + p^L}, \quad \mathbf{P}(\tilde{Z} = L) = \frac{1 - p^K}{1 - p^K + p^L}.$$

Пример 4.1.2. Пусть $T = \{1/k : k \in \mathbf{N}\}$ и $F(1/k) = p^{k-1}$, $p \in (0,1)$. В данном случае распределение F и множество T дискретны, однако нуль является предельной точкой T. Имеем $F(x) = p^{\lceil 1/x \rceil - 1} \leq p^{(1/x)-1}$, $x \in (0,1]$, где через $\lceil a \rceil$ обозначено округление числа a в большую сторону. По теореме 4.1.1 такой МВП эргодический при $p < \exp\{-e^{-\gamma}\} = 0,570....$

Пример 4.1.3. Если функция распределения $F(x)$ непрерывна и строго возрастает на $(0,+\infty)$, а $F(0) = 0$, то (4.4) преобразованием $\zeta_n = -\ln(-\ln F(Z_n))$ приводится к форме общей (нелинейной) авторегрессии первого порядка:

$$\zeta_{n+1} = f(\zeta_n) + \eta_{n+1}, \quad n \geq 0, \tag{4.9}$$

где $f(u) = \ln F^{-1}(\exp\{-e^{-u}\})$, и независимые случайные величины $\eta_n = -\ln(-\ln U_n)$, $n \geq 1$, имеют функцию распределения Гумбеля $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$.

Эргодичность подобных моделей изучалась, например, в [98].

Пусть $F(x) = \exp\{-(x/c)^{-\alpha}\}$, $x, c, \alpha > 0$ (распределение Фреше), тогда МВП допускает конструктивное представление

$$Z_{n+1} = \nu_{n+1} Z_n^{1/\alpha},$$

где ν_n, $n \geq 1$, независимы и имеют распределение F, а (4.9) переписывается в форме линейной авторегрессии

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n/\alpha + \ln c + \eta_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Отметим, что $\mathbf{E}\eta_1 = \gamma$. При $\alpha < 1$ процесс $\{\zeta_n\}$ уходит на $\pm\infty$ в зависимости от знака начального условия ζ_0. При $\alpha > 1$ процесс $\{\zeta_n\}$ эргодический. При $\alpha = 1$ имеем простое случайное блуждание, уходящее на $+\infty$ при $c > e^{-\gamma}$, на $-\infty$ при $c < e^{-\gamma}$ и осциллирующее между $\pm\infty$ при $c = e^{-\gamma}$. Отсюда легко получить результаты для $\{Z_n\}$, если учесть, что $Z_n = F^{-1}(\Lambda(\zeta_n))$, откуда $Z_n \to 0$ при $\zeta_n \to -\infty$ и $Z_n \to +\infty$ при $\zeta_n \to +\infty$, а эргодичность сохраняется.

Очевидно, условия теоремы 4.1.1 выполняются только при $\alpha > 1$, поскольку тогда $x(1-F(x)) \to 0$, $x \to +\infty$, и $-x\ln F(x) \to +\infty$, $x \to 0$. В этом случае МВП эргодический.

Пример 4.1.4. Пусть $F(x) = \exp\{c(1-1/x)\}$, $x \in T = (0,1)$, $c > 0$, тогда $F^{-1}(y) = 1/(1-(\ln y)/c)$, $y \in (0,1)$, и (4.4) принимает форму

$$Z_{n+1} = \frac{Z_n}{Z_n - (\ln U_{n+1})/c},$$

которая заменой $\rho_n = 1/Z_n$ и $\sigma_n = -(\ln U_n)/c$ приводится к виду обобщенной авторегрессии первого порядка

$$\rho_{n+1} = 1 + \sigma_{n+1}\rho_n.$$

Известно [13, §8.4], что поведение такой последовательности определяется знаком $\mathbf{E}\ln\sigma_1 = -\gamma - \ln c$. При $c < e^{-\gamma}$ получаем $\rho_n \to +\infty$ и $Z_n \to 0$, $n \to \infty$ (п.н.). При $c > e^{-\gamma}$ процессы $\{\rho_n\}$ и $\{Z_n\}$ эргодические (в согласии с теоремой 4.1.1).

4.2 Предельные теоремы для стационарных распределений

В разделе 4.1 мы выяснили, что максимальные ветвящиеся процессы, в отличие от классических процессов Гальтона-Ватсона и Иржины, могут быть эргодическими и иметь невырожденное стационарное распределение. Понятно, что каждому распределению числа потомков, удовлетворяющему условиям эргодичности, соответствует какое-то свое стационарное распределение. Поставим теперь задачу вывода предельных теорем для стационарных распределений по некоторым семействам распределений числа потомков, когда это число стохастически стремится к бесконечности.

В разделе 4.2.1 получены результаты для семейств распределений числа потомков $F^{(\lambda)}$ на растущих отрезках $[1,\lambda]$, $\lambda \to \infty$, в разделах 4.2.2 и

4.2.3 — для степенных семейств $F^{(\lambda)} = F^{\lambda}$, $\lambda \to \infty$, когда базовые распределения числа потомков F имеют легкие или тяжелые (степенные) хвосты соответственно.

4.2.1 Случай растущих отрезков

Далее будет изучаться подкласс $\{Z_n\}$ с $T \subset [\alpha, \beta]$, где $0 < \alpha < \beta < \infty$. По теореме 4.1.1 такие цепи Маркова являются эргодическими.

Рассмотрим семейство процессов $\{Z_n^{(\lambda)}\}$ с $F^{(\lambda)}$ и $T^{(\lambda)} \subset [1, \lambda]$, $\lambda \geq 1$. Для каждого $\{Z_n^{(\lambda)}\}$ существует и единственно стационарное распределение $\Psi^{(\lambda)}$. Будем обозначать случайную величину с таким распределением через $\tilde{Z}^{\lambda}$.

Теорема 4.2.1.1 дает предельное распределение в общем виде, а следствия 4.2.1.1 и 4.2.1.2 позволяют уточнить ее.

Теорема 4.2.1.1. *Если*

$$\delta(q) = \limsup_{\lambda\to\infty} F^{(\lambda)}(q\lambda) < 1, \quad \forall q \in (0, 1) \tag{4.10}$$

и для некоторой функции $u : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ *существует предел*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(1 - F^{(\lambda)}(u(\lambda))) = \tau, \quad 0 \leq \tau \leq \infty,$$

то

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) = e^{-\tau}.$$

Доказательство. Обозначим $\kappa = q\lambda$. Докажем сначала, что $\Psi^{(\lambda)}(\kappa) \to 0$, $\lambda \to \infty$. Имеем

$$\Psi^{(\lambda)}(\kappa) = \mathbf{E}\{F^{(\lambda)}(\kappa)^{\tilde{Z}^{(\lambda)}} \mathbf{I}(\tilde{Z}^{(\lambda)} \in [1, \kappa])\} +$$
$$+\mathbf{E}\{F^{(\lambda)}(\kappa)^{\tilde{Z}^{(\lambda)}} \mathbf{I}(\tilde{Z}^{(\lambda)} \in (\kappa, \lambda])\} \leq F^{(\lambda)}(\kappa)\Psi^{(\lambda)}(\kappa) + F^{(\lambda)}(\kappa)^{\kappa},$$

откуда $\Psi^{(\lambda)}(\kappa) \leq F^{(\lambda)}(\kappa)^{\kappa}/(1 - F^{(\lambda)}(\kappa))$ и

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(\kappa) \leq \lim_{\lambda\to\infty} (\delta(q)^{q})^{\lambda}/(1 - \delta(q)) = 0.$$

Далее,

$$\Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) = \mathbf{E}\{F^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde{Z}^{(\lambda)}} \mathbf{I}(\tilde{Z}^{(\lambda)} \in [1, \kappa])\} +$$
$$\mathbf{E}\{F^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde{Z}^{(\lambda)}} \mathbf{I}(\tilde{Z}^{(\lambda)} \in (\kappa, \lambda])\},$$

откуда следует двусторонняя оценка

$$F^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\lambda}(1 - \Psi^{(\lambda)}(\kappa)) \leq \Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) \leq \Psi^{(\lambda)}(\kappa) + F^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\kappa}. \tag{4.11}$$

Переходя к пределу при $\lambda \to \infty$ в правой и левой частях (4.11) с учетом $F^{(\lambda)}(u(\lambda))^\lambda \to e^{-\tau}$, получаем

$$e^{-\tau} \le \liminf_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) \le \limsup_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) \le e^{-q\tau},$$

откуда в силу произвольности $q \in (0,1)$ следует утверждение теоремы. $\square$

Замечание 4.2.1.1. Если $\{Z_n\}$ удовлетворяет (4.3), то процесс $\{Z_n^*\}$, $Z_n^* = cZ_n$, $c > 0$, $n \ge 1$, также удовлетворяет (4.3) с $F^*(x) = F(x/c)^{1/c}$, по свойству 4.1.1. Таким образом, теорема 4.2.1.1 обобщается и на случай множеств $T^{(\lambda)} \subset [\alpha, \lambda]$, $\lambda \to \infty$, с любым $\alpha > 0$.

Следствие 4.2.1.1. *Если верно условие* (4.10), *каждая функция* $F^{(\lambda)}$ *непрерывна на* $T^{(\lambda)}$ *и выполнено условие*

$$\limsup_{\lambda\to\infty} F^{(\lambda)}(\inf T^{(\lambda)}) < 1,$$

то существует функция $v : [1,+\infty) \times [0,+\infty) \to [1,+\infty)$, *такая, что*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(v(\lambda,\tau)) = e^{-\tau}$$

для любого $\tau \ge 0$.

Доказательство. Из условия следует, что существуют такие $\lambda_0 \ge 1$ и $\delta_0 < 1$, что $F^{(\lambda)}(\inf T^{(\lambda)}) \le \delta_0$ при всех $\lambda \ge \lambda_0$. В качестве $v(\lambda,\tau)$ можно взять решение уравнения $F^{(\lambda)}(v) = 1 - \tau/\lambda$ на $T^{(\lambda)}$ при $\lambda \ge \max\{\tau/(1-\delta_0), \lambda_0\}$ и произвольное значение из $T^{(\lambda)}$ в противном случае. $\square$

Предельное распределение может быть разным: непрерывным или дискретным, вырожденным или невырожденным. Важный подкласс возможных предельных распределений составляют распределения экстремальных значений [54].

Будем писать $F \in D(G)$, если существуют числовые последовательности $a_n > 0$, b_n, $n \ge 1$, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigvee_{m=1}^{n} \xi_m \le a_n x + b_n\right) = G(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{4.12}$$

где случайные величины ξ_n, $n \ge 1$, независимы и имеют одинаковое распределение F; G — невырожденное распределение, относящееся к одному из экстремальных типов [54, теорема 1.4.2].

Следствие 4.2.1.2. *Если выполнено условие (4.10) и существует распределение* F_0 *на* $(-\infty, 1]$, $F_0 \in D(G)$, *такое, что для некоторой функции* $\varphi : [1, +\infty) \times (-\infty, 1] \to [1, +\infty)$

$$\frac{1 - F^{(\lambda)}(\varphi(\lambda, c_\lambda(x)))}{1 - F_0(c_\lambda(x))} \to 1, \quad \lambda \to \infty,$$

где $c_\lambda(x) = a_{[\lambda]}x + b_{[\lambda]}$, $x \in \mathbf{R}$, *то*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Psi^{(\lambda)}(\varphi(\lambda, c_\lambda(x))) = G(x).$$

Доказательство. Из [54, теорема 1.5.1] следует, что равенство (4.12) эквивалентно соотношению $\lambda(1 - F_0(c_\lambda(x))) \to -\ln G(x)$, $\lambda \to \infty$. По условию $\lambda(1 - F^{(\lambda)}(\varphi(\lambda, c_\lambda(x)))) \to -\ln G(x)$, откуда, воспользовавшись теоремой 4.2.1.1, получаем утверждение следствия. □

Пример 4.2.1.1. Пусть $F^{(N)}(k) = (k/N)^\sigma$, $T^{(N)} = \{1, 2, \ldots, N\}$, $\sigma > 0$, тогда для любого $k \in \mathbf{Z}_+$ получаем $\Psi^{(N)}(N - k) \to e^{-\sigma k}$, $N \to \infty$, так что распределение случайной величины $N - \tilde{Z}^{(N)}$ при $N \to \infty$ слабо сходится к геометрическому с параметром $e^{-\sigma}$.

Пример 4.2.1.2. Пусть $F^{(N)}(k) = 2^{k-N}$, $T^{(N)} = \{1, 2, \ldots, N\}$, тогда $\Psi^{(N)}(N - 1) \to 0$, $N \to \infty$, так что $N - \tilde{Z}^{(N)} \to 0$ по вероятности.

Пример 4.2.1.3. Пусть

$$F^{(\lambda)}(x) = 1 - \left(\frac{\lambda - x}{\lambda - 1}\right)^\gamma, \quad x \in T^{(\lambda)} = [1, \lambda], \quad \gamma > 0,$$

тогда для любого $x > 0$ получаем $\Psi^{(\lambda)}(\lambda - x\lambda^{1-1/\gamma}) \to e^{-x^\gamma}$, так что распределение случайной величины $(\lambda - \tilde{Z}^{(\lambda)})/\lambda^{1-1/\gamma}$ при $\lambda \to \infty$ слабо сходится к распределению Вейбулла с показателем γ.

Пример 4.2.1.4 Пусть

$$F^{(\lambda)}(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x - 1}{\lambda - x}\right\}, \quad x \in T^{(\lambda)} = [1, \lambda],$$

тогда

$$\Psi^{(\lambda)}\left(\lambda - \frac{\lambda - 1}{\ln \lambda} + \frac{\lambda - 1}{(\ln \lambda)^2}(x + 1)\right) \to \exp\{-e^{-x}\}, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

так что распределение случайной величины

$$(\ln \lambda)^2 \frac{\tilde{Z}^{(\lambda)} - \lambda}{\lambda - 1} + \ln \lambda - 1$$

при $\lambda \to \infty$ слабо сходится к распределению Гумбеля.

Для наглядности графики функций $F^{(\lambda)}$ с $\lambda = 2$ приведены на рис. 4.1: из примера 4.2.1.3 с $\gamma = 1/2$ штрих-пунктиром, с $\gamma = 2$ крупным пунктиром, из примера 4.2.1.4 сплошной линией.

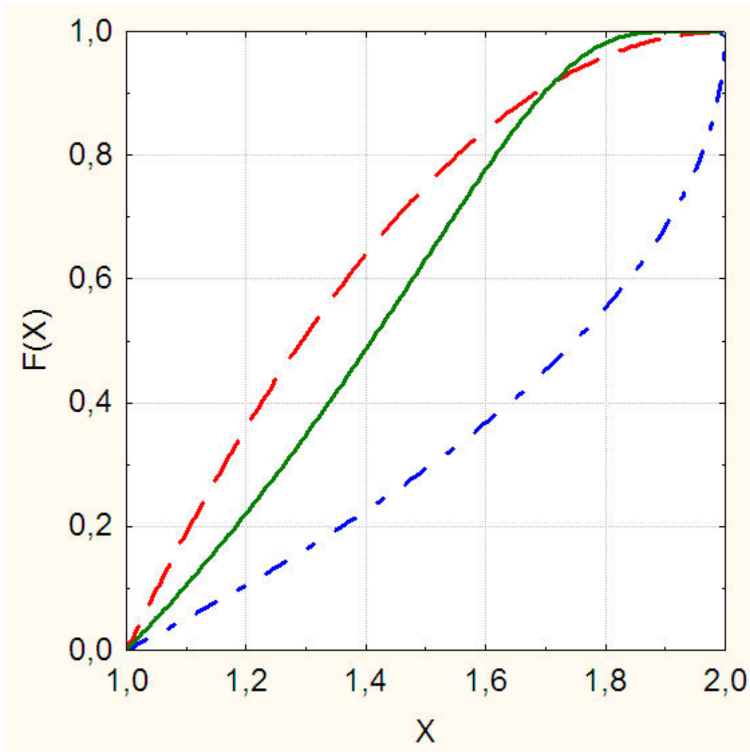

Рис. 4.1: функции $F^{(\lambda)}$

Было проведено компьютерное моделирование процесса $\{Z_n\}$ с распределением F, равномерным на отрезке $[1, 10]$. Из (4.4) получаем рекуррентную формулу

$$Z_{n+1} = 9U_{n+1}^{1/Z_n} + 1.$$

По теореме 4.2.1.1 (пример 4.2.1.3 с $\gamma = 1$) распределение случайной величины $10 - \tilde{Z}^{(10)}$ близко к стандартному показательному. На рис. 4.2 изображен график процесса $X_n = 10 - Z_n$, $1 \le n \le 100$, $Z_0 = 1$.

На рис. 4.3 представлены кумулятивная функция распределения (сплошная линия) с шагом $h = 0,1$ для 10000 наблюдений X_n, $n > 100$, и функция показательного распределения $y = 1 - e^{-x}$ (пунктир).

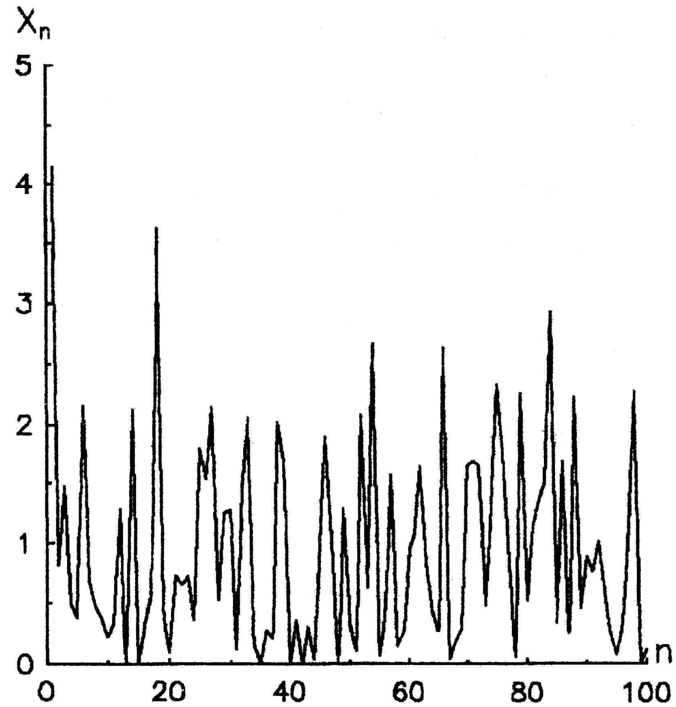

Рис. 4.2: результат моделирования процесса

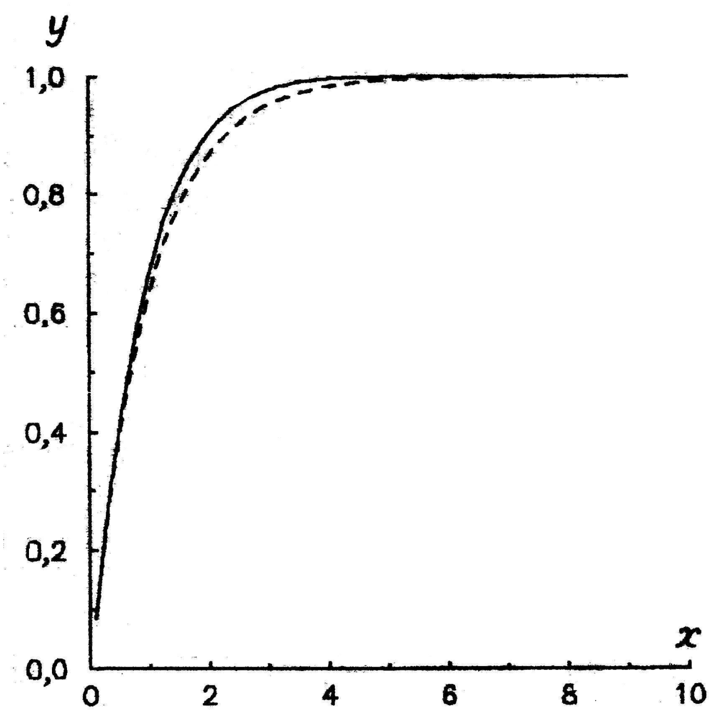

Рис. 4.3: сравнение функций распределения

4.2.2 Случай легких хвостов

Далее будем рассматривать МВП при более сильном, чем (4.2), условии конечности математического ожидания числа потомков

$$a = \int_0^\infty (1 - F(u))\, du < \infty, \tag{4.13}$$

откуда следует

$$\lim_{x\to\infty} x(1 - F(x)) = 0, \tag{4.14}$$

и предположим также, что

$$x_0 = \inf\{x : F(x) > 0\} \geq 1, \quad x_\omega = \sup\{x : F(x) < 1\} = +\infty.$$

Рассмотрим семейство МВП $\{Z_n^{(\lambda)}\}$ с $F^{(\lambda)}(x) = F(x)^\lambda$, $\lambda \geq 1$. Пусть F удовлетворяет (4.14), тогда в силу асимптотики $\bar{F}^{(\lambda)}(x) \sim \lambda \bar{F}(x)$, $x \to \infty$, для всех $F^{(\lambda)}$ также выполнено (4.14). Из теоремы 4.1.1 следует эргодичность и существование стационарного предельного распределения $\Psi^{(\lambda)}$ у данной цепи Маркова (при каждом $\lambda \geq 1$).

Случайные величины с распределениями $\Psi^{(\lambda)}$ будем обозначать через $\tilde{Z}^{(\lambda)}$. Из (4.1) получаем

$$\tilde{Z}^{(\lambda)} \stackrel{d}{=} \bigvee_{m=1}^{\tilde{Z}^{(\lambda)}} \xi_m^{(\lambda)}, \tag{4.15}$$

где $\xi_m^{(\lambda)}$, $m \geq 1$, независимы и имеют распределение $F^{(\lambda)}$.

Основной целью далее будет установление предельной теоремы для $\Psi^{(\lambda)}$ при $\lambda \to \infty$ в случае, когда распределение F принадлежит области притяжения двойного показательного закона $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$.

Определим функцию

$$\varphi(s) = \int_0^\infty (1 - F(x)^s)\, dx, \quad s > 0. \tag{4.16}$$

При натуральных значениях аргумента имеем

$$\varphi(k) = \mathbf{E} \bigvee_{m=1}^{k} \xi_m, \quad k \geq 1,$$

где ξ_m, $m \geq 1$, независимы и имеют распределение F. Положим $\varphi(0) = x_0$.

Далее леммы 4.2.2.1–4.2.2.3 определяют важные свойства функции $\varphi(s)$, лемма 4.2.2.4 ограничивает рост математического ожидания стационарного распределения, теорема 4.2.2.1 дает вырожденный предельный закон для $\tilde{Z}^{(\lambda)}$ (типа закона больших чисел), а следствие 4.2.2.1 — невырожденный предельный закон Гумбеля.

Лемма 4.2.2.1. *Если верно* (4.13), *то* $\varphi(s)$ *конечно при всех* $s \geq 0$.

Доказательство. Поскольку $1 - F(x)^s \sim s\bar{F}(x)$, $x \to \infty$, то из сходимости интеграла (4.13) следует сходимость интеграла (4.16) при всех $s \geq 0$. □

Лемма 4.2.2.2. *Если верно* (4.13) *и* F *не вырождено, то* $\varphi(s)$ *— непрерывная, строго возрастающая, строго вогнутая функция на* $\mathbf{R}_+$, *и* $\varphi(s) = o(s)$, $s \to \infty$.

Доказательство. Строгое возрастание и вогнутость $\varphi(s)$ следуют из строгого убывания и выпуклости $F(u)^s$ по s при $F(u) \in (0,1)$, поскольку мы полагаем распределение невырожденным. Непрерывность при $s \geq 0$ следует из соотношения

$$\varphi(s+\varepsilon)-\varphi(s) = \int_0^\infty F(u)^s(1-F(u)^\varepsilon)\,du \leq \int_{x_0}^\infty (1-F(u)^\varepsilon)\,du \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Отношение малости следует из неравенства $1 - p^s \leq s(1-p)$, $s \geq 1$, $0 \leq p \leq 1$, и оценки

$$\varphi(s) \leq A + x\int_A^\infty \bar{F}(u)\,dx, \quad s \geq 1, \tag{4.17}$$

где выбором A интеграл может быть сделан сколь угодно малым. □

Пусть F принадлежит области притяжения двойного показательного закона $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ при линейной нормировке, т.е. существуют числовые последовательности $a_k > 0$, b_k, $k \geq 1$, такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigvee_{m=1}^k \xi_m \leq a_k x + b_k\right) = \Lambda(x), \quad \forall x \in R. \tag{4.18}$$

Критерии выполнения (4.18) можно найти в [9, 54, 107, 118]. В частности, хвост F должен убывать быстрее любой степени. Заметим, что если рассматривать дискретные F (при целочисленных МВП), этот хвост также должен убывать медленнее любой экспоненты, т.к. в противном случае не выполняется необходимое условие существования невырожденного предельного распределения максимумов $\bar{F}(x)/\bar{F}(x-0) \to 1$, $x \to \infty$ [54, теорема 1.7.13].

Определим функцию $u(s) = \inf\{x : s\bar{F}(x) \leq 1\}$, $s > 0$. По [9, теорема 2.1.3] значения $u(k)$, $k \geq 1$, можно выбрать в качестве b_k, что и будем предполагать в дальнейшем. Заметим, что $u(s)$ монотонно неубывает и стремится к бесконечности при $s \to \infty$.

Лемма 4.2.2.3. *Если верно* (4.18), *то* $\varphi(s) \sim u(s)$, $s \to \infty$, *причем* φ *и* u *— медленно меняющиеся функции (на бесконечности).*

Доказательство. Для распределений, удовлетворяющих (4.18), согласно [9, теорема 4.1.1] (с точностью до используемых обозначений) имеем $a_k/b_k \to 0$ и $\max\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}/b_k \xrightarrow{P} 1$, $k \to \infty$. Как было отмечено еще в [116], для неограниченных справа распределений этот "закон больших чисел" эквивалентен

$$\bar{F}(cx)/\bar{F}(x) \to 0, \quad x \to \infty, \forall c > 1. \tag{4.19}$$

Как показано в [140] (см. также [118, §5.3.1]), из слабой сходимости нормированных максимумов н.о.р.с.в. следует сходимость их моментов (от положительных и отрицательных частей) к соответствующим моментам предельного распределения (в общем случае, к тем из них, которые существуют). По [140, теорема 3.2] получаем $\varphi(k) \sim b_k = u(k)$, $k \to \infty$.

Для распределений, удовлетворяющих (4.18), согласно [118, теорема 1.1.6, лемма 1.2.9, случай $\gamma = 0$], функция $u(s)$ является π-меняющейся [118, B.2] и медленно меняющейся (на бесконечности).

Из медленности изменения u следует $u(k+1)/u(k) \to 1$, $k \to \infty$, откуда в свою очередь $\varphi(k+1)/\varphi(k) \to 1$, $k \to \infty$. Следовательно, $\varphi(s) \sim u(s)$, $s \to \infty$, и φ также оказывается медленно меняющейся функцией. $\square$

Обозначим $\mu_\lambda = \mathbf{E}\tilde{Z}^{(\lambda)}$. Из $x_0 \geq 1$ следует, что $\xi_m \geq 1$, $\tilde{Z}^{(\lambda)} \geq 1$ п.н., и заведомо выполнено $a \geq 1$, $\varphi(s) \geq 1$, $s \geq 1$, и $\mu_\lambda \geq 1$, $\lambda \geq 1$.

Лемма 4.2.2.4. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *верно* $\mu_\lambda \leq \varphi(\lambda^{1+\varepsilon})$ *при всех достаточно больших* λ.

Доказательство. Из (4.15) следует $\mu_\lambda = \mathbf{E}\varphi(\lambda\tilde{Z}^{(\lambda)})$, откуда с помощью лемм 4.2.2.1 и 4.2.2.2 получаем оценку

$$\mu_\lambda \leq \varphi(\lambda\mu_\lambda), \tag{4.20}$$

Положим $0 < \delta < \varepsilon/(1+\varepsilon) < 1$. По лемме 4.2.2.3 имеем $\varphi(s) = o(s^\delta)$, $s \to \infty$. Следовательно, существует C такое, что $\varphi(s) \leq Cs^\delta$, $s \geq 1$. Из (4.20) получаем $\mu_\lambda \leq (C\lambda^\delta)^{1/(1-\delta)}$ при $\lambda \geq 1$, откуда $\mu_\lambda \leq \lambda^\varepsilon$ при всех достаточно больших λ. Повторно применяя (4.20), получаем утверждение леммы 4.2.2.4. $\square$

Введем дополнительное условие: пусть для любого $\theta > 1$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$su(s^{1+\varepsilon})\bar{F}(\theta u(s)) \to 0, \quad s \to \infty. \tag{4.21}$$

Заметим, что (4.21) имеет смысл ограничения "тяжести" хвоста F. Условиям (4.18) и (4.21) удовлетворяют распределения: Вейбулла, показательное, гамма, нормальное и др. Разницу можно увидеть на примере класса распределений с хвостами $\bar{F}(x) \sim \exp\{-(\ln x)^\alpha\}$, $x \to \infty$: тогда (4.18) выполняется при $\alpha > 1$, а (4.21) при $\alpha > 2$.

Теорема 4.2.2.1. *Если выполнены* (4.18) *и* (4.21), *то*

$$\tilde{Z}^{(\lambda)}/u(\lambda) \xrightarrow{P} 1, \quad \lambda \to \infty. \tag{4.22}$$

Доказательство. Пусть $\theta > 1$, $\varepsilon > 0$, тогда из (4.15), лемм 4.2.2.3 и 4.2.2.4 получаем (при всех достаточно больших λ):

$$\mathbf{P}(\tilde{Z}^{(\lambda)} > \theta u(\lambda)) \leq \mu_\lambda \bar{F}^{(\lambda)}(\theta u(\lambda)) \leq \\ \lambda\varphi(\lambda^{1+\varepsilon})\bar{F}(\theta u(\lambda)) \sim \lambda u(\lambda^{1+\varepsilon})\bar{F}(\theta u(\lambda)) \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

Пусть теперь $\theta < 1$, тогда $\mathbf{P}(\tilde{Z}^{(\lambda)} \leq \theta u(\lambda)) \leq F(\theta u(\lambda))^\lambda \to 0$, $\lambda \to \infty$ в силу (4.19). $\square$

Следствие 4.2.2.1. *Если выполнены* (4.18) *и* (4.21), *то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{P}(\tilde{Z}^{(\lambda)} \leq a_{k(\lambda)}x + b_{k(\lambda)}) = \Lambda(x), \quad \forall x \in R,$$

для любых $k(\lambda) \sim \lambda u(\lambda)$, $\lambda \to \infty$.

Утверждение следует из (4.15), (4.22) и [9, теорема 6.2.1] (см. с. 64).

Пример 4.2.2.1. Пусть $F(x) = 1 - \exp\{-\sqrt{x}\}$, $x \geq 1$, тогда $a_k = 2\ln k$, $b_k = (\ln k)^2$, $k \geq 1$, и следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tilde{Z}^{(\lambda)} - (\ln\lambda + 2\ln\ln\lambda)^2}{2(\ln\lambda + 2\ln\ln\lambda)} \leq x\right) \to \Lambda(x), \quad \lambda \to \infty.$$

4.2.3 Случай тяжелых хвостов

Рассмотрим случай, когда $F^{(\lambda)}(x) = F(x)^\lambda$, где распределение F сосредоточено на $(0, +\infty)$ и имеет степенной хвост, а следовательно, принадлежит области притяжения предельного закона Фреше для максимумов.

Введем сначала трехпараметрическое семейство распределений Фреше

$$\Phi_{\alpha,b,c}(x) = \begin{cases} \exp\{-c(x-b)^{-\alpha}\}, & x > b; \\ 0, & x \le b, \end{cases}$$

где $\alpha, c > 0$. Из определения следует

$$\Phi^r_{\alpha,b,c}(sx) \equiv \Phi_{\alpha,b/s,cr/s^\alpha}(x), \quad r, s > 0. \tag{4.23}$$

Напомним, что если $\{Z_n\}$ удовлетворяет (4.3), то процесс вида $Z_n^* = Z_n/a$, $a > 0$, также удовлетворяет (4.3) с $F^*(x) = F(ax)^a$, по свойству 4.1.1. Напомним обозначение $F_1 \prec F_2$, если $\bar{F}_1(x) \le \bar{F}_2(x)$ для всех x. Тогда для любых двух МВП из отношения $F_1 \prec F_2$ следует $\Psi_1 \prec \Psi_2$, по свойству 4.1.4.

Согласно теореме 4.1.1, любой МВП с $F = \Phi_{\alpha,b,c}$ при $\alpha > 1$, $b \ge 0$, $c > 0$ эргодический. Его стационарное распределение обозначим через $\Psi_{\alpha,b,c}$.

Далее теорема 4.2.3.1 обеспечивает для $\tilde{Z}^{(\lambda)}$ предельный закон $\Psi_{\alpha,0,c}$ при линейной нормировке.

Лемма 4.2.3.1. *Если распределение F сосредоточено на $T \subset (0, +\infty)$ и $\bar{F}(x) \sim cx^{-\alpha}$, $x \to \infty$, $\alpha > 0$, то для любого $t > 0$ можно выбрать точки $t_a \in a^{-1}T$, $t_a \to t$, $a \to \infty$.*

Доказательство. Пусть утверждение неверно. Это значит, что существуют такие числа $t^* > 0$, $\varepsilon^* \in (0, t^*)$ и числовая последовательность $a_n \to \infty$, $n \to \infty$, что в интервалах $(a_n(t^* - \varepsilon^*), a_n(t^* + \varepsilon^*))$ нет точек T. Отсюда, в частности, следует $\bar{F}(a_n(t^* - \varepsilon^*/2)) = \bar{F}(a_n(t^* + \varepsilon^*/2))$, однако из асимптотики хвоста при $n \to \infty$ получаем

$$\frac{\bar{F}(a_n(t^* - \varepsilon^*/2))}{\bar{F}(a_n(t^* + \varepsilon^*/2))} \to \left\{\frac{t^* - \varepsilon^*/2}{t^* + \varepsilon^*/2}\right\}^{-\alpha} > 1,$$

и, таким образом, приходим к противоречию. □

Теорема 4.2.3.1. *Пусть существуют такие числа $\alpha > 1$, $c, c_1 > 0$, что $F \succ \Phi_{\alpha,0,c_1}$ и $\bar{F}(x) \sim cx^{-\alpha}$, $x \to \infty$. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}\left(x\lambda^{1/(\alpha-1)}\right) = \Psi_{\alpha,0,c}(x). \tag{4.24}$$

Доказательство. Обозначим $\mu = \lambda^{1/(\alpha-1)}$, тогда $\lambda\mu = \mu^\alpha$. Перейдем к процессам $\hat{Z}_n^{(\lambda)} = Z_n^{(\lambda)}/\mu$, в этом случае $\hat{\Psi}^{(\lambda)}(x) = \Psi^{(\lambda)}(\mu x)$ и требуется доказать, что $\hat{\Psi}^{(\lambda)} \to \Psi_{\alpha,0,c}$, $\lambda \to \infty$. Имеем $\hat{T}^{(\lambda)} = \mu^{-1}T$. По лемме 4.2.3.1 для любого $x > 0$ можно выбрать числа $x_\lambda \in \hat{T}^{(\lambda)}$, $x_\lambda \to x$, $\lambda \to \infty$. Тогда

$$\hat{F}^{(\lambda)}(x_\lambda) = F(\mu x_\lambda)^{\mu^\alpha} \to \Phi_{\alpha,0,c}(x), \quad \lambda \to \infty. \tag{4.25}$$

Кроме того, из условия $F \succ \Phi_{\alpha,0,c_1}$ и равенства (4.23) получаем $\hat{F}^{(\lambda)} \succ \Phi_{\alpha,0,c_1}$. С другой стороны, если $\bar{F}(x) \sim cx^{-\alpha}$, $x \to \infty$, то найдутся такие числа $b > 0$, $c_2 > c$, что $F \prec \Phi_{\alpha,b,c_2}$, откуда $\hat{F}^{(\lambda)} \prec \Phi_{\alpha,b/\mu,c_2}$, что дает равномерную оценку $\hat{F}^{(\lambda)} \prec \Phi_{\alpha,1,c_2}$ при всех $\lambda > b^{\alpha-1}$. Соответственно при всех $\lambda > b^{\alpha-1}$ имеет место отношение $\Psi_{\alpha,0,c_1} \prec \hat{\Psi}^{(\lambda)} \prec \Psi_{\alpha,1,c_2}$.

Семейство стационарных распределений $\{\hat{\Psi}^{(\lambda)}\}$ ограничено с двух сторон собственными распределениями и, следовательно, плотно на $(0, +\infty)$. По [3, теорема 10.2] из плотности этого семейства, сходимости переходных функций (4.25) и непрерывности предельной переходной функции следует слабая сходимость стационарных распределений, которую и требовалось доказать. $\square$

Условию теоремы удовлетворяет, например, распределение Парето

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (x/x_0)^{-\alpha}, & x > x_0; \\ 0, & x \le x_0 \end{cases}$$

при $\alpha > 1$, $x_0 > 0$, поскольку $F(x) \le \exp\{-(x/x_0)^{-\alpha}\}$ при всех $x > 0$. Также можно подобрать необходимую оценку для любого распределения со степенным хвостом и положительной крайней левой точкой x_0.

Замечание 4.2.3.1. Если $F = \Phi_{\alpha,0,1}$, $\alpha > 1$, то предел (4.24) обращается в тождество: получаем формулу

$$\Psi_{\alpha,0,\lambda}(\mu x) \equiv \Psi_{\alpha,0,1}(x), \tag{4.26}$$

так как $\Phi^{\mu}_{\alpha,0,\lambda}(\mu x) \equiv \Phi_{\alpha,0,1}(x)$, согласно (4.23).

Заметим, что рекуррентная случайная последовательность

$$Z_{n+1} = Z_n^{1/\alpha} \xi_{n+1}, \tag{4.27}$$

где ξ_n, $n \ge 0$, независимы и имеют распределение $\Phi_{\alpha,0,1}$, удовлетворяет (4.3) с $F = \Phi_{\alpha,0,1}$. Отсюда следует, что случайная величина $\tilde{Z}$, заданная бесконечным произведением

$$\tilde{Z} = \prod_{n=0}^{\infty} \xi_n^{\alpha^{-n}} \tag{4.28}$$

(сходящимся при $\alpha > 1$ почти наверное), будет иметь распределение $\Psi_{\alpha,0,1}$. Соответственно случайная величина $\tilde{Y} = \ln \tilde{Z}$ представима рядом

$$\tilde{Y} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \alpha^{-n}, \tag{4.29}$$

где $\eta_n = (\ln \xi_{n-1})/\alpha$, $n \geq 1$, независимы и имеют функцию распределения Гумбеля $\Lambda(x) = \exp\{e^{-x}\}$. Из (4.28) и (4.29) получаем формулу моментов $\tilde{Z}$ и характеристическую функцию $\tilde{Y}$:

$$\mathbf{E}\tilde{Z}^s = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma(1 - s\alpha^{-n}), \quad 0 < s < \alpha; \quad \mathbf{E}e^{it\tilde{Y}} = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma(1 - it\alpha^{-n}).$$

Кроме того, из (4.26) следует $\Psi_{\alpha,0,c}(x) = \Psi_{\alpha,0,1}(xc^{-1/(\alpha-1)})$ при любом $c > 0$.

На рис. 4.4 представлен график математического ожидания

$$\mu_\Psi = \mathbf{E}\tilde{Z} = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma(1 - \alpha^{-n})$$

на отрезке $2 \leq \alpha \leq 4$.

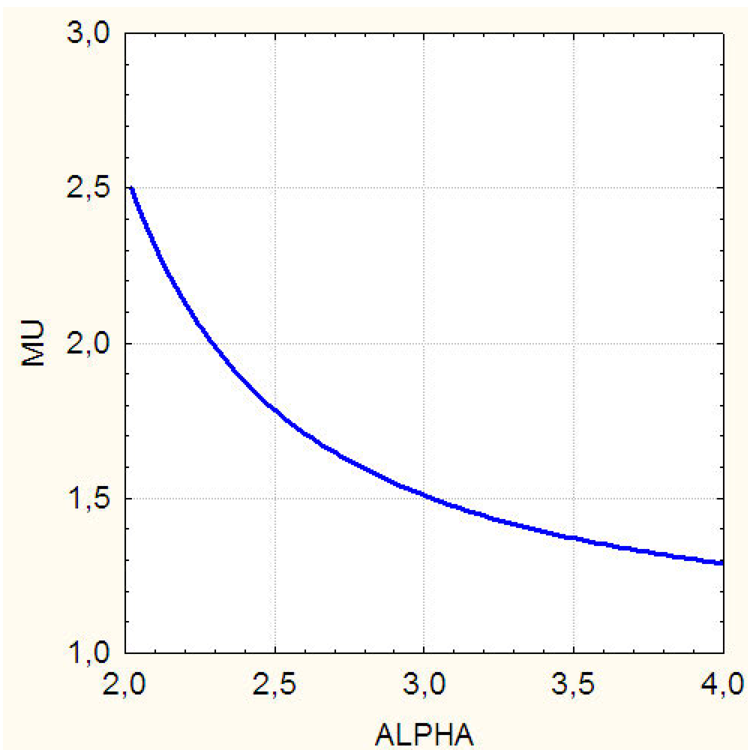

Рис. 4.4: математическое ожидание $\mu(\alpha)$

На рис. 4.5 представлены приближенные графики функций распределения $\Psi_{\alpha,0,1}$ при $\alpha = 2, 3, 4$ (кривые 1, 2, 3 соответственно), построенные по результатам моделирования последовательности (4.27) за $N = 10\,000$ шагов.

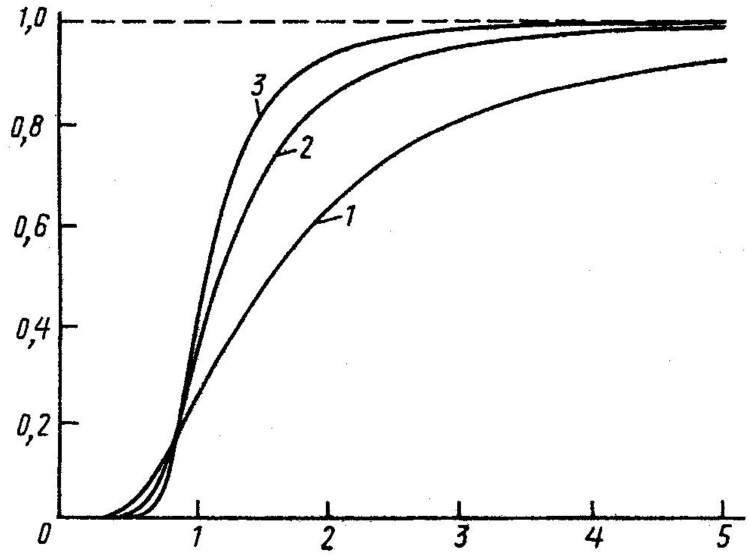

Рис. 4.5: функции распределения $\Psi_{\alpha,0,1}$

4.3 Приложения к вентильным бесконечнолинейным системам массового обслуживания

Напомним, что вентильными бесконечнолинейными системами массового обслуживания называют системы с бесконечным числом приборов, в которых доступ заявок к обслуживанию регулируется вентилем. Предполагается, что вентиль открыт только в том случае, когда все приборы свободны. Заявки поступают в очередь с бесконечным числом мест ожидания, а обслуживание происходит по стадиям. В начале стадии, когда вентиль открывается, все заявки из очереди мгновенно получают доступ к приборам и далее обслуживаются параллельно и независимо, до полного освобождения всех приборов. В момент освобождения всех приборов вентиль вновь открывается для новой партии заявок (пришедших за это время) и следующей стадии. Если очередь пуста, система ждет поступления заявки.

Как приложение такой модели можно назвать станцию передачи данных, где в качестве "обслуживающих приборов" выступают независимые каналы связи. Другим приложением оказывается симуляция, ориентированная на задачи, которые выполняются на работающих параллельно процессорах. При параллельной симуляции возникает необходимость в точках синхронизации для гарантии корректности вычислений. Вентильный механизм способен обеспечить эту синхронизацию на каждой стадии вычислений.

Заметим, что система очень проста в управлении: нет необходимости постоянного учета приходящих и уходящих заявок, свободных и занятых приборов и т.п. Распределение заявок по приборам (которые на тот момент все свободны) производится однократно и единовременно в начале каждой стадии. Другое преимущество вентильной системы может проявится в ситуации, когда заявки в очереди и обслуживающие приборы каким-то образом разделены между собой, а установление связи сопряжено с затратами. Например, может оказаться невыгодно (или невозможно) держать постоянно включенный канал передачи данных, а предпочтительней недолгие подключения время от времени.

Разумеется, любая бесконечнолинейная система является лишь приближением для случая, когда реальное число приборов велико. С другой стороны, имеет смысл изучение таких систем для оценки различных характеристик качества обслуживания (которые для любой системы с конечным числом приборов могут быть только хуже).

Вентильные бесконечнолинейные системы с непрерывным временем и пуассоновским входным потоком изучались в [101, 102, 122, 141] (другими методами). Основное внимание уделялось случаю ограниченных (в особенности, равномерно распределенных) времен обслуживания заявок. Случай неограниченных (в частности, показательных) времен обслуживания изучался меньше, и в основном численными методами, поскольку не был найден подходящий математический аппарат.

Как было отмечено в разделе 4.1, поведение вентильных бесконечнолинейных систем массового обслуживания на периоде занятости может быть описано максимальными ветвящимся процессами. В этом можно увидеть аналогию с описанием однолинейной системы на периоде занятости ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона [76, гл. 14, §4]. Для полного описания работы системы необходимо рассмотреть максимальные ветвящиеся процессы с иммиграцией в момент обнуления (специального вида), для которых далее доказаны предельные теоремы, аналогичные доказанным в разделе 4.2.

В разделах 4.3.1 и 4.3.2 разобраны случаи легких и тяжелых хвостов распределений времени обслуживания соответственно.

4.3.1 Случай легких хвостов

Обозначим через ν_n число заявок, обслуженных на n-й стадии, и через τ_n длительность n-й стадии, $n \geq 1$. Последовательности $\{\nu_n\}$ и $\{\tau_n\}$ определены стохастически рекуррентными формулами:

$$\nu_n = \Pi_n(\lambda\tau_{n-1}) \vee 1, \quad \tau_n = \bigvee_{l=1}^{\nu_n} \xi_{l,n}, \tag{4.30}$$

где через $\xi_{l,n}$ обозначено время обслуживания l-й заявки на n-ой стадии (эти времена образуют набор независимых случайных величин с распределением B), а $\Pi_n(.)$ можно рассматривать как независимые вероятностные копии пуассоновского процесса единичной интенсивности. Символом $\vee$ обозначена операция взятия максимума. В качестве начальных условий полагаем $\tau_0 = 0$, $\nu_0 = 0$.

Какая же тут связь с МВП? Последовательность $\{\tau_n\}$ может быть задана формулами:

$$\tau_n^* = \bigvee_{l=1}^{\Pi_n(\lambda\tau_{n-1})} \xi_{l,n}; \quad \tau_n = \begin{cases} \tau_n^*, & \tau_n^* > 0, \\ \xi_{1,n}, & \tau_n^* = 0. \end{cases}$$

А если бы мы положили просто $\tau_n = \tau_n^*$, то получили бы МВП, рассмотренный в разделе 4.1 (см. с. 141), с функцией распределения числа потомков $F(x) = \exp\{-\lambda\bar{B}(x)\}$. Теперь понятно, что $\{\tau_n\}$ можно назвать МВП с иммиграцией в момент обнуления. Но поскольку сейчас речь идет о прикладной модели, не будем заострять на этом внимания, а будем рассматривать обе последовательности $\{\nu_n\}$ и $\{\tau_n\}$ в их взаимодействии.

В силу (4.30) последовательности $\{\nu_n\}$ и $\{\tau_n\}$ представляют собой однородные цепи Маркова. Далее мы покажем (в предположении конечности среднего времени обслуживания β) существование для них стационарных предельных распределений. Случайные величины с этими распределениями при каждом λ обозначим $\tilde{\nu}^{(\lambda)}$ и $\tilde{\tau}^{(\lambda)}$.

Из (4.30) следует, что они связаны следующими соотношениями:

$$\tilde{\nu}^{(\lambda)} \stackrel{d}{=} \Pi(\lambda\tilde{\tau}^{(\lambda)}) \vee 1, \quad \tilde{\tau}^{(\lambda)} \stackrel{d}{=} \bigvee_{l=1}^{\tilde{\nu}^{(\lambda)}} \xi_l, \tag{4.31}$$

где ξ_l, $l \geq 1$, независимы и имеют распределение B, через $\stackrel{d}{=}$ обозначено равенство по распределению, а через $\Pi(t)$ пуассоновский процесс единичной интенсивности.

Далее будем предполагать, что $x_\omega = \sup\{x : B(x) < 1\} = +\infty$ и B принадлежит области притяжения двойного показательного закона $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ при линейной нормировке, т.е. существуют числовые последовательности $a_k > 0$, b_k, $k \geq 1$, такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigvee_{l=1}^{k} \xi_l \leq a_k x + b_k\right) = \Lambda(x). \tag{4.32}$$

Критерии выполнения (4.32) можно найти в [9, 54, 107, 118]. В частности, хвост B должен убывать быстрее любой степени. Из (4.32) заведомо следует $\beta < \infty$.

Рассмотрим две вспомогательные функции, связанные с B.

Пусть

$$\varphi(s) = \int_0^\infty (1 - B(x)^s)\, dx, \quad s > 0,$$

тогда при натуральных значениях аргумента имеем

$$\varphi(k) = \mathbf{E} \bigvee_{l=1}^{k} \xi_k.$$

Напомним, что по лемме 4.2.2.1 из $\beta < \infty$ следует, что $\varphi(s)$ определена при всех $s > 0$, а по лемме 4.2.2.2 $\varphi(s)$ возрастающая, вогнутая и $\varphi(s) = o(s)$, $s \to \infty$.

Пусть $u(s) = \inf\{x : s\bar{B}(x) \leq 1\}$, $s > 0$. По [9, теорема 2.1.3] значения $u(k)$, $k \geq 1$, можно выбрать в качестве b_k, что и будем предполагать в дальнейшем. Заметим, что $u(s)$ монотонно неубывает и стремится к бесконечности при $s \to \infty$.

Наша задача заключается в доказательстве эргодичности $\{\nu_n\}$ и $\{\tau_n\}$ при сделанных предположениях и выводе предельных законов для $\tilde{\nu}^{(\lambda)}$ и $\tilde{\tau}^{(\lambda)}$ при большой загрузке $\lambda \to \infty$.

Теорема 4.3.1.1 обеспечивает эргодичность системы массового обслуживания. Теорема 4.3.1.2 дает вырожденные предельные законы для $\tilde{\nu}^{(\lambda)}$ и $\tilde{\tau}^{(\lambda)}$, следствия 4.3.1.1 и 4.3.3.3 невырожденные предельные законы Гумбеля, а следствие 4.3.1.2 асимптотики моментов стационарных распределений.

Теорема 4.3.1.1. *Цепь Маркова $\{\nu_n\}$ эргодична при любых $\lambda, \beta < \infty$.*

Доказательство. Из леммы 4.2.2.2 следует, что существует $k_0 \geq 1$ такое, что $\varphi(k) \leq (k-2)/\lambda$ при $k \geq k_0$. Заметим, что

$$\mathbf{E}(\nu_{n+1} | \nu_n = k) \leq \lambda\varphi(k) + 1, \quad k \geq 1,$$

так что $\mathbf{E}(\nu_{n+1}|\nu_n = k) \leq k-1$ при $k \geq k_0$ и $\mathbf{E}(\nu_{n+1}|\nu_n = k) \leq \lambda\varphi(k_0)+1 < \infty$ при $k < k_0$. По эргодической теореме [12, §3.1, с. 154] с учетом неприводимости и апериодичности цепи Маркова отсюда следует эргодичность $\{\nu_n\}$. □

Замечание 4.3.1.1. Поскольку распределение τ_n однозначно определяется распределением ν_n (при фиксированных λ, B) и в свою очередь определяет распределение ν_{n+1} и т.д., то из эргодичности $\{\nu_n\}$ также следует существование и единственность стационарного предельного распределения для $\{\tau_n\}$ при $n \to \infty$, причем предельные распределения этих цепей Маркова согласованы между собой посредством (4.31).

Напомним, что по лемме 4.2.2.3, если верно (4.32), то $\varphi(s) \sim u(s)$, $s \to \infty$, причем φ и u — функции, медленно меняющиеся на бесконечности.

Обозначим $\mu^{(\lambda)} = \mathbf{E}\tilde{\nu}^{(\lambda)}$, $T^{(\lambda)} = \mathbf{E}\tilde{\tau}^{(\lambda)}$.

Лемма 4.3.1.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ верно $\mu^{(\lambda)} \leq \lambda\varphi(\lambda^{1+\varepsilon}) + 1$ при всех достаточно больших λ.*

Доказательство. Из (4.31) и леммы 4.2.2.2 следует

$$1 \leq \mu^{(\lambda)} \leq \lambda\varphi(\mu^{(\lambda)}) + 1, \quad \forall\lambda > 0. \tag{4.33}$$

Положим $0 < \delta < \varepsilon/(1+\varepsilon) < 1$. По лемме 4.2.2.3 имеем $\varphi(s) = o(s^\delta)$, $s \to \infty$. Следовательно, существует C такое, что $\varphi(s) + 1 \leq Cs^\delta$, $s \geq 1$. Из (4.33) получаем $\mu \leq (C\lambda)^{1/(1-\delta)}$ при $\lambda \geq 1$, откуда $\mu \leq \lambda^{1+\varepsilon}$ при всех достаточно больших λ. Повторно применяя (4.33), получаем утверждение леммы. □

Введем дополнительное условие: пусть для любого $\theta > 1$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$su(s^{1+\varepsilon})\bar{B}(\theta u(s)) \to 0, \quad s \to \infty. \tag{4.34}$$

Такое же условие (4.21) на F ранее обсуждалось в разделе 4.2.2.

Теорема 4.3.1.2. *Если выполнены* (4.32) *и* (4.34), *то*

$$\frac{\tilde{\nu}^{(\lambda)}}{\lambda u(\lambda)} \xrightarrow{P} 1, \quad \frac{\tilde{\tau}^{(\lambda)}}{u(\lambda)} \xrightarrow{P} 1, \quad \lambda \to \infty. \tag{4.35}$$

Доказательство. Пусть $\theta > 1$, тогда из (4.31) и леммы 4.3.1.1 получаем (при всех достаточно больших λ):

$$\mathbf{P}(\tilde{\tau}^{(\lambda)} > \theta u(\lambda)) \leq \mu^{(\lambda)}\mathbf{P}(\xi_1 > \theta u(\lambda)) \leq (\lambda\varphi(\lambda^{1+\varepsilon}) + 1)\bar{B}(\theta u(\lambda)),$$

а из леммы 4.2.2.3 и (4.34) имеем

$$(\lambda\varphi(\lambda^{1+\varepsilon}) + 1)\bar{B}(\theta u(\lambda)) \sim \lambda u(\lambda^{1+\varepsilon})\bar{B}(\theta u(\lambda)) \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

Следовательно, $\mathbf{P}(\tilde{\tau}^{(\lambda)} > \theta u(\lambda)) \to 0$, $\lambda \to \infty$.

Пусть теперь $\theta < 1$. Из (4.31) следует, что $\tilde{\nu}^{(\lambda)}$ можно стохастически оценить снизу случайной величиной $\Pi(\lambda\xi_1)$. Имеем

$$\mathbf{P}(\tilde{\tau}^{(\lambda)} \le \theta u(\lambda)) \le \mathbf{E} B(\theta u(\lambda))^{\tilde{\nu}^{(\lambda)}} \le f_B(\lambda \bar{B}(\theta u(\lambda)),$$

где f_B — преобразование Лапласа-Стилтьеса распределения B. Из (4.19) следует $\lambda \bar{B}(\theta u(\lambda)) \to \infty$, так что и $\mathbf{P}(\tilde{\tau}^{(\lambda)} \le \theta u(\lambda)) \to 0$, $\lambda \to \infty$.

Из $\tilde{\tau}^{(\lambda)}/u(\lambda) \xrightarrow{P} 1$ и (4.31) следует $\tilde{\nu}^{(\lambda)}/(\lambda u(\lambda)) \xrightarrow{P} 1$, $\lambda \to \infty$, по закону больших чисел. □

Следствие 4.3.1.1. *Если выполнены* (4.32) *и* (4.34), *то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{P}(\tilde{\tau}^{(\lambda)} \le a_{k(\lambda)} x + b_{k(\lambda)}) = \Lambda(x), \tag{4.36}$$

для любого $k(\lambda) \sim \lambda u(\lambda)$, $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Утверждение следует из (4.31), (4.35) и [9, теорема 6.2.1] (см. с. 64). □

Замечание 4.3.1.2. Следствие 4.3.1.1 не определяет нормирующие константы единственным, а тем более оптимальным образом. При неудачном выборе констант сходимость к предельному закону может быть весьма медленной [9, 54]. Однако (4.36) показывает качественную картину асимптотического поведения. В приложениях нормирующие константы можно оценить эмпирически (например, методом моментов или линейной регрессией). Естественно также полагать $k(\lambda) \approx \mu^{(\lambda)}$.

Обозначим $\mu_r^{(\lambda)} = \mathbf{E}(\tilde{\nu}^{(\lambda)})^r$, $T_r^{(\lambda)} = \mathbf{E}(\tilde{\tau}^{(\lambda)})^r$, $r \ge 1$. Определим функции

$$\varphi_r(s) = \int_0^\infty r x^{r-1}(1 - B(x)^s)\, dx, \quad s \ge 1,$$

тогда $\varphi_r(k) = \mathbf{E}(\xi_1 \vee \dots \vee \xi_k)^r$. Фактически, это функции φ для случайных величин ξ^r, $r \ge 1$. Поэтому, при наличии конечных моментов $\mathbf{E}\xi^r$, которое заведомо следует из (4.32), функции φ_r, $r \ge 1$, обладают теми же свойствами (леммы 4.2.2.1–4.2.2.3), что и $\varphi = \varphi_1$, с той разницей, что $\varphi_r(s) \sim u(s)^r$, $s \to \infty$.

Следствие 4.3.1.2. *Если выполнены* (4.32) *и* (4.34), *то*

$$\mu_r^{(\lambda)} \sim (\lambda u(\lambda))^r, \quad T_r^{(\lambda)} \sim u(\lambda)^r, \quad \lambda \to \infty, \quad \forall r \ge 1. \tag{4.37}$$

Доказательство. Из леммы 4.2.2.3 и (4.34) получаем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{u(su(s^{1+\varepsilon}))}{u(s)} < \infty. \tag{4.38}$$

Проверим равномерную ограниченность величин $T_r^{(\lambda)}/u(\lambda)^r$. С помощью оценки $T_r^{(\lambda)} = \mathbf{E}\varphi_r(\tilde{\nu}^{(\lambda)}) \le \varphi_r(\mu^{(\lambda)})$, с учетом свойств φ_r, леммы 4.3.1.1 и (4.38) получаем

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{T_k^{(\lambda)}}{u(\lambda)^r} \le \limsup_{\lambda\to\infty} \frac{\varphi_r(\mu^{(\lambda)})}{u(\lambda)^r} \le \limsup_{\lambda\to\infty} \left(\frac{u(\lambda u(\lambda^{1+\varepsilon})+1)}{u(\lambda)}\right)^r < \infty,$$

что вместе с (4.35) дает $T_r^{(\lambda)} \sim u(\lambda)^r$, $\lambda \to \infty$.

Полагая r целым, имеем $\mathbf{E}\Pi(\theta)^r = \sum_{m=1}^r c_{r,m}\theta^m$, где $c_{r,m}$ — некоторые положительные коэффициенты, причем $c_{r,r} = 1$. Поэтому $\mu_r^{(\lambda)} \sim \sum_{m=1}^r c_{r,m}\lambda^m T_m^{(\lambda)} \sim (\lambda u(\lambda))^r$, $\lambda \to \infty$. Из сходимости моментов целых порядков следует сходимость для всех промежуточных. $\square$

Здесь замечание 4.3.1.2 также справедливо в том смысле, что сходимость моментов тоже может быть весьма медленной. Однако, во всяком случае, всегда можно получить верхние оценки первых моментов из неравенств (4.33) и $T^{(\lambda)} \le \mu^{(\lambda)}/\lambda$. Если вычисление функции $\varphi(s)$ затруднительно, ее можно оценить сверху с помощью (4.17).

Лемма 4.3.1.2. *Пусть заданы положительные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $t > 0$, семейство неотрицательных случайных величин $\eta(t)$, $t > 0$, и случайная величина Υ, такие, что*

$$\check{\eta}(t) = \frac{\eta(t)-\beta(t)}{\alpha(t)} \xrightarrow{d} \Upsilon, \quad \frac{\mathbf{E}\eta(t)}{\gamma(t)\alpha(t)^2} \to 0, \quad t\to\infty,$$

и $\zeta(t) = \Pi(\gamma(t)\eta(t))/\gamma(t)$, тогда

$$\check{\zeta}(t) = \frac{\zeta(t)-\beta(t)}{\alpha(t)} \xrightarrow{d} \Upsilon, \quad t\to\infty.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{E}(\check{\zeta}(t)-\check{\eta}(t)) = 0, \quad \mathbf{E}(\check{\zeta}(t)-\check{\eta}(t))^2 = \frac{\mathbf{E}\eta(t)}{\gamma(t)\alpha(t)^2} \to 0, \quad t\to\infty,$$

откуда $\check{\zeta}(t)-\check{\eta}(t) \xrightarrow{P} 0$, что в сочетании с $\check{\eta}(t) \xrightarrow{d} \Upsilon$, $t\to\infty$, дает утверждение леммы. $\square$

Следствие 4.3.1.3. *Если выполнены* (4.32), (4.34), *и* $T^{(\lambda)}/(\lambda a_{k(\lambda)}^2) \to 0$, $\lambda\to\infty$, *то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{P}(\tilde{\nu}^{(\lambda)}/\lambda \le a_{k(\lambda)}x + b_{k(\lambda)}) = \Lambda(x). \tag{4.39}$$

Доказательство. Применим лемму 4.3.1.2, полагая

$$\alpha(\lambda) = a_{k(\lambda)}, \quad \beta(\lambda) = b_{k(\lambda)}, \quad \gamma(\lambda) = \lambda, \quad \eta(\lambda) \stackrel{d}{=} \tilde{\tau}^{(\lambda)}$$

и Υ с распределением Λ. С учетом (4.36) получаем, что для $\zeta(\lambda) = \Pi(\lambda\eta(\lambda))/\lambda$ выполняется

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{P}(\zeta(\lambda) \le a_{k(\lambda)}x + b_{k(\lambda)}) = \Lambda(x).$$

Заметим теперь, что $\mathbf{P}(\tilde{\nu}^{(\lambda)}/\lambda \le y) = \mathbf{P}(\zeta(\lambda) \le y)$ при $y \ge 1/\lambda$. Поскольку $y = a_{k(\lambda)}x + b_{k(\lambda)} \to \infty$, $\lambda \to \infty$, отсюда следует (4.39). □

Пример 4.3.1.1: показательное распределение. Пусть $B(x) = 1 - e^{-x}$, $x \ge 0$, тогда $a_k = 1$, $b_k = \ln k$, $u(s) = \ln s$. При $\lambda \to \infty$ получаем

$$\frac{\tilde{\nu}^{(\lambda)}}{\lambda \ln \lambda} \xrightarrow{P} 1, \quad \frac{\tilde{\tau}^{(\lambda)}}{\ln \lambda} \xrightarrow{P} 1,$$
$$\mu_r^{(\lambda)} \sim (\lambda \ln \lambda)^r, \quad T_r^{(\lambda)} \sim (\ln \lambda)^r, \quad \forall r \ge 1,$$
$$\mathbf{P}(\tilde{\tau}^{(\lambda)} - \ln k(\lambda) \le x) \to \Lambda(x),$$
$$\mathbf{P}(\tilde{\nu}^{(\lambda)}/\lambda - \ln k(\lambda) \le x) \to \Lambda(x), \quad k(\lambda) \sim \lambda \ln \lambda.$$

Заметим, что $\varphi(s) = \psi(s+1) + \gamma = \ln s + \gamma + o(1)$, $s \to \infty$, где ψ — пси-функция и $\gamma = 0,577...$ — постоянная Эйлера (которой равно математическое ожидание распределения Λ). Кроме того, естественно определить $k(\lambda) \approx \mu^{(\lambda)}$. Возьмем в качестве теоретических оценок (при больших λ) для $T^{(\lambda)}$ и $\mu^{(\lambda)}$ решения системы уравнений $T^* = \ln \mu^* + \gamma$ и $\mu^* = \lambda T^*$ (что согласуется с (4.31) и (4.36)). За нормирующие константы примем $a^* = 1$ и $b^* = \ln \mu^* = T^* - \gamma$.

Так, при $\lambda = 100$ получаем $\mu^* \approx 715$, $T^* \approx 7,15$, $a^* = 1$, $b^* \approx 6,57$.

Было проведено компьютерное моделирование процесса с $\lambda = 100$ на $N = 1000$ стадиях, с периодом регистрации результатов в 10 шагов (для уменьшения влияния зависимости). Получены выборочные средние: $\hat{\mu} \approx 718$, $\hat{T} \approx 7,25$. Наблюдаемые длительности стадий τ_n нанесены на двойную показательную бумагу[1] (рис. 4.6), где демонстрируют неплохое соответствие предельному закону.

С помощью линейной регрессии получены эмпирические оценки нормирующих констант: $\hat{a} \approx 0,97$; $\hat{b} \approx 6,68$ (не слишком отличающиеся от теоретических). Заметим также, что более простая оценка b (методом моментов) вида $\hat{T} - \gamma$, дает близкий результат. Наблюдаемые величины ν_n/λ хуже соответствуют предельному закону, но близки к желаемому в области значений $\hat{b} \pm 1$.

[1]Имеется в виду, что по произвольной выборке $X_1, \ldots, X_m$ строятся точки вида $(X_{(k)}, Y_k)$, где $X_{(k)}$ — k-й член вариационного ряда и $Y_k = -\ln(-\ln((k-1/2)/m))$, $1 \le k \le m$.

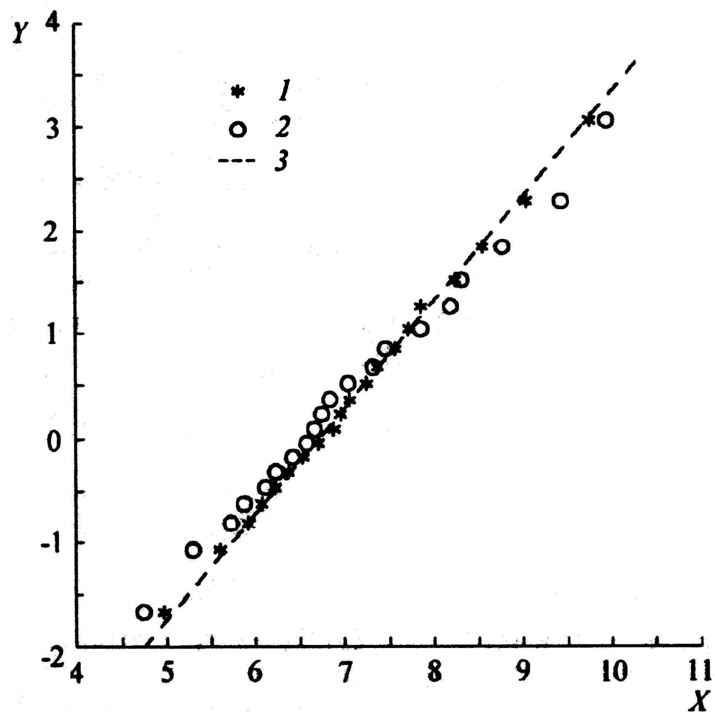

Рис. 4.6: наблюдаемые длительности стадий (1) и нормированные числа обслуженных заявок (2) на двойной показательной бумаге (представлена каждая пятая точка); прямая линейной регрессии (3) для длительности стадий

4.3.2 Случай тяжелых хвостов

Далее будем предполагать, что B имеет степенной хвост

$$\bar{B}(x) \sim (x/\theta)^{-\alpha}, \quad x \to \infty, \tag{4.40}$$

где $\alpha > 1$, $\theta > 0$, и также выполнено вспомогательное условие типа двустороннего ограничения. А именно, введем обозначение для функции распределения Парето:

$$P_\alpha(x, \theta) = \begin{cases} 1 - (x/\theta)^{-\alpha}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta. \end{cases}$$

Тогда предполагаем дополнительно существование таких чисел $\theta_1 \geq \theta \geq \theta_2 > 0$, что

$$P_\alpha(x, \theta_1) \leq B(x) \leq P_\alpha(x, \theta_2). \tag{4.41}$$

Введем также обозначение для функции распределения Фреше:

$$\Phi_\alpha(x, \theta) = \begin{cases} \exp\{-(x/\theta)^{-\alpha}\}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Лемма 4.3.2.1. *Если случайные величины η_l, $l \geq 1$ независимы и имеют функцию распределения $P_\alpha(x,\theta)$, то для любого $\lambda > 0$ имеет место оценка*

$$\Phi_\alpha(x\lambda^{-1/\alpha},\theta)P_\alpha(x,\theta) \leq \mathbf{P}\left(\bigvee_{l=1}^{\Pi(\lambda)\vee 1} \eta_l \leq x\right) \leq \Phi_\alpha(x\lambda^{-1/\alpha},\theta), \quad x > 0. \tag{4.42}$$

Доказательство. Заметим, что если η_l, $l \geq 1$, независимы и имеют общее распределение F, то

$$\mathbf{P}\left(\bigvee_{l=1}^{\Pi(\lambda)\vee 1} \eta_l \leq x\right) = \exp\left\{-\lambda\bar{F}(x)\right\} - e^{-\lambda}\bar{F}(x), \tag{4.43}$$

откуда

$$\exp\left\{-\lambda\bar{F}(x)\right\} F(x) \leq \mathbf{P}\left(\bigvee_{l=1}^{\Pi(\lambda)\vee 1} \eta_l \leq x\right) \leq \exp\left\{-\lambda\bar{F}(x)\right\}.$$

Подставляя $F(x) = P_\alpha(x,\theta)$ и учитывая отдельно случай $0 < x \leq \theta$ (когда левая и средняя части неравенства (4.42) равны нулю, а правая часть положительна), получаем утверждение леммы 4.3.2.1. □

Напомним, что по лемме 4.2.3.1, если распределение F сосредоточено на множестве $T_F \subset (0,+\infty)$ и $\bar{F}(x) \sim cx^{-\alpha}$, $x \to \infty$, $c,\alpha > 0$, то для любого $x > 0$ можно выбрать точки $x_a \in a^{-1}T_F$, $x_a \to x$, $a \to \infty$.

Теорема 4.3.2.1. *Если выполнены* (4.40) *и* (4.41)*, то*

$$\frac{\tilde{\tau}^{(\lambda)}}{\lambda^{1/(\alpha-1)}} \xrightarrow{d} \Upsilon, \quad \lambda \to \infty, \tag{4.44}$$

$$\Upsilon = \prod_{n=0}^{\infty} \delta_n^{1/\alpha^n}, \tag{4.45}$$

где δ_n, $n \geq 1$, независимы и имеют функцию распределения $\Phi_\alpha(x,\theta)$.

Доказательство. Введем последовательность $\zeta_n = \tau_n/c_\lambda$, где $c_\lambda = \lambda^{1/(\alpha-1)}$. Очевидно, $c_\lambda \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Далее будем учитывать тот факт, что $\lambda c_\lambda = c_\lambda^\alpha$.

В силу (4.30) имеем

$$\zeta_n = \frac{1}{c_\lambda}\bigvee_{l=1}^{\nu_n} \xi_{l,n}, \quad \nu_n = \Pi_n(\lambda c_\lambda \zeta_{n-1}) \vee 1,$$

откуда из (4.40) и (4.43) получаем

$$\mathbf{P}(\zeta_n \le x | \zeta_{n-1} = y) = \exp\{-\lambda c_\lambda y \bar{B}(c_\lambda x)\} - e^{-\lambda c_\lambda y} \bar{B}(c_\lambda x) \tag{4.46}$$

при любых $x > 0$, $y \in c_\lambda^{-1} T_B$. Для любого $y > 0$ по лемме 4.2.3.1 можно выбрать точки $y_\lambda \in c_\lambda^{-1} T_B$, $y_\lambda \to y$, $\lambda \to \infty$. Тогда из (4.46) следует

$$\mathbf{P}(\zeta_n \le x | \zeta_{n-1} = y_\lambda) \to \Phi_\alpha(x y^{-1/\alpha}, \theta), \quad \lambda \to \infty. \tag{4.47}$$

Таким образом, переходные вероятности процесса ζ_n при $\lambda \to \infty$ сходятся к переходным вероятностям некоторого процесса Z_n, который может быть задан рекуррентной формулой

$$Z_n = Z_{n-1}^{1/\alpha} \delta_n, \tag{4.48}$$

а его стационарное предельное распределение совпадает с распределением случайной величины Υ, определенной равенством (4.45), или $\Psi_{\alpha,0,\theta^\alpha}$ в терминологии раздела 4.2.3.

Согласно [3, теорема 10.2] сходимости переходных вероятностей (4.47) недостаточно для сходимости соответствующих стационарных распределений. Следует еще доказать плотность их семейства на $(0, +\infty)$. В силу условия (4.41) и леммы 4.3.2.1 при $\lambda \ge 1$ получаем

$$\Phi_\alpha(x y^{-1/\alpha}, \theta_1) P_\alpha(x, \theta_1) \le \mathbf{P}(\zeta_n \le x | \zeta_{n-1} = y) \le \Phi_\alpha(x y^{-1/\alpha}, \theta_2).$$

Взяв левую и правую части неравенства за переходные функции некоторых процессов Z'_n и Z''_n, заключаем, что можно построить их на одном вероятностном пространстве (при одинаковом начальном условии $y \in c_\lambda^{-1} T_B$, $y > 0$) так, чтобы почти наверное выполнялось неравенство

$$Z'_n \ge \zeta_n \ge Z''_n, \tag{4.49}$$

где оценивающие процессы заданы рекуррентными формулами:

$$Z'_n = \max\{(Z'_{n-1})^{1/\alpha} \delta'_n, \eta'_n\}, \quad Z''_n = (Z''_{n-1})^{1/\alpha} \delta''_n$$

(одним и двумя штрихами отмечены величины с параметрами θ_1 и θ_2 соответственно). Оба процесса оказываются эргодическими, имеют некоторые стационарные предельные распределения, и все распределения величин $\tilde{\zeta}^{(\lambda)} = \tilde{\tau}^{(\lambda)} / c_\lambda$, $\lambda \ge 1$, заключены между ними. Таким образом, семейство плотно. Теорема 4.3.2.1 доказана. □

Заметим, что произведение (4.45) сходится почти наверное. К сожалению, его функция распределения не выражается в явном виде, хотя и может быть найдена приближенно путем моделирования.

Следствие 4.3.2.1. *Если выполнены* (4.40) *и* (4.41), *то*

$$\frac{\tilde{\nu}^{(\lambda)}}{\lambda^{\alpha/(\alpha-1)}} \xrightarrow{d} \Upsilon, \quad \lambda \to \infty. \tag{4.50}$$

Следствие 4.3.2.1 получаем из (4.30) и (4.44).

Ситуация качественно отличается от рассмотренной в разделе 4.3.1, где для соответствующих характеристик имели место также вырожденные предельные законы (типа закона больших чисел). Кроме того, необходимая линейная нормировка имеет простой явный вид.

Следствие 4.3.2.2. *Если выполнены* (4.40) *и* (4.41), *то для любого числа* $s \in (0, \alpha)$ *верно*

$$\mathbf{E}(\tilde{\tau}^{(\lambda)})^s \sim \mu(s)\lambda^{s/(\alpha-1)}, \quad \mathbf{E}(\tilde{\nu}^{(\lambda)})^s \sim \mu(s)\lambda^{s\alpha/(\alpha-1)}, \quad \lambda \to \infty, \tag{4.51}$$

$$\mu(s) = \mathbf{E}\Upsilon^s = \theta^{s/(1-\alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma(1 - s/\alpha^n).$$

Следствие 4.3.2.2 получаем из (4.30), (4.44) и (4.50) в силу ограниченной сходимости $\tilde{\zeta}^{(\lambda)} \xrightarrow{d} \Upsilon$, $\lambda \to \infty$, поскольку все моменты порядка $s \in (0, \alpha)$ стационарного распределения мажорирующего процесса Z'_n конечны. Выражение для $\mu(s)$ следует из (4.45), поскольку $\mathbf{E}\delta_n^s = \theta^s\Gamma(1 - s/\alpha)$.

Моментов порядка $s \geq \alpha$ предельное распределение не имеет.

Пример 4.3.2.1: распределение Парето. Пусть $B(x) = P_3(x, 1)$, тогда

$$\frac{\tilde{\tau}^{(\lambda)}}{\lambda^{1/2}} \xrightarrow{d} \Upsilon, \quad \frac{\tilde{\nu}^{(\lambda)}}{\lambda^{3/2}} \xrightarrow{d} \Upsilon, \quad \lambda \to \infty.$$

Было проведено компьютерное моделирование процесса с $\lambda = 100$ на $N = 1000$ стадиях с периодом регистрации результатов в 10 шагов (для уменьшения влияния зависимости) и предварительной “прокруткой” в 100 шагов (для выхода на стационарный режим). Параллельно и независимо моделировался также случайный процесс Z_n, заданный рекуррентной формулой (4.48), для которого $Z_n \xrightarrow{d} \Upsilon$, $n \to \infty$.

После удаления выбросов результаты представлены на рис. 4.7 и 4.8 в форме графиков типа “квантиль–квантиль”.

Видно, что основная масса точек сосредоточена вблизи прямых, а расхождения наблюдаются в области больших значений. Уклонение происходит в бóльшую сторону согласно оценке (4.49). Следует отметить, что наличие выбросов вообще характерно для случая тяжелых хвостов распределений.

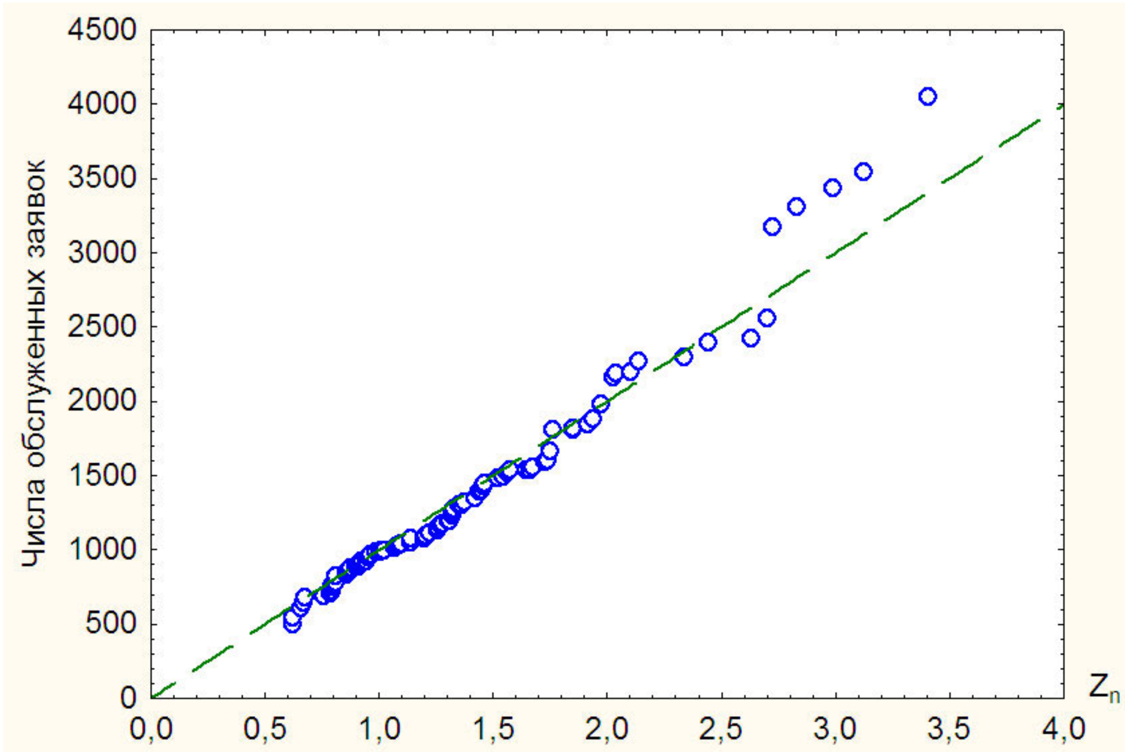

Рис. 4.7: числа обслуженных заявок

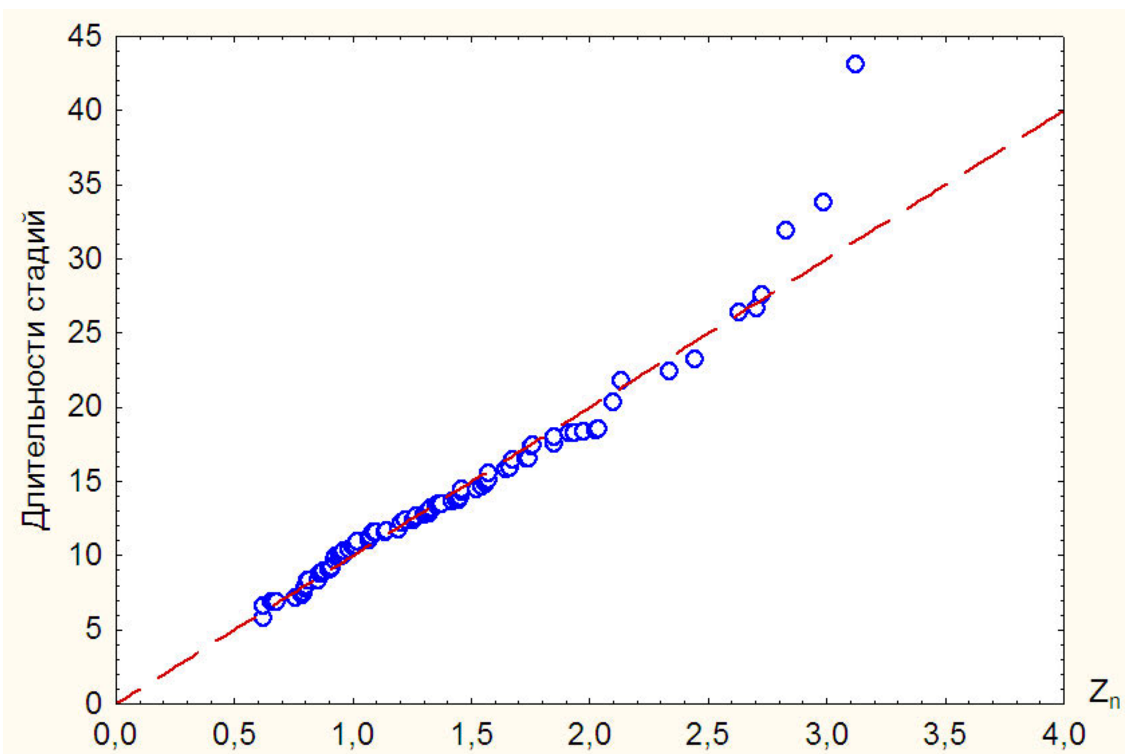

Рис. 4.8: длительности стадий

4.4 Асимптотика хвостов стационарных распределений

Заметим, что в силу (4.3) имеет место тождество

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} F(x)^u \, d\Psi(u),$$

эквивалентное

$$\Psi(x) = \psi(-\ln F(x)),$$

где $\psi(s)$ — преобразование Лапласа-Стилтьеса для Ψ, откуда

$$F(x) = \exp\{-\psi^{-1}(\Psi(x))\}. \tag{4.52}$$

Из (4.52) сразу следуют два простых, но немаловажных свойства.

Напомним отношение стохастического порядка: $G_1 \prec G_2$, если $\bar{G}_1(x) \le \bar{G}_2(x)$ при всех x.

Свойство 4.4.1. Монотонность F по Ψ: из $\Psi_1 \prec \Psi_2$ следует $F_1 \prec F_2$.

Ранее была доказана монотонность Ψ по F (свойство 4.1.4), т.е. в обратную сторону.

Свойство 4.4.2. Функции распределения F и Ψ имеют одни и те же области постоянства, точки непрерывности и точки скачков (если они есть).

Будем полагать распределение F невырожденным, откуда также следует невырожденность Ψ.

Далее изучается асимптотика хвоста Ψ в зависимости от того, имеет F конечное или бесконечное среднее μ_F.

Теорема 4.4.1 описывает случай конечного среднего. Далее в случае бесконечного среднего теорема 4.4.2 дает асимптотику хвоста F в зависимости от (степенного) хвоста Ψ, теорема 4.4.3 представляет собой ее частичное обращение, следствие 4.4.1 относится к случаю критического хвоста F, при котором возникает сверхтяжелый хвост Ψ, а следствие 4.4.2 к случаю $\bar{F}(x) = o(1/x)$, но $\mu_F = +\infty$.

Рассмотрим сначала случай конечного среднего.

Обозначим математическое ожидание Ψ через μ_Ψ, а также через x_0 и x_ω крайние левую и правую точки распределений F и Ψ (они общие по свойству 4.4.2). Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \mathbf{E}(Z_{n+1}|Z_n = x) = \int_0^{+\infty} (1 - F(u)^x) \, du, \tag{4.53}$$

которая определена при $\mu_F < \infty$ для всех $x > 0$, и $\varphi(0) = x_0$.

Напомним, что по лемме 4.2.2.2, если $\mu_F < \infty$ и F не вырождено, то $\varphi(x)$ — непрерывная, строго возрастающая, строго вогнутая функция на $\mathbf{R}_+$, и $\varphi(x) = o(x)$, $x \to \infty$.

Лемма 4.4.1. *Положительное решение μ^* уравнения $\varphi(x) = x$ существует и единственно; числовая последовательность $v_{n+1} = \varphi(v_n)$ сходится к нему при любом начальном условии $v_0 > 0$.*

Доказательство. Если $x_0 > 0$, то в некоторой окрестности нуля $\varphi(x) > x$. В противном случае, в силу условия (4.5) существуют такие $c_0 > 0$, $u_0 > 0$, что $F(u) \le e^{-c_0/u}$ при $u \in (0, u_0]$. Получаем

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} (1 - F(u)^x)\, du \ge \int_0^{u_0} (1 - e^{-c_0 x/u})\, du =$$
$$= x \int_0^{u_0/x} (1 - e^{-c_0/y})\, dy \sim c_0 x(-\ln x), \quad x \to 0 + 0.$$

Таким образом, $\varphi(x)$ в окрестности нуля растет гораздо быстрее x, а значит, в некоторой области также выполнено $\varphi(x) > x$. С другой стороны, в силу леммы 4.2.2.2 при достаточно больших x должно быть $\varphi(x) < x$. Следовательно, положительное решение уравнения существует.

В силу строгого возрастания и строгой вогнутости φ уравнение не может иметь более одного положительного решения, причем слева от него $x < \varphi(x) < \mu^*$, а справа $\mu^* < \varphi(x) < x$. Таким образом, при $v_0 < \mu^*$ последовательность v_n сходится к μ^* слева, а при $v_0 > \mu^*$ справа. □

Теорема 4.4.1. $\mu_\Psi < \infty$ *тогда и только тогда, когда* $\mu_F < \infty$. *При этом* $\mu_\Psi \le \mu^*$ *и верно*

$$\bar{\Psi}(x) \sim \mu_\Psi \bar{F}(x), \quad x \to x_\omega - 0. \tag{4.54}$$

Доказательство Пусть $\mu_\Psi < \infty$, тогда $1 - \psi(s) \sim \mu_\Psi s$, $s \to 0 + 0$, и $\psi^{-1}(1 - u) \sim \mu_\Psi^{-1} u$, $u \to 0 + 0$, так что из (4.52) следует $\bar{F}(x) \sim \mu_\Psi^{-1} \bar{\Psi}(x)$, $x \to x_\omega - 0$, что эквивалентно (4.54), и $\mu_F < \infty$.

Если $\mu_F < \infty$, можем использовать свойства функции φ. Обозначим $\mu_n = \mathbf{E} Z_n$. Поскольку предельное распределение не зависит от начального условия, возьмем $z_0 \in (x_0, x_\omega)$ и положим $Z_0 = z_0$, тогда $\mu_0 = z_0$. В силу определения и вогнутости φ (по лемме 4.2.2.2) получаем $\mu_{n+1} = \mathbf{E}\varphi(Z_n) \le \varphi(\mu_n)$. Построив числовую последовательность $v_{n+1} = \varphi(v_n)$, $v_0 = c$, получим $\mu_n \le v_n$, $n \ge 0$, и $v_n \to \mu^*$ по лемме 4.4.1. Поскольку Z_n сходятся по распределению при $n \to \infty$, а μ_n, $n \ge 0$, ограничены в совокупности, то существует $\mu_\Psi < \infty$ и $\mu_n \to \mu_\Psi$, $n \to \infty$, а из оценок для μ_n следует $\mu_\Psi \le \mu^*$. $\square$

К сожалению, μ_Ψ удается вычислить лишь в редких случаях. Например, как показано в разделе 4.2.3, если $F(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$, $x > 0$, $\alpha > 1$ (распределение Фреше), то

$$\mu_\Psi = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma(1 - \alpha^{-n})$$

(см. рис. 4.4 на с. 159).

Пример 4.4.1. Рассмотрим показательное распределение $\Psi(x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$, тогда $\psi(s) = 1/(1+s)$ и

$$F(x) = \exp\left\{-\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right\}, \quad x > 0,$$

так что $\bar{F}(x) \sim e^{-x}$, $x \to \infty$.

Рассмотрим теперь случай бесконечного среднего.

Заметим, что здесь речь идет о довольно узком классе распределений F, поскольку по своей "тяжести" хвостов они ограничены условием (4.2). Однако этот случай более сложный.

Теорема 4.4.2. *Пусть* $\bar{\Psi}(x) \sim x^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $x \to \infty$, *тогда* $\bar{F}(x) \sim c(\alpha)/x$, $x \to \infty$, *где* $c(\alpha) = \Gamma(1-\alpha)^{-1/\alpha}$.

Доказательство. По классической тауберовой теореме из $\bar{\Psi}(x) \sim x^{-\alpha}$, $x \to \infty$, следует $1 - \psi(s) \sim \Gamma(1-\alpha)s^\alpha$, $s \to 0+0$, так что $\psi^{-1}(1-u) \sim (u/\Gamma(1-\alpha))^{1/\alpha}$, $u \to 0+0$, и из (4.52) получаем $\bar{F}(x) \sim c(\alpha)/x$, $x \to \infty$.

Заметим, что на интервале $(0,1)$ функция $c(\alpha)$ строго убывает от $e^{-\gamma}$ до 0. Таким образом, все более тяжелым хвостам Ψ (при $\alpha \to 0$) соответствуют хвосты F, все более близкие к критическому (4.2).

На рис. 4.9 представлен график функции $c(\alpha)$.

Пример 4.4.2. Рассмотрим одностороннее устойчивое распределение с показателем $\alpha = 1/2$: $\Psi(x) = 2(1 - \Phi(x^{-1/2}))$, $x > 0$, где Φ — функция стандартного нормального распределения, тогда $\psi(s) = e^{-\sqrt{2s}}$ и

$$F(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\ln(2(1 - \Phi(x^{-1/2})))\right)^2\right\}, \quad x > 0,$$

так что $\bar{F}(x) \sim 1/(\pi x)$, $x \to \infty$.

Теорема 4.4.2 допускает следующее частичное обращение.

Теорема 4.4.3. *Если* $\bar{F}(x) \sim c(\alpha)/x$, $x \to \infty$, *то*

$$\limsup_{x\to\infty} \log_x \bar{\Psi}(x) = -\alpha.$$

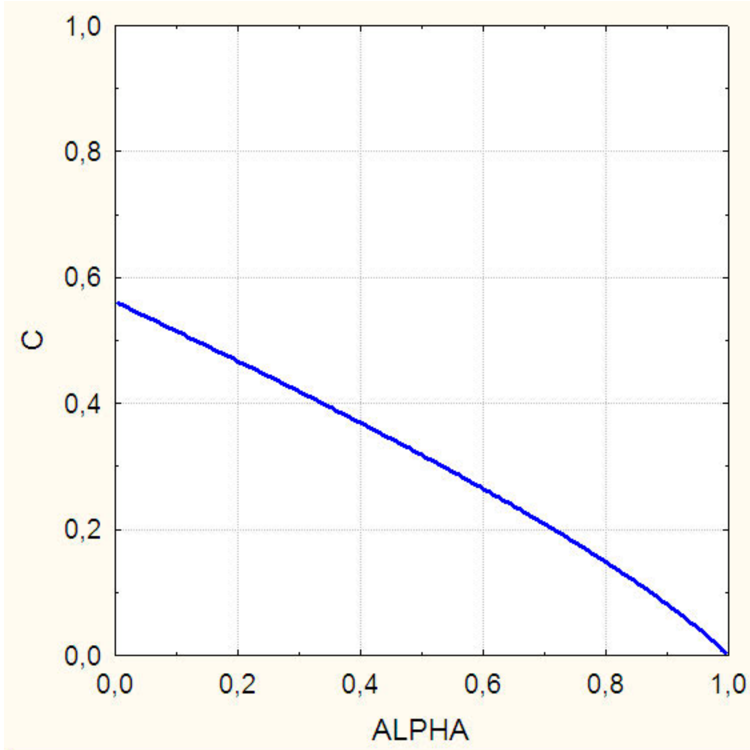

Рис. 4.9: функция $c(\alpha)$

Если, кроме того, $x_0 > 0$, *то имеет место точный предел*

$$\lim_{x\to\infty} \log_x \bar{\Psi}(x) = -\alpha.$$

Доказательство. Пусть $\Psi_1(x) = 1 - x^{-\alpha_1}$, $x \geq 1$, $\alpha_1 \in (0, \alpha)$. Тогда $\bar{F}_1(x) \sim c(\alpha_1)/x$, $x \to \infty$, $c(\alpha_1) > c(\alpha)$. Существует $x_1 \geq 1$ такое, что $\bar{F}_1(x) \geq \bar{F}(x)$ при $x \geq x_1$. Положим $\Psi_2(x) = \Psi_1(x)\mathbf{I}\{x \geq x_1\}$. Тогда $\bar{F}_2(x) \geq \bar{F}_1(x)$ при всех x в силу свойства 4.4.1 и $\bar{F}_2(x) = 1$ при $x < x_1$ в силу свойства 4.4.2. Получаем $\bar{F}(x) \leq \bar{F}_2(x)$ при всех x, откуда $\Psi \prec \Psi_2$ и $\limsup_{x\to\infty} \log_x \bar{\Psi}(x) \leq \lim_{x\to\infty} \log_x \bar{\Psi}_2(x) = -\alpha_1$. В силу произвольности $\alpha_1 \in (0, \alpha)$ получаем $\limsup_{x\to\infty} \log_x \bar{\Psi}(x) \leq -\alpha$.

Предположим, что $\limsup_{x\to\infty} \log_x \bar{\Psi}(x) < -\alpha$. Тогда найдутся такие $\alpha_3 \in (\alpha, 1)$ и $x_3 \geq 1$, что $\bar{\Psi}(x) \leq x^{-\alpha_3}$ при $x \geq x_3$. Обозначим $\Psi_3(x) = 1 - x^{-\alpha_3}$, $x \geq 1$. Положим $\Psi_4(x) = \Psi_3(x)\mathbf{I}(x \geq x_3)$, тогда $\Psi \prec \Psi_4$ и $\bar{F}_4(x) \sim c(\alpha_3)/x$, $x \to \infty$, $c(\alpha_3) < c(\alpha)$, При достаточно больших x верно $\bar{F}_4(x) \leq F(x)$, однако из свойства 4.4.1 следует $\bar{F}_4(x) \geq F(x)$ при всех x. Таким образом, приходим к противоречию. Значит, $\limsup_{x\to\infty} \log_x \bar{\Psi}(x) = -\alpha$.

Пусть теперь $x_0 > 0$. Положим $\Psi_5(x) = 0$ при $x < x_0$, $\Psi_5(x) = \Psi_3(x_3)$ при $x_0 \leq x < x_3$ и $\Psi_5(x) = \Psi_3(x)$ при $x \geq x_3$. В силу свойства 4.4.2 функция F_5 постоянна на интервале (x_0, x_3) и непрерывна в точке x_3.

Получаем $\bar F_5(x) \le \bar F_3(x) \le \bar F(x)$ при $x \ge x_3$; $\bar F_5(x) = \bar F_3(x_3) \le \bar F(x)$ при $x_0 \le x < x_3$; $\bar F_5(x) = \bar F(x) = 1$ при $x < x_0$. Таким образом, $F_5 \prec F$, откуда следует $\Psi_5 \prec \Psi$ и $\liminf_{x\to\infty} \log_x \bar\Psi(x) \ge \lim_{x\to\infty} \log_x \bar\Psi_5(x) = -\alpha_3$. В силу произвольности $\alpha_3 \in (\alpha, 1)$ получаем $\liminf_{x\to\infty} \log_x \bar\Psi(x) \ge -\alpha$, что в сочетании с ранее полученным верхним пределом дает точный. $\square$

Следствие 4.4.1. *Если $\bar F(x) \sim e^{-\gamma}/x$, $x \to \infty$, но существует стационарное распределение Ψ, то*

$$\lim_{x\to\infty} \log_x \bar\Psi(x) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим семейство функций $F_\alpha(x) = F(x)$, $x < 1$; $F_\alpha(x) = F^{c(\alpha)e^\gamma}(x)$, $x \ge 1$; $\alpha \in (0,1)$. Для них верно $F \succ F_\alpha$ и $\bar F_\alpha(x) \sim c(\alpha)/x$, $x \to \infty$. Пользуясь теоремой 4.4.2 и монотонностью Ψ по F, получаем $\lim_{x\to\infty} \log_x \bar\Psi(x) = 0$. $\square$

Таким образом, в критическом случае могут возникать "сверхтяжелые" хвосты, убывающие медленнее любой степени.

Следствие 4.4.2. *Если $\bar F(x) = o(1/x)$, $x \to \infty$, но $\mu_F = +\infty$, то*

$$\limsup_{x\to\infty} \log_x \bar\Psi(x) = -1.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\limsup_{x\to\infty} \log_x \bar\Psi(x) < -1$, тогда получается $\mu_\Psi < \infty$, а значит и $\mu_F < \infty$ (по теореме 4.4.1), что противоречит условию. Следовательно, $\limsup_{x\to\infty} \log_x \bar\Psi(x) \ge -1$.

Рассмотрим семейство функций $F_\alpha(x) = F(x)e^{-c(\alpha)/x}$, $\alpha \in (0,1)$. Для них верно $F \prec F_\alpha$ и $\bar F_\alpha(x) \sim c(\alpha)/x$, $x \to \infty$. Пользуясь теоремой 4.4.2 и монотонностью Ψ по F, получаем $\limsup_{x\to\infty} \log_x \bar\Psi(x) \le -1$, что в сочетании с предыдущей оценкой дает точное значение верхнего предела. $\square$

Оба семейства распределений, используемых в доказательствах следствий, построены так, чтобы не нарушалось условие (4.5).

Пример 4.4.3. Рассмотрим распределение Парето $\Psi(x) = 1 - x^{-1}$, $x \ge 1$, тогда

$$1-\psi(s) = \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-sx}}{x^2}\,dx = s\int_0^{1/s} (1-e^{-1/u})\,du \sim s(-\ln s), \quad s \to 0+0,$$

откуда $\psi^{-1}(1-u) \sim u/(-\ln u)$, $u \to 0+0$, и $\bar F(x) \sim 1/(x \ln x)$, $x \to \infty$.

В этом примере хвосты F и Ψ различаются не постоянным множителем и не показателем степени, а медленно меняющейся функцией.

Глава 5

Максимальные ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц

История исследования максимальных ветвящихся процессов была кратко изложена в преамбуле главы 4.

Подобно тому, как в классической теории ветвящихся процессов рассматриваются процессы не только с одним, но и с несколькими типами частиц, мы также введем максимальные ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц и изучим их свойства. При этом для простоты будет рассматриваться в основном случай двух типов частиц.

В разделе 5.1 даны определение и основные свойства, в разделе 5.2 доказаны предельные теоремы для стационарных распределений, в разделе 5.3 разобран случай процессов с копулами экстремальных значений.

5.1 Определение и основные свойства

До сих пор речь шла об МВП с однотипными частицами. Далее мы введем понятие МВП с $d \geq 2$ типами частиц, разберем некоторые свойства и примеры, докажем эргодическую теорему в случае $d = 2$ (теорема 5.1.1). Для случая $d > 2$ эргодическая теорема будет доказана позже при более сильных условиях (теорема 5.3.1).

Пусть заданы случайные векторы $\xi^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_d^{(k)})$, $1 \leq k \leq d$, со значениями в $\mathbf{Z}_+^d$. Определим МПВ с d типами частиц как многомерную цепь Маркова $Z(n) = (Z_1(n), \ldots, Z_d(n))$, $n \geq 0$, со значениями в $\mathbf{Z}_+^d$, заданную следующей рекуррентной формулой:

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^{d} \bigvee_{i=1}^{Z_j(n-1)} \xi_{i,k}^{(j)}(n), \tag{5.1}$$

где случайные векторы $\xi_i^{(j)}(n) = (\xi_{i,1}^{(j)}(n), \ldots, \xi_{i,d}^{(j)}(n))$, $n \geq 1$, независимы и $\xi_i^{(j)}(n) \stackrel{d}{=} \xi^{(j)}$, $1 \leq j \leq d$. Имеется в виду, что i-ая частица j-го типа $(n-1)$-го поколения порождает $\xi_{i,k}^{(j)}(n)$ частиц k-го типа в n-ом поколении.

Содержательный смысл заключается в следующем: каждая частица может порождать потомков разных типов, распределение численностей которых зависит от типа частицы. Далее по численностям потомков каждого типа берется максимум. Таким образом, предполагается, что частицы разных типов не взаимодействуют между собой.

Обозначим функции многомерного распределения векторов $\xi^{(k)}$ через F_k, $1 \leq k \leq d$, тогда из (5.1) следует формула для переходных вероятностей:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(Z_1(n) \leq j_1, \ldots, Z_d(n) \leq j_d | Z_1(n-1) = i_1, \ldots, Z_d(n-1) = i_d) = \\ &= F_1^{i_1}(j_1, \ldots, j_d) \ldots F_d^{i_d}(j_1, \ldots, j_d), \quad i_k, j_k \in \mathbf{Z}_+.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Вводя произвольные распределения F_k векторов $\xi^{(k)}$ уже не в $\mathbf{Z}_+^d$, а в $\mathbf{R}_+^d$, обобщаем формулу (5.2) до следующей:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(Z_1(n) \leq y_1, \ldots, Z_d(n) \leq y_d | Z_1(n-1) = x_1, \ldots, Z_d(n-1) = x_d) = \\ &= F_1^{x_1}(y_1, \ldots, y_d) \ldots F_d^{x_d}(y_1, \ldots, y_d), \quad x_k, y_k \in \mathbf{R}_+.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Естественным представляется определить МВП с d типами частиц и значениями в $\mathbf{R}_+^d$ как многомерную цепь Маркова с помощью (5.3).

Однако здесь возникает одна проблема, связанная с многомерностью. В одномерном случае, если $F(y)$ — функция распределения, то $F^s(y)$ — тоже функция распределения, при любом $s > 0$. В многомерном случае, если $F(y_1, \ldots y_d)$ — функция распределения, то $F^s(y_1, \ldots y_d)$ совсем не обязательно является таковой.

Пусть, например, (ξ_1, ξ_2) принимает значения $(0,1)$ и $(1,0)$ равновероятно, тогда $F(0,0) = 0$, $F(1,0) = F(0,1) = 1/2$, $F(1,1) = 1$. Вероятность попадания в $(0,1]^2$ при двумерной функции распределения F^s вычисляется по формуле:

$$F^s(1,1) - F^s(0,1) - F^s(1,0) + F^s(0,0) = 1 - 2^{1-s} \begin{cases} < 0, & 0 < s < 1; \\ = 0, & s = 1; \\ > 0, & s > 1. \end{cases}$$

Таким образом, при $0 < s < 1$ функция F^s не является функцией распределения, а при $s = 1$ и $s > 1$ распределение имеет разный носитель.

Пусть распределения векторов $\xi^{(k)}$ имеют носители $T_k \subset \mathbf{R}_+^d$. Обозначим через $T_{k,l}$ проекции T_k на ось Ox_l. Тогда множеством возможных значений компоненты $Z_k(n)$ будет $T_k^* = \bigcup_{j=1}^d T_{j,k} \subset \mathbf{R}_+$.

Сделаем дополнительно следующее предположение:

$$F_k^s(y_1, \ldots, y_d) \text{ — функция распределения}, \quad \forall s \in T_k^*, 1 \le k \le d. \quad (5.4)$$

С учетом (5.4) формула (5.3) действительно определяет случайный процесс, который можно назвать МВП с d типами частиц и значениями в $\mathbf{R}_+^d$.

По аналогии со свойством 4.1.1 (для МВП с одним типом частиц) можно доказать следующее свойство.

Свойство 5.1.1. *Если процесс $Z(n) = (Z_1(n), \ldots, Z_d(n))$ является МВП, то для набора чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_d > 0$ процесс $Z^*(n) = (\lambda_1 Z_1(n), \ldots, \lambda_d Z_d(n))$ также является МВП с функциями*

$$F_k^*(y_1, \ldots, y_d) = F(y_1/\lambda_1, \ldots, y_d/\lambda_d)^{1/\lambda_k}, \quad 1 \le k \le d,$$

если эти функции суть функции распределения.

Как показано в разделе 4.1, МВП с одним типом частиц и значениями в $\mathbf{R}_+$ всегда допускает явное построение. Для МВП с несколькими типами частиц это верно не всегда. Тем не менее можно указать некоторые примеры.

Пример 5.1.1. Пусть компоненты векторов $\xi^{(k)}$ независимы, тогда их функции распределения допускают представление

$$F_k(y_1, \ldots, y_d) = F_{k1}(y_1) \ldots F_{kd}(y_d), \quad 1 \le k \le d,$$

и МВП может быть задан стохастически рекуррентной формулой

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^d F_{jk}^{-1}\left(U_{j,k,n}^{1/Z_j(n-1)}\right),$$

где случайные величины $U_{j,k,n}$ независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$.

Если же, кроме того, существуют такие функции $G_k(y)$, $1 \le k \le d$, что $F_{kl}(y) = G_l^{a_{kl}}(y)$ для некоторых чисел $a_{kl} > 0$, то МВП может быть задан и другой формулой:

$$Z_k(n) = G_k^{-1}\left(U_{k,n}^{1/\sum_{j=1}^d a_{jk} Z_j(n-1)}\right),$$

где случайные величины $U_{k,n}$ независимы и равномерно распределены на $[0,1]$.

В обоих случаях (5.4) заведомо выполняется, а (5.3) проверяется непосредственно.

Пример 5.1.2. Пусть F_k, $1 \le k \le d$, $d \ge 2$, представляют собой многомерные максимум-устойчивые функции распределения (функции распределения экстремальных значений) [9, §5.2], [130, §7.5]. Поскольку все происходит в $\mathbf{R}_+^d$, то из трех экстремальных типов это могут быть только многомерные распределения Фреше. Используем представление Скляра (см. с. 73)

$$F_k(y_1,\ldots,y_d) = C_k(F_{k1}(y_1),\ldots,F_{kd}(y_d)), \quad 1 \le k \le d,$$

где одномерные функции распределения F_{kl} имеют вид

$$F_{kl}(y) = \begin{cases} \exp\{-c_{kl}(y-b_{kl})^{-\alpha_k}\}, & y > b_{kl} \\ 0, & y \le b_{kl} \end{cases}, \quad \alpha_k, c_{kl} > 0, \quad b_{kl} \ge 0,$$

а копулы C_k являются максимум-устойчивыми (копулами экстремальных значений) [130, §7.5], [134, §3.3.4], так что удовлетворяют общему условию:

$$C^s(u_1,\ldots,u_d) = C(u_1^s,\ldots u_d^s), \quad \forall s > 0.$$

Для многомерных распределений Фреше получаем следующие соотношения:

$$F_k^x(y_1,\ldots,y_d) = F_k(x^{-1/\alpha_k}(y_1-b_{k1})+b_{k1},\ldots,x^{-1/\alpha_k}(y_d-b_{kd})+b_{kd}), \forall x > 0.$$

Отсюда следует, что МВП может быть задан рекуррентной формулой

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^d (Z_j^{1/\alpha_j}(n)(\xi_k^{(j)}(n) - b_{jk}) + b_{jk}),$$

где случайные векторы $\xi^{(j)}(n) = (\xi_1^{(j)}(n),\ldots,\xi_d^{(j)}(n))$, $n \ge 1$, независимы и имеют многомерные функции распределения F_j, $1 \le j \le d$.

Перед тем как доказывать эргодическую теорему для МВП с двумя типами частиц, сделаем ряд дополнительных предположений. Прежде всего, пусть

$$\min\{\inf T_1^*, \inf T_2^*\} \ge x_0 > 0. \tag{5.5}$$

Тем самым мы автоматически исключаем возможность вырождения процесса (его обращения в нуль или сходимости к нулю), а также чередование типов (когда в одном поколении присутствуют частицы только одного типа, в следующем — другого и т.д.) и иные особенности поведения. Вместо (5.4) тогда достаточно предположить, что

$$F_1^{x_0}(y_1, y_2), F_2^{x_0}(y_1, y_2) \text{ — функции распределения.} \tag{5.6}$$

Для обоснования этого факта используем следующую лемму.

Лемма 5.1.1. *Пусть $F(x, y)$ — функция распределения, тогда $F^r(x, y)$ — функция распределения при всех $r \geq 1$.*

Доказательство. Получение нужных пределов функции (единица при $x, y \to +\infty$, нуль при $x \to -\infty$ и при $y \to -\infty$) не составляет труда. Основная проблема заключается в проверке необходимого свойства любой функции двумерного распределения:

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0, \quad \forall x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2.$$

Задача сводится к следующей: для любых чисел $a \geq d \geq 0, b, c \in [d, a]$, таких, что $a - b - c + d \geq 0$, требуется доказать, что $a^r - b^r - c^r + d^r \geq 0$ при всех $r \geq 1$. Поскольку $c \leq a + d - b$, то $b^r + c^r \leq b^r + (a + d - b)^r$. Функция $f(b) = b^r + (a + d - b)^r$, $b \in [d, a]$, является выпуклой при $r \geq 1$, поэтому не превосходит взвешенную сумму своих значений $f(a)$ и $f(d)$, которые оба равны $a^r + d^r$. Таким образом, $b^r + c^r \leq a^r + d^r$, что и доказывает лемму. $\square$

Заметим, что в случае $d > 2$ лемма 5.1.1 уже не верна (см. лемму 5.3.1).

Теперь если $F^{x_0}(y_1, y_2)$ — функция распределения, то по лемме таковой является и $F^x(y_1, y_2) = (F^{x_0}(y_1, y_2))^{x/x_0}$ при всех $x \geq x_0$, а значит, выполняется предположение (5.4).

Обозначим через $T_k^{(s)}$ носители распределений, заданных функциями распределения F_k^s, $s \geq x_0$. Сделаем еще одно предположение:

$$T_k^{(s)} = T_k, \quad \forall s \in T_k^* \cup \{x_0\}, \quad k = 1, 2. \tag{5.7}$$

Таким образом, множество возможных численностей потомков от частиц каждого типа не зависит от числа этих частиц.

За множество состояний цепи Маркова $Z(n)$ можно принять

$$S = \{(\max\{x_{11}, x_{21}\}, \max\{x_{12}, x_{22}\}) : (x_{11}, x_{12}) \in T_1, (x_{21}, x_{22}) \in T_2\},$$

поскольку при любом допустимом начальном условии $Z(0) \in \mathbf{R}_+^d \backslash \{0\}$ (таком, что (5.3) дает функцию распределения для $Z(1)$) верно $Z(n) \in S$ для всех $n \geq 2$ п.н. Будем предполагать, что S состоит более чем из одной точки (в противном случае стационарное распределение сосредоточено в этой точке и эргодичность тривиальна).

Обозначим $x^0 = (x_0, x_0)$. Предположим существование такой точки $a = (a_1, a_2)$, что для множеств $A = [a_1, +\infty) \times [a_2, +\infty)$ и $A^* = [0, a_1] \times [0, a_2]$

$$\mathbf{P}(Z(n) \in A | Z(n-1) = x^0) > 0, \quad \mathbf{P}(Z(n) \in A^* | Z(n-1) = x^0) > 0. \quad (5.8)$$

Например, если S имеет внутренние или изолированные точки, то в качестве a можно взять любую из них.

Введем норму в $\mathbf{R}^d$: $\|(x_1, \dots, x_d)\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}$. Определим величины

$$\rho_k = \limsup_{u \to \infty} u \mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| > u), \quad 1 \le k \le d.$$

Теорема 5.1.1. *Если выполнены условия* (5.5)–(5.8) *и* $\rho_1 + \rho_2 < e^{-\gamma}$, *то процесс* $Z(n)$ *эргодический.*

Доказательство. Рассмотрим функцию распределения

$$G(u) = \mathbf{P}(\|\xi^{(1)}\| \le u) \mathbf{P}(\|\xi^{(2)}\| \le u) = F_1(u, u) F_2(u, u),$$

тогда для $\rho = \limsup_{u \to \infty} u \bar{G}(u)$ верна оценка $\rho \le \rho_1 + \rho_2 < e^{-\gamma}$. Значит, для некоторого числа $0 < \tau < e^{-\gamma}$ существует такое число $M > \|a\|$, что $G(u) \ge e^{-\tau/u}$ при всех $u \ge M$. Из формулы (5.3) получаем:

$$\mathbf{P}(\|Z(n)\| \le u | Z(n-1) = x) = F_1^{x_1}(u, u) F_2^{x_2}(u, u) \ge G^{\|x\|}(u).$$

Введем пробную функцию Ляпунова $g(x) = \max\{\ln(\|x\|/M), 0\}$ и обозначим $\mu(x) = \mathbf{E}(g(Z(n)) | Z(n-1) = x) - g(x)$, тогда

$$\begin{aligned} \mu(x) &\le \int_0^{+\infty} (1 - G^{Me^{g(x)}}(Me^v))\, dv - g(x) \le \\ &\le \int_0^{+\infty} (1 - \exp\{-\tau e^{g(x)} e^{-v}\})\, dv - g(x) = \\ &= \gamma + \ln \tau - \mathrm{Ei}(-\tau e^{g(x)}), \end{aligned}$$

где через Ei обозначена интегральная показательная функция:

$$\mathrm{Ei}(x) = -\int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt, \quad x < 0,$$

причем $\mathrm{Ei}(x) \to 0$, $x \to -\infty$. Поскольку $\gamma + \ln \tau < 0$, это означает, что существуют такие числа $\varepsilon > 0$, $N \ge M$, что $\mu(x) < -\varepsilon$ при $\|x\| > N$. При

$\|x\| \le N$ величина $\mathbf{E}(g(Z(n))|Z(n-1)=x)$ ограничена. Таким образом, условия Ляпунова [3, §4.2] выполнены.

Проверим условие перемешивания [3, §2]. Обозначим

$$\delta = F_1(a_1, a_2) F_2(a_1, a_2) > 0.$$

Заметим, что для любых независимых случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$ с функцией распределения H и множества $D \subset \mathbf{R}$ с $\inf D \ge \Delta$ верно неравенство

$$\mathbf{P}\left(\bigvee_{i=1}^{n} \eta_i \in D\right) \ge \mathbf{P}\left(\eta_1 \in D, \bigvee_{i=2}^{n} \eta_i \le \Delta\right) \ge \mathbf{P}(\eta_1 \in D) H^{n-1}(\Delta).$$

Обобщая эту идею, получаем, что для всех точек $x \in V = [x_0, N]^2 \cap S$ и борелевских множеств $B \subset S$ верно неравенство

$$\mathbf{P}(Z(n) \in B | Z(n-1) = x) \ge \mathbf{P}(Z(n) \in B \cap A | Z(n-1) = x^0)\delta^N.$$

Определим на множестве S вероятностную меру:

$$\varphi(B) = \frac{\mathbf{P}(Z(n) \in B \cap A | Z(n-1) = x^0)}{\mathbf{P}(Z(n) \in A | Z(n-1) = x^0)}$$

и число $0 < p < \mathbf{P}(Z(n) \in A | Z(n-1) = x^0)\delta^N$, тогда

$$\mathbf{P}(Z(n) \in B | Z(n-1) = x) > p\varphi(B).$$

Кроме того, в силу сделанных предположений цепь Маркова $Z(n)$ является неприводимой и апериодичной (из любого состояния можно перейти в V за один шаг).

Из проверенных условий следует эргодичность процесса $Z(n)$ [3, §2]. □

Следствие 5.1.1. *Если выполнены условия* (5.5)–(5.8) *и* $\mathbf{E}\|\xi^{(1)}\| < \infty$, $\mathbf{E}\|\xi^{(2)}\| < \infty$, *то процесс* $Z(n)$ *эргодический.*

Утверждение следует из асимптотики $\mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| > u) = o(1/u)$, $u \to \infty$, $k = 1, 2$.

5.2 Предельные теоремы для стационарных распределений

Далее будут доказаны предельные теоремы для стационарных распределений МВП с двумя типами частиц в случаях некоторых семейств распределений численностей потомков.

Теорема 5.2.1 относится к случаю распределений числа потомков на растущих прямоугольниках, теорема 5.2.2 к случаю степенных семейств распределений числа потомков с легкими хвостами (что приводит к предельному закону Гумбеля). Данные теоремы представляют собой обобщения теорем, ранее доказанных для МВП с одним типом частиц в разделах 4.2.1 и 4.2.2 соответственно.

Рассмотрим семейство процессов $\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ с $F_k^{(\lambda)}$ и $T_k^{(\lambda)} \subset [1, \lambda_1] \times [1, \lambda_2]$, $\lambda > 0$, $\lambda_k = p_k\lambda$, $p_k > 0$, $\lambda_k \geq 1$, $k = 1, 2$. По теореме 5.1.1 для каждого процесса $\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ существует и единственно стационарное распределение $\Psi^{(\lambda)}$ на $[1, \lambda_1] \times [1, \lambda_2]$. Обозначим случайный вектор с таким распределением через $\tilde{Z}^{(\lambda)} = (\tilde{Z}_1^{(\lambda)}, \tilde{Z}_2^{(\lambda)})$. Нас будет интересовать асимптотическое поведение $\Psi^{(\lambda)}$ при $\lambda \to \infty$. Этот вопрос для процессов с одним типом частиц изучался в разделе 4.2.1.

Теорема 5.2.1 *Если для любого вектора* $q = (q_1, q_2) \in (0, 1]^2$, $q \neq (1, 1)$, *верно*

$$\limsup_{\lambda\to\infty} F_k^{(\lambda)}(q_1\lambda_1, q_2\lambda_2) < 1, \quad k = 1, 2 \tag{5.9}$$

и для некоторой векторной функции $u(\lambda) = (u_1(\lambda), u_2(\lambda))$ *существуют пределы*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(1 - F_k^{(\lambda)}(u(\lambda))) = \tau_k \in [0, +\infty], \quad k = 1, 2,$$

то

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) = e^{-(p_1\tau_1 + p_2\tau_2)}.$$

Доказательство. Обозначим $r = (r_1, r_2)$, $r_k = q_k\lambda_k$. Докажем сначала, что $\Psi^{(\lambda)}(r) \to 0$, $\lambda \to \infty$. Используем разложение

$$\begin{aligned}
&\Psi^{(\lambda)}(r) = \mathbf{E}(F_1^{(\lambda)}(r)^{\tilde{Z}_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(r)^{\tilde{Z}_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde{Z}_1^{(\lambda)} \in [1, r_1], \tilde{Z}_2^{(\lambda)} \in [1, r_2]\})+\\
&+\mathbf{E}(F_1^{(\lambda)}(r)^{\tilde{Z}_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(r)^{\tilde{Z}_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde{Z}_1^{(\lambda)} > r_1, \tilde{Z}_2^{(\lambda)} \in [1, r_2]\})+\\
&+\mathbf{E}(F_1^{(\lambda)}(r)^{\tilde{Z}_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(r)^{\tilde{Z}_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde{Z}_1^{(\lambda)} \in [1, r_1], \tilde{Z}_2^{(\lambda)} > r_2\})+\\
&+\mathbf{E}(F_1^{(\lambda)}(r)^{\tilde{Z}_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(r)^{\tilde{Z}_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde{Z}_1^{(\lambda)} > r_1, \tilde{Z}_2^{(\lambda)} > r_2\}) \leq\\
&\leq F_1^{(\lambda)}(r)F_2^{(\lambda)}(r)\Psi^{(\lambda)}(r) + F_1^{(\lambda)}(r)^{r_1}F_2^{(\lambda)}(r)+\\
&+F_1^{(\lambda)}(r)F_2^{(\lambda)}(r)^{r_2} + F_1^{(\lambda)}(r)^{r_1}F_2^{(\lambda)}(r)^{r_2},
\end{aligned}$$

откуда

$$\Psi^{(\lambda)}(r) \leq \frac{F_1^{(\lambda)}(r)^{r_1}F_2^{(\lambda)}(r) + F_1^{(\lambda)}(r)F_2^{(\lambda)}(r)^{r_2} + F_1^{(\lambda)}(r)^{r_1}F_2^{(\lambda)}(r)^{r_2}}{1 - F_1^{(\lambda)}(r)F_2^{(\lambda)}(r)} \to 0$$

при $\lambda \to \infty$. Выберем теперь $q \in (0,1)^2$. Аналогично получаем

$$\Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) = \mathbf{E}(F_1^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde{Z}_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde{Z}_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde{Z}_1^{(\lambda)} \in [1, r_1], \tilde{Z}_2^{(\lambda)} \in [1, r_2]\})+$$
$$+\mathbf{E}(F_1^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde{Z}_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde{Z}_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde{Z}_1^{(\lambda)} > r_1, \tilde{Z}_2^{(\lambda)} \in [1, r_2]\})+$$
$$+\mathbf{E}(F_1^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde{Z}_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde{Z}_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde{Z}_1^{(\lambda)} \in [1, r_1], \tilde{Z}_2^{(\lambda)} > r_2\})+$$
$$+\mathbf{E}(F_1^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde{Z}_1^{(\lambda)}} F_2^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\tilde{Z}_2^{(\lambda)}} \mathbf{I}\{\tilde{Z}_1^{(\lambda)} > r_1, \tilde{Z}_2^{(\lambda)} > r_2\}),$$

откуда следуют неравенства

$$\Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) \geq F_1^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\lambda_1} F_2^{(\lambda)}(u(\lambda))^{\lambda_2}(1 - \Psi^{(\lambda)}(r)),$$
$$\Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) \leq \Psi^{(\lambda)}(r) + \Psi^{(\lambda)}(r_1, \lambda_2) + \Psi^{(\lambda)}(\lambda_1, r_2) + F_1^{(\lambda)}(u(\lambda))^{r_1} F_2^{(\lambda)}(u(\lambda))^{r_2}. \tag{5.10}$$

Переходя в (5.10) к пределам по $\lambda \to \infty$ с учетом $F_k^{(\lambda)}(u(\lambda))^\lambda \to e^{-\tau_k}$, $k = 1, 2$, получаем:

$$e^{-(p_1\tau_1 + p_2\tau_2)} \leq \liminf_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) \leq \limsup_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) \leq e^{-(q_1p_1\tau_1 + q_2p_1\tau_2)},$$

откуда в силу произвольности выбора q следует утверждение теоремы. □

Рассмотрим функции распределения F_1^0, F_2^0 на $[0,1]^2$, принадлежащие областям притяжения некоторых невырожденных (по обеим компонентам) максимум-устойчивых законов H_1 и H_2 [9, 54] с одинаковой нормировкой максимумов, т.е. существуют такие функции $a_1(s) > 0$, $a_2(s)$, $b_1(s) > 0$, $b_2(s)$, $s > 0$, что для векторной функции $v(s,x) = (a_1(s)x_1 + b_1(s), a_2(s)x_2 + b_2(s))$, $x = (x_1, x_2)$, верно

$$\lim_{s\to\infty} F_1^0(v(s,x))^s = H_1(x), \quad \lim_{s\to\infty} F_2^0(v(s,x))^s = H_2(x), \quad k = 1, 2. \tag{5.11}$$

Следствие 5.2.1. *Пусть выполнено* (5.9) *и существует векторная функция* $f(s,q) = (f_1(s,q), f_2(s,q))$ *такая, что*

$$\frac{1 - F_k^{(\lambda)}(f(\lambda, v(\lambda, x))}{1 - F_k^0(v(\lambda, x))} \to 1, \quad \lambda \to \infty. \tag{5.12}$$

Тогда

$$\lim_{s\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(f(\lambda, v(\lambda, x)) = H_1^{p_1}(x) H_2^{p_2}(x).$$

Доказательство. В силу (5.11) и (5.12) получаем

$$\lambda(1 - F_k^{(\lambda)}(f(\lambda, v(\lambda, x))) \to -\ln H_k(x), \quad \lambda \to \infty.$$

Обозначая $\tau_k = -\ln H_k(x)$, $u(\lambda) = f(\lambda, v(\lambda, x))$ и применяя теорему 5.2.1, получаем утверждение следствия. $\square$

Наиболее простые примеры, когда применимо следствие 5.2.1, возникают при выполнении условий

$$F_k(x_1, x_2) = F_k^0\left(\frac{x_1-1}{\lambda_1-1}, \frac{x_2-1}{\lambda_2-1}\right), \quad k=1,2,$$

тогда $f(s,q) = ((p_1 s-1)q_1+1, (p_2 s-1)q_2+1)$.

Далее в примерах будем предполагать для простоты, что $p_1 = p_2 = 1$, т.е. рассматриваются стационарные распределения на растущих квадратах.

Пример 5.2.1. Пусть $F_1^0(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, $F_2^0(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ (численности потомков каждого типа от частицы каждого типа независимы). Тогда

$$\lim_{s\to\infty} F_1^0(y_1/s+1, y_2/s+1)^s = e^{2y_1+y_2}, \quad \lim_{s\to\infty} F_2^0(y_1/s+1, y_2/s+1)^s = e^{y_1+2y_2},$$

откуда получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(\lambda+y_1, \lambda+y_2) = e^{3(y_1+y_2)}, \quad y_1, y_2 \le 0.$$

Таким образом, случайный вектор $\hat{Z}^{(\lambda)} = (\lambda - \tilde{Z}_1^{(\lambda)}, \lambda - \tilde{Z}_2^{(\lambda)})$ имеет асимптотически двумерное показательное распределение с независимыми компонентами.

На рис. 5.1 представлены результаты моделирования процесса при $\lambda = 10$ на протяжении 500 шагов с начальным условием $(10, 10)$. В дальнейших примерах эти параметры остаются неизменными.

При моделировании использовалось конструктивное представление процесса

$$\begin{aligned} Z_1(n) &= 9U_{1,n}^{1/(2Z_1(n-1)+Z_2(n-1))} + 1, \\ Z_2(n) &= 9U_{2,n}^{1/(Z_1(n-1)+2Z_2(n-1))} + 1, \end{aligned}$$

где $U_{i,n}$, $i = 1,2$, $n \ge 1$, независимы и равномерно распределены на $[0,1]$.

Пример 5.2.2. Пусть $F_1^0(x_1, x_2) = \min\{x_1^2, x_2\}$, $F_2^0(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2^2\}$ (частные распределения численностей потомков каждого типа от частицы каждого типа те же, что и в примере 5.2.1, однако здесь эти численности комонотонны). Тогда

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to\infty} F_1^0(y_1/s+1, y_2/s+1)^s = e^{\min\{2y_1, y_2\}}, \\ &\lim_{s\to\infty} F_2^0(y_1/s+1, y_2/s+1)^s = e^{\min\{y_1, 2y_2\}}, \end{aligned}$$

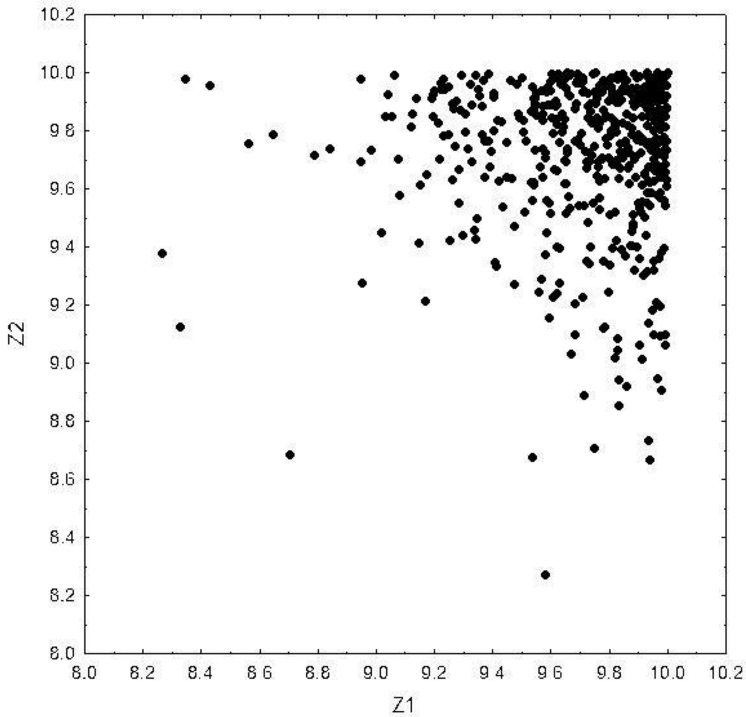

Рис. 5.1: моделирование к примеру 5.2.1

откуда получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi^{(\lambda)}(\lambda+y_1,\lambda+y_2)=e^{\min\{2y_1,y_2\}+\min\{y_1,2y_2\}},\quad y_1,y_2\le 0.$$

Таким образом, случайный вектор $\hat{Z}^{(\lambda)}$ имеет асимптотически двумерное показательное распределение, но уже с зависимыми компонентами. Легко показать, что он распределен в угле $\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}_+^2 : 1/2\le y_2/y_1\le 2\}$.

На рис. 5.2 представлены результаты моделирования процесса. Пунктиром обозначены кривые $Z_2=1+3\sqrt{Z_1-1}$ и $Z_2=1+(Z_1-1)^2/9$, ограничивающие область возможных значений.

При моделировании использовалось конструктивное представление процесса

$$Z_1(n)=9\max\left\{U_{1,n}^{1/(2Z_1(n-1))},U_{2,n}^{1/Z_2(n-1)}\right\}+1,$$
$$Z_2(n)=9\max\left\{U_{1,n}^{1/Z_1(n-1)},U_{2,n}^{1/(2Z_2(n-1))}\right\}+1,$$

где $U_{i,n}$, $i=1,2$, $n\ge1$, независимы и равномерно распределены на $[0,1]$.

В общем случае, в качестве предельных распределений компонент вектора $\tilde{Z}^{(\lambda)}$ могут выступать распределения экстремальных типов Вейбулла $H(x)=\exp\{-(-x)^\alpha\}$, $x\le 0$, $\alpha>0$, и Гумбеля $H(x)=\exp\{-e^{-x}\}$ [9, 54].

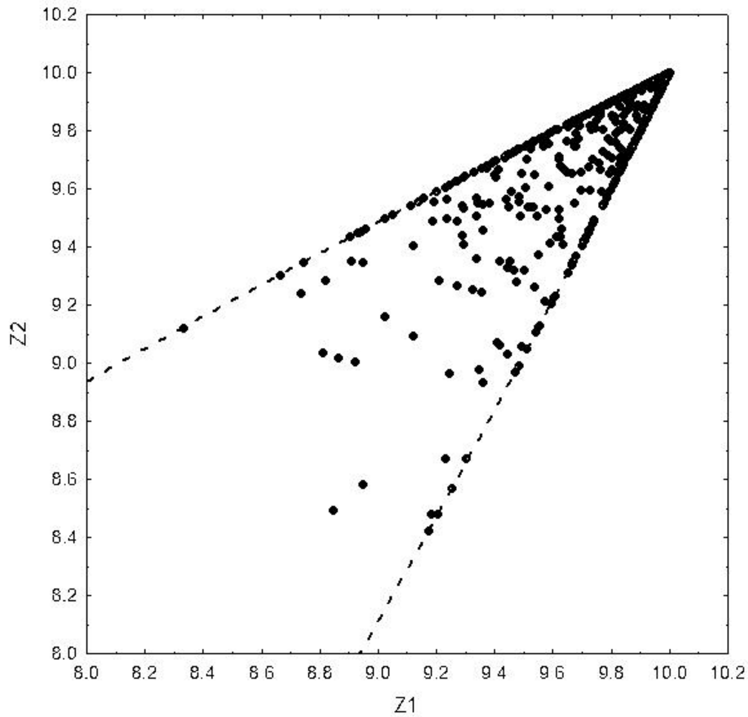

Рис. 5.2: моделирование к примеру 5.2.2

Введем функцию распределения $G(x) = 1 - \exp\{-x/(1-x)\}$, $x \in [0,1)$.

Пример 5.2.3. Пусть $F_1^0(x_1,x_2) = G^2(x_1)G(x_2)$, $F_2^0(x_1,x_2) = G(x_1)G^2(x_2)$, тогда

$$\lim_{s\to\infty} F_1^0(z_1,z_2)^s = \exp\{-2e^{-y_1}+e^{-y_2}\}, \quad \lim_{s\to\infty} F_2^0(z_1,z_2)^s = \exp\{-e^{-y_1}+2e^{-y_2}\},$$

где

$$z_i = 1 - \frac{1}{1+\ln s} + \frac{y_i}{(1+\ln s)^2}, \quad i = 1,2,$$

откуда получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(w_1,w_2) = \exp\{-3(e^{-y_1}+e^{-y_2})\},$$

где

$$w_i = \lambda - \frac{\lambda-1}{1+\ln\lambda} + \frac{(\lambda-1)y_i}{(1+\ln\lambda)^2}, \quad i = 1,2.$$

Таким образом получаем в качестве предельного двумерное распределение Гумбеля с независимыми компонентами.

На рис. 5.3 представлены результаты моделирования процесса.

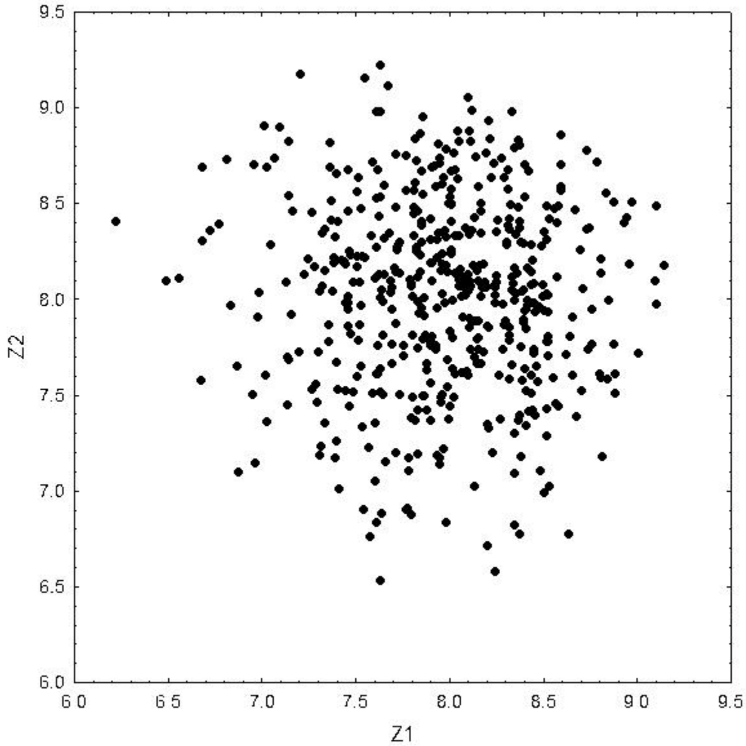

Рис. 5.3: моделирование к примеру 5.2.3

Пример 5.2.4. Пусть $F_1^0(x_1, x_2) = \min\{G^2(x_1), G(x_2)\}$, $F_2^0(x_1, x_2) = \min\{G(x_1), G^2(x_2)\}$, тогда (в обозначениях примера 5.2.3)

$$\lim_{s\to\infty} F_1^0(z_1, z_2)^s = \exp\left\{-e^{-\min\{y_1-\ln 2, y_2\}}\right\},$$
$$\lim_{s\to\infty} F_2^0(z_1, z_2)^s = \exp\left\{-e^{-\min\{y_1, y_2-\ln 2\}}\right\},$$

откуда получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(w_1, w_2) = \exp\left\{-\left(e^{-\min\{y_1-\ln 2, y_2\}} + e^{-\min\{y_1, y_2-\ln 2\}}\right)\right\}.$$

Таким образом получаем в качестве предельного двумерное распределение Гумбеля с зависимыми компонентами, заключенное в полосе $\{(y_1, y_2) : |y_2 - y_1| \le \ln 2\}$.

На рис. 5.4 представлены результаты моделирования процесса. Пунктиром обозначены кривые $G((Z_2 - 1)/9) = G^2((Z_1 - 1)/9)$ и $G^2((Z_2 - 1)/9) = G((Z_1 - 1)/9)$, ограничивающие область возможных значений.

Заметим, что следствие 5.2.1 дает только непрерывные предельные распределения (не обязательно абсолютно непрерывные). Однако предельные распределения могут быть и дискретными.

Следствие 5.2.2. *Пусть* $F_1^{(N)}$ *и* $F_2^{(N)}$ *— дискретные распределения на множествах* $\{1, \ldots, N\}^2$, $N \ge 1$, *и* $F_k^{(N)}(m) = F_k^0(m/N)$,

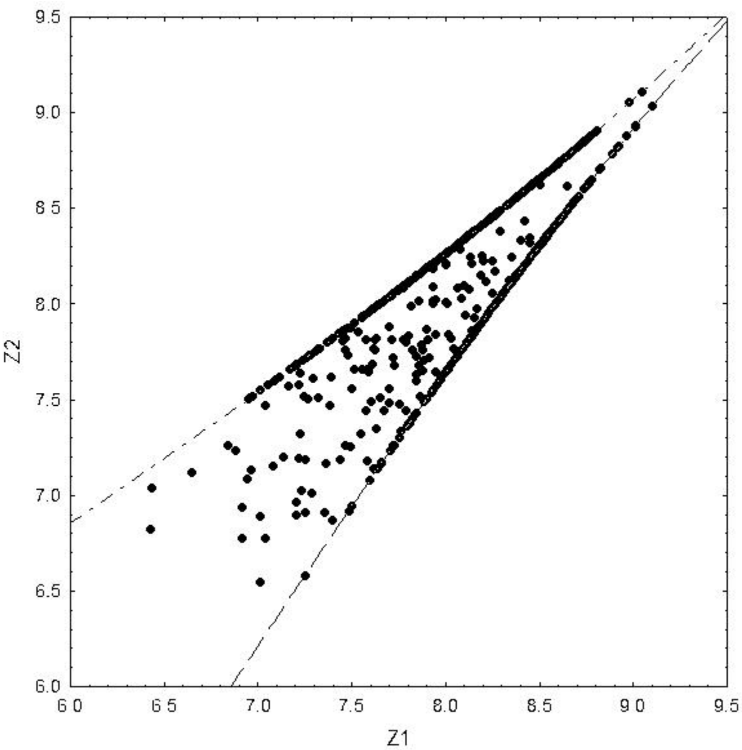

Рис. 5.4: моделирование к примеру 5.2.4

$m = (m_1, m_2) \in \{1, \ldots, N\}^2$, а распределения F_1^0 и F_2^0 удовлетворяют (5.11) с $a_k(s) = 1/s$, $b_k(s) = 1$. Тогда

$$\lim_{N\to\infty} \Psi^{(N)}(N - m_1, N - m_2) = H_1(-m)H_2(-m).$$

Доказательство. В силу (5.11) получаем $\lambda(1 - F_k^{(\lambda)}(N - m_1, N - m_2)) \to -\ln H_k(-m)$. Обозначая $\tau_k = -\ln H_k(-m)$, $u(\lambda) = f(\lambda, v(\lambda, x))$ и применяя теорему 5.2.1, получаем утверждение следствия. □

Пример 5.2.5. Пусть $F_1^0(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, $F_2^0(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$, тогда

$$\lim_{N\to\infty} \Psi^{(N)}(N - m_1, N - m_2) = e^{-3(m_1+m_2)}.$$

Таким образом, вектор $\hat{Z}^{(N)} = (N - \tilde{Z}_1^{(N)}, N - \tilde{Z}_2^{(N)})$ имеет асимптотически двумерное геометрическое распределение с независимыми компонентами.

Аналогично примерам 5.2.2 и 5.2.4, можно построить дискретные предельные распределения и с зависимыми компонентами.

Рассмотрим теперь семейство процессов $\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ с $F_k^{(\lambda)}(x_1, x_2) = F_k^0(x_1, x_2)^\lambda$ на $T_k \subset [1, +\infty)^2$, $k = 1, 2$, $\lambda \geq 1$. Предположим, что F_1^0, F_2^0 удовлетворяют (5.11), где H_1 и H_2 — двумерные распределения Гумбеля (т.е. каждая компонента имеет распределение данного типа), причем

$b_1(s), b_2(s) \to \infty$, $s \to \infty$. Критерии принадлежности распределения к области притяжения экстремального типа Гумбеля можно найти в [9, 54]. В частности, правый хвост должен убывать быстрее любой степени, и все моменты неотрицательной части конечны.

По теореме 4.1.1 для каждого $\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ существует и единственно стационарное распределение $\Psi^{(\lambda)}$ на $[1, +\infty]^2$. Будем по-прежнему обозначать случайный вектор с таким распределением через $\tilde{Z}^{(\lambda)}$. Нас будет интересовать асимптотическое поведение $\Psi^{(\lambda)}$ при $\lambda \to \infty$. Этот вопрос для процессов с одним типом частиц изучался в разделе 4.2.2.

Пусть F_{kl} — частное распределение l-ой компоненты двумерного распределения F_k, $k = 1, 2$, $l = 1, 2$. Определим функции

$$\varphi_{kl}(s) = \int_0^\infty (1 - F_{kl}^0(x)^s)\, dx, \quad s \ge 1, \quad k, l = 1, 2.$$

Как показано в разделе 4.2.2. (см. леммы 4.2.2.1–4.2.2.3), такие функции конечны при всех $s \ge 1$, не убывают и вогнуты, а кроме того, являются медленно меняющимися и $\varphi_{kl}(s) \sim u_{kl}(s)$, $s \to \infty$, где $u_{kl}(s) = (F_{kl}^0)^{-1}(1 - 1/s)$. В силу (5.11) и сходимости к экстремальному типу Гумбеля имеем $u_{kl}(s) \sim b_l(s)$, так что $\varphi_{kl}(s) \sim b_l(s)$, $s \to \infty$.

Введем также функции

$$\varphi_k(s_1, s_2) = \int_0^\infty (1 - F_{1k}^0(x)^{s_1} F_{2k}^0(x)^{s_2})\, dx, \quad s_1, s_2 \ge 1, \quad k = 1, 2.$$

Для них, очевидно, верны неравенства:

$$\varphi_k(s_1, s_2) \le \varphi_{1k}(s_1) + \varphi_{2k}(s_2), \quad k = 1, 2. \tag{5.13}$$

Кроме того, они являются неубывающими и вогнутыми по векторам $s = (s_1, s_2)$ (что следует из монотонности и выпуклости экспоненты).

Обозначим $\mu_k^{(\lambda)} = \mathbf{E}\tilde{Z}_k^{(\lambda)}$, $k = 1, 2$. Очевидно, $\mu_1^{(\lambda)}, \mu_2^{(\lambda)} \ge 1$.

Лемма 5.2.1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *верны неравенства* $\mu_k^{(\lambda)} \le \varphi_k(\lambda^{1+\varepsilon}, \lambda^{1+\varepsilon})$, $k = 1, 2$, *при всех достаточно больших* λ.

Доказательство. В силу определения и свойств φ_k имеем

$$\mu_k^{(\lambda)} = \mathbf{E}\varphi_k(\lambda\tilde{Z}_1^{(\lambda)}, \lambda\tilde{Z}_2^{(\lambda)}) \le \varphi_k(\lambda\mu_1^{(\lambda)}, \lambda\mu_2^{(\lambda)}) \le \varphi_{1k}(\lambda\mu_1^{(\lambda)}) + \varphi_{2k}(\lambda\mu_2^{(\lambda)}). \tag{5.14}$$

Поскольку φ_{kl} медленно меняются, то для любого $\delta > 0$ существуют константы C_{kl} такие, что $\varphi_{kl}(s) \le C_{kl}s^\delta$, $s \ge 1$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(\lambda)} &\le C_{11}(\lambda\mu_1^{(\lambda)})^\delta + C_{21}(\lambda\mu_2^{(\lambda)})^\delta \\ \mu_2^{(\lambda)} &\le C_{12}(\lambda\mu_1^{(\lambda)})^\delta + C_{22}(\lambda\mu_2^{(\lambda)})^\delta \end{aligned} \tag{5.15}$$

Обозначим $\mu_0^{(\lambda)} = \max\{\mu_1^{(\lambda)}, \mu_2^{(\lambda)}\}$, $C_0 = \max\{C_{11}+C_{21}, C_{12}+C_{22}\}$. Тогда из (5.15) получаем

$$\mu_0^{(\lambda)} \le C_0(\lambda\mu_0^{(\lambda)})^\delta,$$

откуда следует $\mu_0^{(\lambda)} \le (C_0\lambda^\delta)^{1/(1-\delta)}$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ верно $\mu_1^{(\lambda)} \le \lambda^\varepsilon$, $\mu_2^{(\lambda)} \le \lambda^\varepsilon$ при всех достаточно больших λ. Подставляя эти оценки в (5.14), получаем утверждение леммы. $\square$

Теорема 5.2.2. *Если для любого $\theta > 1$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$s\varphi_j(s^{1+\varepsilon}, s^{1+\varepsilon})\bar{F}^0_{jk}(\theta b_k(s)) \to 0, \quad s \to \infty, \quad j,k = 1,2, \tag{5.16}$$

то при $\lambda \to \infty$ верно

$$\tilde{Z}_k^{(\lambda)}/b_k(\lambda) \xrightarrow{P} 1, \quad k = 1,2.$$

Доказательство. Пусть $\theta > 1$, а $\varepsilon > 0$ из условий (5.16). Тогда при всех достаточно больших λ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\tilde{Z}_k^{(\lambda)} > \theta b_k(\lambda)) = 1 - \mathbf{E}\left(F^0_{1k}(\theta b_k(\lambda))^{\tilde{Z}_1^{(\lambda)}} F^0_{2k}(\theta b_k(\lambda))^{\tilde{Z}_2^{(\lambda)}}\right) \le \\
&\le \mu_1^{(\lambda)}\bar{F}^{(\lambda)}_{1k}(\theta b_k(\lambda)) + \mu_2^{(\lambda)}\bar{F}^{(\lambda)}_{2k}(\theta b_k(\lambda)) \le \\
&\le \lambda\mu_1^{(\lambda)}\bar{F}^0_{1k}(\theta b_k(\lambda)) + \lambda\mu_2^{(\lambda)}\bar{F}^0_{2k}(\theta b_k(\lambda)) \le \\
&\le \lambda\varphi_1(\lambda^{1+\varepsilon}, \lambda^{1+\varepsilon})\bar{F}^0_{1k}(\theta b_k(\lambda)) + \lambda\varphi_2(\lambda^{1+\varepsilon}, \lambda^{1+\varepsilon})\bar{F}^0_{2k}(\theta b_k(\lambda)),
\end{aligned}$$

откуда переходя к пределу при $\lambda \to \infty$ получаем $\mathbf{P}(\tilde{Z}_k^{(\lambda)} > \theta b_k(\lambda)) \to 0$ в силу (5.16).

Пусть теперь $0 < \theta < 1$. Поскольку функции F^0_{kl} принадлежат области притяжения экстремального типа Гумбеля, то для них верно $F^0_{jk}(\theta b_k(s))^s \to 0$, $s \to \infty$. Заметим, что $\tilde{Z}_1^{(\lambda)}, \tilde{Z}_2^{(\lambda)} \ge 1$ п.н. Получаем

$$\mathbf{P}(\tilde{Z}_k^{(\lambda)} \le \theta b_k(\lambda)) \le (F^0_{1k}(\theta b_k(\lambda))F^0_{2k}(\theta b_k(\lambda)))^\lambda \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано. $\square$

Заметим, что вместо условия (5.16) можно использовать более простое условие

$$s(b_1(s^{1+\varepsilon}) + b_2(s^{1+\varepsilon}))\bar{F}^0_{jk}(\theta b_k(s)) \to 0, \quad s \to \infty, \quad j,k = 1,2, \tag{5.17}$$

из которого следует (5.16) в силу свойств φ_k и φ_{kl}.

Следствие 5.2.3. *Если задана функция $b(s)$ такая, что $b_1(s)/b(s) \to p_1$, $b_2(s)/b(s) \to p_2$, $s \to \infty$, $p_1, p_2 \ge 0$, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi(v(\lambda b(\lambda), x)) = H_1^{p_1}(x)H_2^{p_2}(x).$$

Доказательство. Имеем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi(v(\lambda b(\lambda),x)) = \lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{E}\left(F_1^0(v(\lambda b(\lambda),x))^{\lambda\tilde{Z}_1^{(\lambda)}}F_2^0(v(b(\lambda),x))^{\lambda\tilde{Z}_2^{(\lambda)}}\right) =$$
$$= \lim_{\lambda\to\infty}\left(F_1^0(v(\lambda b(\lambda),x))^{\lambda b_1(\lambda)}F_2^0(v(\lambda b(\lambda),x))^{\lambda b_2(\lambda)}\right) = H_1^{p_1}(x)H_2^{p_2}(x).$$

□

Пример 5.2.6. Пусть

$$F_1^0(x_1,x_2) = (1-e^{-x_1})^2(1-e^{-x_2/3}), \quad F_2^0(x_1,x_2) = (1-e^{-x_1})(1-e^{-x_2/3})^2,$$

тогда в (5.11) можно взять $a_1(s) = a_2(s) = 1$, $b_1(s) = \ln s$, $b_2(s) = 3\ln s$. Имеем

$$\lim_{s\to\infty}F_1^0(x_1+\ln s, x_2+3\ln s)^s = \exp\{-(2e^{-x_1}+e^{-x_2/3})\},$$
$$\lim_{s\to\infty}F_2^0(x_2+\ln s, x_2+3\ln s)^s = \exp\{-(e^{-x_1}+2e^{-x_2/3})\}.$$

Легко проверить, что условие (5.17) выполняется. Полагая $b(s) = \ln s$, получаем $p_1 = 1$, $p_2 = 3$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi(x_1+\ln(\lambda\ln\lambda), x_2+3\ln(\lambda\ln\lambda)) = H_1(x)H_2^3(x) = \exp\{-(5e^{-x_1}+7e^{-x_2/3})\}.$$

Таким образом, при соответствующей линейной нормировке получаем двумерное распределение Гумбеля с независимыми компонентами.

5.3 Процессы с копулами экстремальных значений

Напомним, что МВП с d типами частиц может быть определен как цепь Маркова $\{Z(n)\}$, $Z(n) = (Z_1(n),\ldots,Z_d(n))$, $n\ge 0$, с переходными вероятностями

$$\mathbf{P}(Z_1(n)\le y_1,\ldots,Z_d(n)\le y_d|Z_1(n-1)=x_1,\ldots,Z_d(n-1)=x_d) =$$
$$= F_1^{x_1}(y_1,\ldots,y_d)\ldots F_d^{x_d}(y_1,\ldots,y_d), \quad x_k,y_k\in\mathbf{R}_+. \tag{5.18}$$

где многомерные распределения F_k имеют носители $T_k\subset\mathbf{R}_+^d$, $1\le k\le d$.

Распределение F_k, $1\le k\le d$, в целочисленном случае имеет смысл совместного распределения численностей потомков каждого типа от частицы k-го типа. Мы говорим о таких численностях и в общем случае, понимая, что они могут принимать не только целые, но и любые неотрицательные значения.

Как было отмечено в разделе 5.1, при использовании формулы (5.18) возникает проблема с возведением многомерной функции распределения в произвольную положительную степень. Дело в том, что результат этой операции не обязательно является снова функцией распределения. Решить указанную проблему можно либо накладывая дополнительные ограничения (как это сделано в разделах 5.1 и 5.2), либо рассматривая функции распределения, любая положительная степень которых остается таковой, называемые максимум-безгранично делимыми [20, 93, 143].

Аналогичный подход был использован М.Иржиной в [23, 120] при переходе от целочисленных ветвящихся процессов к процессам с непрерывным множеством состояний на основе безгранично делимых распределений.

Важным классом, изучаемым в теории копул (см. с. 73), являются максимум-устойчивые копулы (копулы экстремальных значений) [134, §3.3.4], [130, §7.5], которые удовлетворяют условию:

$$C^s(u_1, \dots, u_d) = C(u_1^s, \dots u_d^s), \quad \forall s > 0. \tag{5.19}$$

Таким образом, если функция распределения G имеет копулу экстремальных значений C, то верно

$$G^s(x_1, \dots, x_d) = C(G_1^s(x_1), \dots, G_d^s(x_d)), \quad \forall s > 0, \tag{5.20}$$

так что G^s тоже является функцией распределения, т.е. распределение оказывается максимум-безгранично делимым.

В качестве нетривиального примера можно указать копулу Гумбеля

$$C(u_1, \dots, u_d) = \exp\{-((-\ln u_1)^\theta + \dots + (-\ln u_d)^\theta)^{1/\theta}\}, \quad \theta \geq 1.$$

Замечание 5.3.1. Условие (5.19) не является необходимым для максимум-безграничной делимости G. Например, в случае (не максимум-устойчивой) копулы Клейтона

$$C(u_1, \dots u_d) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - d + 1)^{-1/\theta}, \quad \theta > 0,$$

функция G^s также является функцией распределения с копулой Клейтона, но уже с параметром θs.

Однако нам будет удобнее иметь дело с копулами экстремальных значений в силу соотношения (5.20).

Далее будут доказаны свойства 5.3.1–5.3.3 и эргодическая теорема 5.3.1 в случае $d > 2$. Эти результаты обобщают ранее полученные в разделе 4.1 для МВП с одним типом частиц. Теорема 5.3.2 обобщает теорему 4.2.3.1 (для степенных семейств распределений числа потомков с тяжелыми хвостами) на многомерный случай.

Предположим, что все функции F_k имеют копулы экстремальных значений C_k, $1 \leq k \leq d$. Тогда у нас нет проблем с определением процесса по формуле (5.18). Более того, из (5.18) и (5.20) получаем его конструктивное представление стохастически рекуррентной формулой:

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^{d} F_{jk}^{-1}\left(U_{j,k,n}^{1/Z_j(n-1)}\right), \tag{5.21}$$

где случайные вектора $(U_{j,1,n}, \dots, U_{j,d,n})$, $n \geq 1$, независимы и имеют функции распределения C_j, $1 \leq j \leq d$.

Из (5.18) для введенного класса процессов получаем следующее свойство.

Свойство 5.3.1. *Если процесс $Z(n) = (Z_1(n), \dots, Z_d(n))$ является МВП с копулами экстремальных значений, то для любого набора чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_d > 0$ процесс $Z^*(n) = (\lambda_1 Z_1(n), \dots, \lambda_d Z_d(n))$ также является МВП с функциями распределения численностей потомков*

$$F_k^*(y_1, \dots, y_d) = F(y_1/\lambda_1, \dots, y_d/\lambda_d)^{1/\lambda_k}, \quad 1 \leq k \leq d,$$

имеющими те же копулы, что и F_k, $1 \leq k \leq d$.

Кроме того, можно получить свойство (положительной) ассоциированности [5, 109].

Свойство 5.3.2. *Если случайные величины $Z_k(0)$ ассоциированы, то и все $Z_k(n)$, $1 \leq k \leq d$, $n \geq 1$, ассоциированы.*

Доказательство. Как показано в [129], компоненты максимум-устойчивого случайного вектора ассоциированы. Это верно и для компонент копулы экстремальных значений, как для неубывающих функций (частных распределений) от компонент такого вектора. В силу (5.21) все $Z_k(n)$, $1 \leq k \leq d$, $n \geq 1$, являются неубывающими функциями от ассоциированных и независимых случайных величин, так что по [5, теорема 1.8] они ассоциированы.

В разделе 4.1 были доказаны свойства монотонности МВП с одним типом частиц по распределению числа потомков (относительно некоторого стохастического порядка).

Для одномерных функций распределения полагали $G_1 \prec G_2$, если $\bar{G}_1(x) \leq \bar{G}_2(x)$ для всех x. Заметим, что при этом также $G_1^{-1}(u) \leq G_2^{-1}(u)$, $u \in (0, 1)$.

Для многомерных функций распределения обобщим отношение стохастического порядка следующим образом: $G_1 \prec G_2$, если на одном вероятностном пространстве можно построить случайный вектор ξ_1 с распределением G_1 и случайный вектор ξ_2 с распределением G_2 так, что $\xi_1 \le \xi_2$ почти наверное (п.н.). Такое отношение и эквивалентные ему рассматривались, например, в [55]. Заметим, что из данного отношения между многомерными распределениями следуют соответствующие отношения между всеми их частными распределениями (покомпонентно). Если у многомерных распределений одинаковые копулы, то верно и обратное.

Обозначим распределение вектора $Z(n)$ через Ψ_n, а его стационарное предельное распределение (если оно существует) через Ψ.

Свойство 5.3.3. *Если заданы два МВП с одинаковыми наборами копул экстремальных значений и* $\Psi'_0 \prec \Psi''_0$, $F'_{kl} \prec F''_{kl}$ *для всех* $1 \le k, l \le d$, *то* $\Psi'_n \prec \Psi''_n$ *для всех* $n \ge 1$, *и если процессы имеют стационарные предельные распределения, то* $\Psi' \prec \Psi''$.

Доказательство. Построим $Z'(0)$ и $Z''(0)$ на одном вероятностном пространстве так, что $Z'(0) \le Z''(0)$ п.н. Далее на том же пространстве строим оба процесса пространстве по рекуррентным формулам:

$$Z'_k(n) = \bigvee_{j=1}^{d} (F'_{jk})^{-1}\left(U_{j,k,n}^{1/Z'_j(n-1)}\right), \quad Z''_k(n) = \bigvee_{j=1}^{d} (F''_{jk})^{-1}\left(U_{j,k,n}^{1/Z''_j(n-1)}\right), \tag{5.22}$$

где случайные вектора $(U_{j,1,n}, \ldots, U_{j,d,n})$, $n \ge 1$, независимы и имеют функции распределения C_j, $1 \le j \le d$.

Поскольку $(F'_{jk})^{-1}(u) \le (F''_{jk})^{-1}(u)$, $u \in (0,1)$ для всех $1 \le j, k \le d$, то из (5.22) получаем по индукции $Z'(n) \le Z''(n)$ п.н. и $\Psi'_n \prec \Psi''_n$ для всех $n \ge 1$. Соотношение между стационарными распределениями получаем в пределе при $n \to \infty$. □

В разделе 5.1 была доказана эргодическая теорема для МВП с двумя типами частиц при дополнительных предположениях (5.5)

$$\min\{\inf T_1^*, \inf T_2^*\} \ge x_0 > 0,$$

и (5.6)

$$F_1^{x_0}(y_1, y_2), F_2^{x_0}(y_1, y_2) - \text{функции распределения}.$$

Для МВП с копулами экстремальных значений предположения типа (5.6) заведомо выполняются, а предположение (5.5) обобщим:

$$\bigwedge_{k=1}^{d} \inf T_k^* \geq x_0 > 0. \tag{5.23}$$

Тем самым мы автоматически исключаем возможность вырождения процесса (его обращения в нуль или сходимости к нулю), а также чередование типов (когда в одном поколении присутствуют частицы только одного типа, в следующем — другого и т.д.) и другие особенности поведения.

В разделе 4.1 были введены множества $T_k^* = \bigcup_{j=1}^d T_{j,k}$ и $T_k^{(s)}$ — носители распределений, заданных функциями распределения F_k^s. Предполагалось, что $T_k^{(s)} = T_k$ при всех $s \in T_k^* \cup \{x_0\}$. Заметим, что для максимум-безгранично делимых распределений это равенство верно даже при всех $s > 0$.

Докажем это с помощью следующей леммы, представляющей самостоятельный интерес.

Лемма 5.3.1. *Пусть F — функция распределения в R^d, $d \geq 2$, тогда все функции F^s, $s > d-1$, являются функциями распределения с одинаковым носителем.*

Доказательство. Понятно, что любая функция F^s обладает необходимыми свойствами сходимости к 0 и 1 на бесконечности, и требуется проверить лишь так называемое "неравенство прямоугольника": вероятность попадания точки в любой параллелепипед $\Pi = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$ должна быть неотрицательна.

Расмотрим сначала случай абсолютно непрерывного распределения. Тогда неравенство прямоугольника будет следовать из неотрицательности формальной плотности

$$p_s(y_1, \ldots, y_d) = \frac{\partial^d (F^s(y_1, \ldots, y_d))}{\partial y_1 \ldots \partial y_d}.$$

Заметим, что $p_s(y)$ представляет собой сумму произведений, включающих производные степенной функции u^s, взятые от $F(y)$, и частные производные F, от 1-го до d-го порядка (и те, и другие). Все они неотрицательны при $s > d-1$, поэтому F^s являются функциями распределения. Кроме того, для любой точки y каждое слагаемое либо остается положительным, либо тождественно равно нулю при всех $s > d-1$. Отсюда следует, что F^s имеют одинаковые носители.

В общем случае, для любого параллелепипеда Π можно построить абсолютно непрерывное распределение $\tilde{F}$, для которого функция распределения совпадает с F в вершинах П. Тогда в них будут совпадать также $\tilde{F}^s$ и F^s. В силу одинаковости носителей распределений $\tilde{F}^s$ при всех $s > d-1$, вероятности попадания в П при всех этих распределениях либо положительны, либо равны нулю, и совпадают с соответствующими вероятностями для F^s. Следовательно, носители распределений F^s также одинаковы при всех $s > d-1$. $\square$

Следствие 5.3.1. *Если F — функция максимум-безгранично делимого распределения в R^d, $d \geq 2$, то все F^s, $s > 0$, имеют одинаковый носитель.*

Доказательство. Возьмем любые $0 < s_1 < s_2$. В силу максимум-безграничной делимости $G = F^{s_1/d}$ является функцией распределения. Тогда получаем $F^{s_1} = G^d$, $F^{s_2} = G^{ds_2/s_1}$, т.е. функцию распределения G в степенях, больших $d-1$. По лемме 5.3.1 их носители совпадают. $\square$

Далее докажем эргодическую теорему в случае $d \geq 2$ типов частиц.

За множество состояний цепи Маркова $Z(n)$ можно принять

$$S = \left\{ \bigvee_{k=1}^{d} x^{(k)} : x^{(k)} \in T_k, 1 \leq k \leq d \right\},$$

поскольку при любом $Z(0) \in \mathbf{R}_+^d \backslash \{0\}$ получаем $Z(n) \in S$ для всех $n \geq 2$ п.н. Множество S является носителем условного распределения $Z(n)$ при условии $Z(n-1) = x$ для любого $x \in (0, +\infty)^d$.

Будем предполагать, что S состоит более чем из одной точки (в противном случае стационарное распределение сосредоточено в этой точке и эргодичность тривиальна).

Обозначим $x^0 = (x_0, \ldots, x_0)$. Предположим также, что существует точка $a = (a_1, \ldots, a_d)$ такая, что для множеств $A = [a_1, +\infty) \times \cdots \times [a_d, +\infty)$ и $A^* = (0, a_1] \times \cdots \times (0, a_d]$ верно

$$\mathbf{P}(Z(n) \in A | Z(n-1) = x^0) > 0, \quad \mathbf{P}(Z(n) \in A^* | Z(n-1) = x^0) > 0. \tag{5.24}$$

Введем норму в $\mathbf{R}^d$: $\|(x_1, \ldots, x_d)\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$.

Для случайных векторов $\xi^{(k)}$ с распределениями F_k определим характеристики

$$\rho_k = \limsup_{u \to \infty} u \mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| > u), \quad 1 \leq k \leq d.$$

Теорема 5.3.1. *Если выполнены условия* (5.23), (5.24) *и* $\sum_{k=1}^d \rho_k < e^{-\gamma}$, *то процесс* $Z(n)$ *эргодический.*

Доказательство. Рассмотрим функцию распределения

$$G(u) = \prod_{k=1}^{d} \mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| \le u) = \prod_{k=1}^{d} F_k(u, \dots, u),$$

тогда для $\rho = \limsup_{u\to\infty} u\bar{G}(u)$ верно $\rho \le \sum_{k=1}^{d} \rho_k < e^{-\gamma}$. Значит, для некоторого $0 < \tau < e^{-\gamma}$ существует такое $M > \|a\|$, что $G(u) \ge e^{-\tau/u}$ при всех $u \ge M$. Из формулы (5.18) получаем:

$$\mathbf{P}(\|Z(n)\| \le u | Z(n-1) = x) = \prod_{k=1}^{d} F_k^{x_k}(u, \dots, u) \ge G^{\|x\|}(u).$$

Введем пробную функцию Ляпунова $g(x) = \max\{\ln(\|x\|/M), 0\}$ и обозначим $\mu(x) = \mathbf{E}(g(Z(n))|Z(n-1) = x) - g(x)$, тогда

$$\begin{aligned}
&\mu(x) \le \int_0^{+\infty} (1 - G^{Me^{g(x)}}(Me^v))\, dv - g(x) \le \\
&\le \int_0^{+\infty} (1 - \exp\{-\tau e^{g(x)} e^{-v}\})\, dv - g(x) = \\
&= \gamma + \ln\tau - \mathrm{Ei}(-\tau e^{g(x)}),
\end{aligned}$$

где через Ei обозначена интегральная показательная функция

$$\mathrm{Ei}(y) = -\int_{-y}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt, \quad y < 0,$$

причем $\mathrm{Ei}(y) \to 0$, $y \to -\infty$. Поскольку $\gamma + \ln\tau < 0$, это означает, что существуют такие числа $\varepsilon > 0$, $N \ge M$, что $\mu(x) < -\varepsilon$ при $\|x\| > N$. При $\|x\| \le N$ величина $\mathbf{E}(g(Z(n))|Z(n-1) = x)$ ограничена. Таким образом, условия Ляпунова [3, §4.2] выполнены.

Проверим условие перемешивания [3, §2]. Обозначим

$$\delta = \prod_{k=1}^{d} F_k(a_1, \dots, a_d) > 0.$$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_d) \in V = [x_0, N]^d \cap S$. Введем вектор ζ', распределенный как $Z(n)$ при условии $Z(n-1) = x^0$, и вектор ζ'', распределенный как $Z(n)$ при условии $Z(n-1) = x - x^0$ (предполагая сначала, что $x \ne x^0$), причем ζ' и ζ'' независимы. Тогда их максимум $\zeta' \vee \zeta''$ распределен как $Z(n)$ при условии $Z(n-1) = x$. Для любого борелевского множества $B \subset S$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(Z(n) \in B | Z(n-1) = x) = \mathbf{P}(\zeta' \vee \zeta'' \in B) \ge \mathbf{P}(\zeta' \vee \zeta'' \in B \cap A) \ge \\
&\ge \mathbf{P}(\zeta' \in B \cap A, \zeta'' \in A^*) = \mathbf{P}(\zeta' \in B \cap A)\mathbf{P}(\zeta'' \in A^*) \ge \mathbf{P}(\zeta' \in B \cap A)\delta^N.
\end{aligned}$$

При $x = x^0$ это неравенство тривиально.

Определим вероятностную меру на множестве S:

$$\varphi(B) = \mathbf{P}(\zeta' \in B | \zeta' \in A)$$

и число $0 < p < \mathbf{P}(\zeta' \in A)\delta^N$, тогда

$$\mathbf{P}(Z(n) \in B | Z(n-1) = x) > p\varphi(B).$$

Кроме того, в силу сделанных предположений цепь Маркова $Z(n)$ является неприводимой и апериодичной (из любого состояния можно попасть в V за один шаг).

Из проверенных условий следует эргодичность процесса $Z(n)$ [3, §2]. $\square$

Следствие 5.3.2. *Если выполнены условия* (5.23), (5.24) *и* $\mathbf{E}\|\xi^{(k)}\| < \infty$ *для всех* $1 \le k \le d$, *то процесс* $Z(n)$ *эргодический.*

Утверждение следует из асимптотики $\mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| > u) = o(1/u)$, $u \to \infty$, $k = 1, 2$.

Замечание 5.3.2. Поскольку в доказательстве теоремы не используется наличие копул экстремальных значений, она остается верной для любых максимум-безгранично делимых распределений численностей потомков при тех же предположениях.

В разделе 5.1 приведен пример 5.1.2, когда F_k, $1 \le k \le d$, представляют собой многомерные максимум-устойчивые распределения (распределения экстремальных значений) [130, §7.5], [9, §5.2]. Поскольку все происходит в $\mathbf{R}_+^d$, то из трех экстремальных типов это могут быть только многомерные распределения Фреше (которые предполагаем невырожденными по всем компонентам). Тогда частные функции распределения F_{kl} имеют вид

$$F_{kl}(y) = \begin{cases} \exp\{-c_{kl}(y - b_{kl})^{-\alpha_k}\}, & y > b_{kl} \\ 0, & y \le b_{kl} \end{cases}, \quad \alpha_k, c_{kl} > 0, \quad b_{kl} \ge 0,$$

а копулы C_k являются копулами экстремальных значений.

Для многомерных распределений Фреше получаем следующие соотношения:

$$F_k^x(y_1, \ldots, y_d) = F_k(x^{-1/\alpha_k}(y_1 - b_{k1}) + b_{k1}, \ldots, x^{-1/\alpha_k}(y_d - b_{kd}) + b_{kd}), \forall x > 0.$$

Отсюда следует, что МВП может быть задан рекуррентной формулой:

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^{d} \left(Z_j^{1/\alpha_j}(n)(\xi_k^{(j)}(n) - b_{jk}) + b_{jk} \right), \tag{5.25}$$

где случайные вектора $\xi^{(j)}(n) = (\xi_1^{(j)}(n), \ldots, \xi_d^{(j)}(n))$, $n \geq 1$, независимы и имеют распределения F_j, $1 \leq j \leq d$.

Рассмотрим, как теорема 5.3.1 может быть применена для исследования эргодичности процессов с численностями потомков, имеющими многомерные распределения Фреше.

Прежде всего, условие (5.23) эквивалентно тому, что все $b_{kl} > 0$.

Найдем асимптотику вероятности, пользуясь свойством (5.19):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| > u) = 1 - F_k(u, \ldots u) = \\
&= 1 - C_k(\exp\{-c_{k1}(u - b_{k1})^{-\alpha_k}\}, \ldots, \exp\{-c_{kd}(u - b_{kd})^{-\alpha_k}\}) = \\
&= 1 - \exp\{u^{-\alpha_k} \ln C_k(\exp\{-c_{k1}(1 - b_{k1}/u)^{-\alpha_k}\}, \ldots, \\
&\exp\{-c_{kd}(1 - b_{kd}/u)^{-\alpha_k}\})\} \sim \\
&\sim -\ln C_k(e^{-c_{k1}}, \ldots, e^{-c_{kd}})u^{-\alpha_k}, \quad u \to \infty.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\rho_k = \begin{cases} +\infty, & 0 < \alpha_k < 1, \\ -\ln C_k(e^{-c_{k1}}, \ldots, e^{-c_{kd}}), & \alpha_k = 1, \\ 0, & \alpha_k > 1. \end{cases} \tag{5.26}$$

Таким образом, по формуле (5.26) можно вычислить характеристики для проверки условия теоремы 5.3.1. В частности, если все $\alpha_k > 1$, то процесс оказывается эргодическим. Если есть $0 < \alpha_k < 1$, то условие теоремы заведомо не выполняется.

В следующих трех примерах полагаем $\alpha_k = 1$.

Пример 5.3.1. Пусть $C_k(u_1, \ldots, u_d) = u_1 \ldots u_d$ (копула независимости). Тогда $\rho_k = \sum_{l=1}^d c_{kl}$.

Пример 5.3.2. Пусть $C_k(u_1, \ldots, u_d) = \min\{u_1, \ldots, u_d\}$ (копула комонотонности). Тогда $\rho_k = \bigvee_{l=1}^d c_{kl}$.

Пример 5.3.3. Пусть

$$C_k(u_1, \ldots, u_d) = \exp\{-((-\ln u_1)^\theta + \cdots + (-\ln u_d)^\theta)^{1/\theta}\}, \quad \theta \geq 1$$

(копула Гумбеля). Тогда

$$\rho_k = \left(\sum_{l=1}^d c_{kl}^\theta \right)^{1/\theta}.$$

В силу максимум-устойчивости многомерного распределения Фреше можно установить некоторое соотношение для стационарных распределений процесса при различных значениях параметров.

Напомним обозначение

$$\Phi_{\alpha,b,c}(y) = \begin{cases} \exp\{-c(y-b)^{-\alpha}\}, & y > b; \\ 0, & y \le b, \end{cases}$$

где $\alpha, c > 0$, $b \ge 0$. Из определения следует

$$\Phi^r_{\alpha,b,c}(sy) \equiv \Phi_{\alpha,b/s,cr/s^\alpha}(y), \quad r, s > 0. \tag{5.27}$$

Обозначим через $\Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}),(c_{kl})}$ стационарное распределение МВП с указанными наборами значений параметров (которые мы можем менять) и фиксированными копулами экстремальных значений. Если в каком-то из наборов значения одинаковы, пишем одно это значение, например: $\Psi_{(\alpha),(b_{kl}),(c_{kl})}$, если все $\alpha_k = \alpha$.

Утверждение 5.3.1. *Для любого набора чисел $a_1, \ldots, a_d > 0$ верно*

$$\Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}/a_l),(c_{kl}a_k/a_l^{\alpha_k})}(x_1, \ldots x_d) \equiv \Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}),(c_{kl})}(a_1x_1, \ldots a_dx_d), \quad x \in \mathbf{R}^d_+.$$

Доказательство. Пусть $Z(n)$ — МВП с параметрами α_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, $1 \le k, l \le d$. Рассмотрим процесс $Z^*(n) = (Z_1(n)/a_1, \ldots Z_d(n)/a_d)$. Его стационарное распределение есть $\Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}),(c_{kl})}(a_1x_1, \ldots a_dx_d)$. С другой стороны, согласно свойству 5.3.1, Z^* является МВП с функциями распределения численностей потомков $F^*_k(x_1, \ldots x_d) = F^{a_k}_k(a_1x_1, \ldots a_dx_d)$ и теми же копулами. С помощью (5.27) получаем

$$\begin{aligned} &F^*_k(x_1, \ldots x_d) = F^{a_k}_k(a_1x_1, \ldots a_dx_d) = \\ &= C^{a_k}_k(\Phi_{\alpha_k,b_{k1},c_{k1}}(a_1x_1), \ldots, \Phi_{\alpha_k,b_{kd},c_{kd}}(a_dx_d)) = \\ &= C_k(\Phi^{a_k}_{\alpha_k,b_{k1},c_{k1}}(a_1x_1), \ldots, \Phi^{a_k}_{\alpha_k,b_{kd},c_{kd}}(a_dx_d)) = \\ &= C_k(\Phi_{\alpha_k,b_{k1}/a_1,c_{k1}a_k/a_1^{\alpha_k}}(x_1), \ldots, \Phi_{\alpha_k,b_{k1}/a_d,c_{k1}a_k/a_d^{\alpha_k}}(x_d)), \end{aligned}$$

так что $Z^*(n)$ имеет стационарное распределение $\Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}/a_l),(c_{kl}a_k/a_l^{\alpha_k})}$. □

Следствие 5.3.3. *Для любого $a > 0$ верно*

$$\Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}/a),(c_{kl}/a^{\alpha_k-1})}(x) \equiv \Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}),(c_{kl})}(ax).$$

Рассмотрим теперь отдельно особый случай, когда все $b_{kl} = 0$. В этом случае условие (5.23) нарушается и возникает возможность сходимости процесса к нулю по вероятности, т.е. асимптотического вырождения. Чтобы избежать этого, исключим ноль из S и исследуем на эргодичность процесс $W(n) = (W_1(n), \ldots, W_d(n))$, где $W_k(n) = \ln Z_k(n)$.

Утверждение 5.3.2. *Если все $b_{kl} = 0$ и все $\alpha_k > 1$, то процесс $W(n)$ эргодический.*

Доказательство. Обозначим $\alpha = \min \alpha_k > 1$. Из формулы (5.25) получаем:

$$W_k(n) = \bigvee_{j=1}^{d} \left(\frac{W_j(n-1)}{\alpha_j} + \eta_k^{(j)}(n) \right),$$

где $\eta_k^{(j)}(n) = \ln \xi_k^{(j)}(n)$. Тогда

$$|W_k(n)| \le \bigvee_{j=1}^{d} \frac{|W_j(n-1)|}{\alpha_j} + \bigvee_{j=1}^{d} |\eta_k^{(j)}(n)|,$$

откуда

$$\|W(n)\| \le \frac{\|W(n-1)\|}{\alpha} + \eta(n), \quad \eta(n) = \bigvee_{j=1}^{d} \|\eta^{(j)}(n)\|, \tag{5.28}$$

где $\eta(n)$ независимы и одинаково распределены, $\mathbf{E}\eta(n) < \infty$.

Введем пробную функцию Ляпунова $g(x) = \|x\|$ и $\mu(x) = \mathbf{E}(g(W(n))|W(n-1) = x) - g(x)$, тогда из (5.28) следует, что существуют такие числа $\varepsilon > 0$, $N > 0$, что $\mu(x) < -\varepsilon$ при $\|x\| > N$. При $\|x\| \le N$ величина $\mathbf{E}(g(W(n))|W(n-1) = x)$ ограничена. Таким образом, условия Ляпунова [3, §4.2] выполнены.

Условие перемешивания [3, §2] можно проверить так же, как в доказательстве теоремы 5.3.1, для исходного процесса $Z(n)$, полагая $V = [e^{-N}, e^{N}] \cap S$.

Из эргодичности $W(n)$ следует эргодичность $Z(n)$ на $S \backslash \{0\}$. $\square$

Пример 5.3.4. Пусть для двумерного процесса $Z(n)$ численности потомков имеют распределения Фреше с независимыми компонентами и параметрами $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$, $c_{11} = c_{22} = 2$, $c_{12} = c_{21} = 1$, $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0$. На рис. 5.5 представлен результат моделирования $Z(n)$ за 500 шагов с начальным условием $Z(0) = (1, 1)$.

Рассмотрим семейство процессов $\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ с фиксированным набором копул экстремальных значений и $F_{kl}^{(\lambda)}(y) = F_{kl}^{\lambda}(y)$, $\lambda > 0$, причем F_{kl} имеют степенные хвосты. Обозначим стационарные распределения этих процессов (если они существуют) через $\Psi^{(\lambda)}$. Нас будет интересовать асимптотическое поведение $\Psi^{(\lambda)}$ при $\lambda \to \infty$. Этот вопрос для процессов с одним типом частиц изучался в разделе 4.2.3.

Теорема 5.3.2. *Если процессы $Z^{(\lambda)}(n)$ эргодические при всех достаточно больших λ, и существуют такие числа $\alpha > 1$, $v > 0$, $c_{kl} > 0$,*

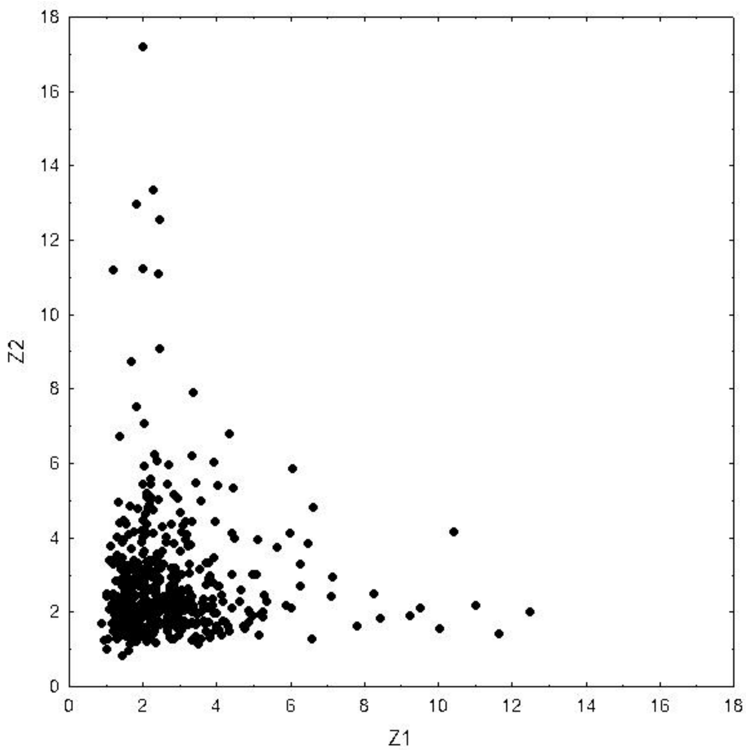

Рис. 5.5: моделирование к примеру 5.3.4

что $F_{kl} \succ \Phi_{\alpha,0,v}$ *и* $\bar{F}_{kl}(y) \sim c_{kl} y^{-\alpha}$, $y \to \infty$, *то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi^{(\lambda)}(x\lambda^{1/(\alpha-1)}) = \Psi_{(\alpha),(0),(c_{kl})}(x), \quad x \in \mathbf{R}_+^d. \tag{5.29}$$

Доказательство. Обозначим $\mu = \lambda^{1/(\alpha-1)}$, тогда $\lambda\mu = \mu^\alpha$. Перейдем к процессам $\hat{Z}^{(\lambda)}(n) = Z^{(\lambda)}(n)/\mu$, в этом случае $\hat{\Psi}^{(\lambda)}(x) = \Psi^{(\lambda)}(\mu x)$ и требуется доказать, что $\hat{\Psi}^{(\lambda)} \to \Psi_{(\alpha),(0),(c_{kl})}$, $\lambda \to \infty$. Имеем

$$\hat{F}_{kl}^{(\lambda)}(y) = F_{kl}(\mu y)^{\mu^\alpha} \to \Phi_{\alpha,0,c_{kl}}(y), \quad \lambda \to \infty. \tag{5.30}$$

Кроме того, из условия $F_{kl} \succ \Phi_{\alpha,0,v}$ и равенства (5.27) получаем $\hat{F}_{kl}^{(\lambda)} \succ \Phi_{\alpha,0,v}$. С другой стороны, если $\bar{F}_{kl}(y) \sim c_{kl} y^{-\alpha}$, $y \to \infty$, то найдутся такие числа $b > 0$, $w > \max c_{kl}$, что все $F_{kl} \prec \Phi_{\alpha,b,w}$, откуда $\hat{F}_{kl}^{(\lambda)} \prec \Phi_{\alpha,b/\mu,w}$, что дает равномерную оценку $\hat{F}_{kl}^{(\lambda)} \prec \Phi_{\alpha,1,w}$ при всех $\lambda > b^{\alpha-1}$. Таким образом, по свойству 5.3.3, при всех достаточно больших λ имеет место отношение $\Psi_{(\alpha),(0),(v)} \prec \hat{\Psi}^{(\lambda)} \prec \Psi_{(\alpha),(1),(w)}$.

Семейство стационарных распределений $\{\hat{\Psi}^{(\lambda)}\}$ ограничено с двух сторон собственными распределениями на $S\backslash\{0\}$ и, следовательно, плотно в $S\backslash\{0\}$. По [3, теорема 10.1] из плотности этого семейства, сходимости переходных функций, порожденных частными функциями распределения

(5.30) при заданных копулах, и непрерывности предельной переходной функции следует слабая сходимость стационарных распределений, которую и требовалось доказать. □

Замечание 5.3.3. Если $F_{kl} = \Phi_{\alpha,0,c_{kl}}$, то предельное соотношение (5.29) обращается в тождество (в силу следствия 5.3.3).

Условию теоремы удовлетворяют, например, МВП с распределениями Парето

$$F_{kl}(y) = \begin{cases} 1 - (y/b_{kl})^{-\alpha}, & y > b_{kl}; \\ 0, & y \le b_{kl} \end{cases}$$

при $\alpha > 1$, $b_{kl} > 0$, поскольку $F_{kl}(y) \le \Phi_{\alpha,0,b_{kl}}(y)$ при всех $y > 0$. Также можно подобрать необходимую оценку для любого набора распределений со степенными хвостами (одинаковой степени) и положительными крайними левыми точками.

Заключение

В диссертации поставлен и решен ряд неклассических задач стохастической теории экстремумов. Основные итоги заключаются в следующем.

В главе 1 получено достаточное условие асимптотической эквивалентности максимумов в общей схеме максимумов сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с тяжелыми хвостами и продемонстрировано его применение к максимумам частичных сумм Эрдеша-Реньи, полей дробового шума и суммарных активностей в моделях информационных сетей. Для различных моделей получены достаточные условия в виде ограничений сверху на хвостовой индекс распределений слагаемых.

В главе 2 доказаны новые предельные теоремы об экстремумах признаков частиц в ветвящихся процессах при отказе от классических предположений. Для бессмертных надкритических процессов получен и исследован широкий класс предельных распределений максимумов признаков частиц. Для различных ветвящихся процессов изучено влияние зависимости признаков частиц, связанной с их родством, на асимптотическое поведение максимумов. В случае нескольких признаков получены многомерные предельные распределения и изучены их копулы.

В главе 3 введены понятия экстремальных индексов в схеме серий (двумя способами) для систем зависимых случайных величин, взятых в случайном количестве, изучены их свойства, взаимосвязи и связь с классическим экстремальным индексом. Вычислены индексы для суммарных активностей в моделях информационных сетей, признаков частиц в ветвящихся процессах, а также для моделей с копулами и пороговых моделей.

В главах 4 и 5 введены максимальные ветвящиеся процессы с одним и несколькими типами частиц (с произвольными неотрицательными значениями), представляющие собой экстремальные аналоги ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона и Иржины, доказаны эргодические и предельные теоремы для них, рассмотрены приложения в теории массового обслуживания.

Результаты и методы диссертации могут быть полезны в исследованиях сложных систем случайных величин, процессов и полей. Хотя диссертация носит в целом теоретический характер, в ней также уделено большое внимание возможным приложениям в информатике, биологии и массовом обслуживании.

Так, максимумы независимых растущих сумм случайных величин могут описывать время выполнения многофазной параллельной обработки информации на суперкомпьютерах с большим числом процессоров или при распределенных вычислениях. Общая схема максимумов сумм случайных величин может описывать поведение широкого класса объектов, включая некоторые случайные поля в природе, а также различные информационные сети (в том числе социальные), что делает решаемую задачу весьма актуальной.

Результаты об асимптотическом поведении максимумов признаков частиц в ветвящихся процессах могут иметь приложения в биологии, когда ветвящимся процессом описывается рост численности биологической популяции, а в качестве частиц рассматриваются живые организмы (люди, животные, растения). В случае живых организмов в качестве признаков речь может идти о размерах, весе и других характеристиках, например, удоях коров, яйценоскости кур, урожайности растений, чувствительности организмов к вредным и опасным факторам и др. Кроме того, в настоящее существуют полиморфные компьютерные вирусы, способные не только размножаться, но и изменять свой код (подобно мутациям живых организмов), а в качестве признаков могут рассматриваться какие-то характеристики кода вируса или его деятельности.

Новые экстремальные индексы в схеме серий, введенные автором, применимы к широкому классу систем случайных величин, взятых в случайном количестве. Тем самым обобщаются ранее известные индексы для стационарных случайных последовательностей и полей. С помощью введенных экстремальных индексов были интерпретированы предыдущие результаты для максимумов признаков частиц в ветвящихся процессах и максимумах активностей в информационных сетях, а также получены новые результаты для моделей с копулами и пороговых моделей. В общем случае копулы могут описывать зависимость в поведении компонент сложных систем, обусловленную их взаимодействием или влиянием общих внешних факторов. В технических системах износ или выход из строя одних деталей может сказываться на других деталях, а на все вместе может влиять общий режим эксплуатации (температура, влажность и т. п.). В финансах копулы используются для описания зависимости между колебаниями курсов различных акций и валют. Таким образом, автором сделан важный шаг в построении нового математического аппарата, имеющего теоретическое и прикладное значение для описания экстремального поведения различных систем.

Развитие теории максимальных ветвящихся процессов может быть полезно для моделирования вентильных бесконечнолинейных систем массового обслуживания (при обработке информации, в средствах связи и т.д.). Максимальные ветвящиеся процессы также представляют большой интерес с теоретической точки зрения, как экстремальные аналоги классических ветвящихся процессов.

Следует отметить, конечно, что применимость полученных автором результатов на практике нуждается в проверке сделанных теоретических предположений, на основе статистических данных, что выходит за рамки данной работы, однако может быть предметом дальнейших прикладных научных исследований.

Выполненная автором работа также открывает широкие перспективы для теоретических исследований.

Возможно дальнейшее уточнение результатов в схемах максимумов сумм случайных величин и их распространение на более широкий класс объектов, в том числе применительно к различным явлениям в природе, технике и обществе.

Большой интерес представляет изучение максимумов признаков частиц в более сложных моделях ветвящихся процессов и формирования признаков, в том числе, для нескольких признаков частицы. В современной теории вероятностей активно изучаются ветвящиеся процессы в случайной среде, ветвящиеся случайные блуждания и др. Поэтому в русле дальнейшего построения параллелей между теорией суммирования и теорией экстремумов можно изучать как максимумы признаков частиц в подобных процессах, так и новые экстремальные аналоги самих процессов.

Математический аппарат экстремальных индексов в схеме серий уже позволил автору открыть и изучить некоторые удивительные явления, не наблюдавшиеся в классической теории экстремальных индексов случайных последовательностей, и, по-видимому, сулит еще много новых. В частности, остается пока открытым вопрос о возможности существования точного экстремального индекса больше единицы. Кроме того, этот аппарат позволяет единым образом описать и упорядочить результаты, которые до этого выглядели разрозненными и не связанными между собой (в том числе, и других авторов).

Таким образом, настоящая диссертация представляет собой важный вклад в развитие стохастической теории экстремумов, ее результаты имеют как теоретическую, так и прикладную ценность, при этом она также открывает широкие перспективы дальнейших исследований по данной теме.

Список обозначений[1]

Универсальные обозначения

$\vee$ — максимум: $a \vee b = \max\{a, b\}$, $\vee_{i=1}^{n} a_i = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$.

$\wedge$ — минимум: $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $\wedge_{i=1}^{n} a_i = \min\{a_1, \ldots, a_n\}$.

$\xrightarrow{P}$ — сходимость случайных величин по вероятности.

$\xrightarrow{d}$ — сходимость случайных величин по распределению.

$\xrightarrow{w}$ — слабая сходимость функций распределения (в точках непрерывности).

$\le_d$ — отношение стохастического порядка для случайных величин: $X \le_d Y$, если $\mathbf{P}(X > u) \le \mathbf{P}(Y > u)$.

$\prec$ — отношение стохастического порядка для распределений, с. 143 (одномерный случай), с. 197 (многомерный случай).

$(\ldots)_+$ — положительная часть выражения, например, $x_+ = x \vee 0$.

$|A|$ — число элементов конечного множества A.

$\langle A \rangle$ — мера Лебега области $A \subset \mathbf{R}^d$.

$\mathbf{D}$ — дисперсия.

$\mathbf{E}$ — математическое ожидание.

$\mathrm{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция:

$$\mathrm{Ei}(x) = -\int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt, \quad x < 0.$$

$\mathrm{Exp}(\lambda)$ — показательное распределение с параметром λ.

$f^y(x)$, $f(x)^y$ — значение $f(x)$, возведенное в степень y.

$f^{-1}(y)$ — обратная функция к f; для функции распределения — обобщенная обратная: $F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \ge y\}$.

$f(x-0)$ — левый предел функции f в точке x; при $x = 0$ обозначаем $f(-0)$.

$\bar{F}(x)$ — правый хвост распределения: $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

---

[1] В список внесены наиболее важные обозначения. Порядок специальных обозначений по главам связан с их смыслом и порядком изложения материала. Дается ссылка на раздел, если обозначение следует рассматривать в его контексте.

F^{*n} — n-кратная свертка распределения F.

$\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

$\Phi_\alpha(x)$ — функция стандартного распределения Фреше: $\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$, $\alpha > 0$, $x > 0$.

$\Phi_{\alpha,b,c}(x)$ — функция трехпараметрического распределения Фреше, с. 157.

$\Gamma(x)$ — гамма-функция.

$\Lambda(x)$ — функция стандартного распределения Гумбеля (двойного показательного закона): $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$.

$L(x)$ — медленно меняющаяся функция (по умолчанию, на бесконечности).

λ_U, λ_D — коэффициенты верхней и нижней хвостовой зависимости, с. 74.

$O_p(\dots)$, $o_p(\dots)$ — порядки изменения по вероятности, с. 43.

x_0 — крайняя левая точка распределения: $x_0 = \inf\{x : F(x) > 0\}$ (кроме главы 5).

x_ω — крайняя правая точка распределения: $x_\omega = \sup\{x : F(x) < 1\}$.

Специальные обозначения главы 1

Υ, Ξ, $M_t(A)$, $S_t(A)$, $U(t)$, $\zeta(t)$, $\kappa(t)$, $\nu(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_r(t)$, $\rho(t)$, $\pi(t)$ — специальные обозначения в общей схеме максимумов сумм независимых случайных величин (раздел 1.2).

$\tilde{X}_n$, $\tilde{X}_n^{(r)}$ — максимум и r-ый максимум случайных величин $X_1, \dots X_n$.

$P_{\alpha,\beta}$ — модель случайного графа из [87], с. 49.

a — хвостовой индекс распределения индивидуальной активности F (раздел 1.3).

s — параметр моделей со случайными весами (раздел 1.3.3).

W — неотрицательная случайная величина, используемая в моделях со случайными весами, $\mathbf{E}W^\beta < \infty$, $\beta \geq 1$ (раздел 1.3.3).

Bin(n,p) — биномиальное распределение с параметрами n и p.

$\mathrm{MBin}(n, \xi)$ — смешанное биномиальное распределение, с. 55.

$\mathrm{MPois}(n, \xi)$ — смешанное пуассоновское распределение, с. 61.

Специальные обозначения главы 2

Z_n, $n \geq 0$, — ветвящийся процесс с дискретным временем (число частиц в n-ом поколении).

$Z(m, n)$, $0 \leq m \leq n$, — редуцированный ветвящийся процесс (число частиц ветвящегося процесса в поколении m, которые имеют непустое потомство в поколении n).

$Z(t)$, $t \geq 0$, — ветвящийся процесс с непрерывным временем (число частиц в момент времени t).

M_n — максимум признаков частиц в n-ом поколении (в случае дискретного времени).

$M_i(n)$ — максимум i-го признака частиц в n-ом поколении, $1 \leq i \leq m$ (раздел 2.1.1.2).

M_n^* — максимум признаков частиц в первом поколении, если $Z_0 = n > 0$ (раздел 2.2.3).

$M(t)$ — максимум признаков частиц в момент времени t (раздел 2.1.2).

$M_i(t)$ — максимум i-го признака частиц в момент времени t (раздел 2.1.2).

$\widetilde{M}(t)$ — нормированный максимум признаков частиц в момент времени t (раздел 2.1.2).

$f(s)$ — производящая функция числа непосредственных потомков (в случае дискретного времени).

$f^{(n)}(s)$ — n-кратная итерация функции $f(s)$ при $n > 0$.

$f^{(-n)}(s)$ — n-кратная итерация функции $f^{-1}(s)$ при $n > 0$.

$f(s,t)$ — производящая функция числа потомков одной частицы через время $t \geq 0$, продолжается в область $t < 0$ (раздел 2.1.2).

$h(s)$ — производящая функция числа непосредственных потомков (в случае непрерывного времени, раздел 2.1.2).

λ — параметр показательного распределения времени жизни частицы (раздел 2.1.2).

κ — показатель экспоненциального роста числа частиц (раздел 2.1.2).

μ — среднее число непосредственных потомков.

σ^2 — дисперсия числа непосредственных потомков.

$B = \sigma^2/2$ (раздел 2.2).

W — предельная случайная величина для нормированного числа частиц в надкритическом ветвящемся процессе, с. 66 (случай дискретного времени), с. 79 (случай непрывного времени).

$\varphi(t)$ — преобразование Лапласа для W: $\varphi(t) = \mathbf{E}e^{-tW}$.

F — распределение признака (признаков) частицы (в разделе 2.2.1 имеем $F = \Phi$).

Ψ — предельное распределение максимума признаков частиц при линейной нормировке (раздел 2.1).

$T(n,k)$ — число пар частиц в n-ом поколении, имеющих общего предка не более k поколений назад.

$R(n,k)$ — число пар частиц в n-ом поколении, имеющих общего предка ровно k поколений назад.

A — распределение независимых случайных факторов, связанных с частицами и влияющих на их признаки, с хвостовым индексом γ (раздел 2.2.2); $\bar{A}(x) \sim \bar{F}(x)$, $x \to \infty$.

$v(s)$ — неотрицательная функция, такая, что $s\bar{A}(v(s)) \to 1$, $s \to \infty$ (раздел 2.2.2).

$\kappa(i,n,m)$ — номер предка i-ой частицы n-го поколения в m-ом поколении, а также $\kappa(i,n,n) = i$ и $\kappa(i,n,m) = 1$ при $m < 0$ (раздел 2.2.2).

Специальные обозначения главы 3

$\psi(s)$ — экстремальная функция (определение 1, раздел 3.1).

θ — экстремальный индекс (раздел 3.1).

θ^+, θ^- — частичные экстремальные индексы, с. 116.

θ_0, θ_1 — пределы $\log_s \psi(s)$ в 0 и 1.

$\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$ — система случайных величин, $n \geq 1$, $1 \leq m \leq \nu_n$.

$\{\xi_{n,m}; \nu_n | A_n\}$ — условная система случайных величин (n-ая серия рассматривается при условии A_n, $\mathbf{P}(A_n) > 0$).

M_n — максимум по n-ой серии: $M_n = \vee_{m=1}^{\nu_n} \xi_{n,m}$.

$\varphi(t)$ — генератор архимедовой копулы, с. 127 (раздел 3.3).

Специальные обозначения главы 4

Z_n, $n \geq 0$, — максимальный ветвящийся процесс, МВП (раздел 4.1).

МВП(T) — максимальный ветвящийся процесс на множестве $T \subset \mathbf{R}_+$ (раздел 4.1).

γ — константа Эйлера, $\gamma = 0,577...$ (разделы 4.1, 4.3.1, 4.4).

F — распределение (обобщенного) числа непосредственных потомков, с. 142; F сосредоточено на T.

Ψ — стационарное распределение МВП.

$\tilde{Z}$ — случайная величина с распределением Ψ.

$\{Z_n^{(\lambda)}\}$ — семейство МВП с $F^{(\lambda)}$, $T^{(\lambda)}$ и $\Psi^{(\lambda)}$ (раздел 4.2).

$\Psi_{\alpha,b,c}$ — стационарное распределение МВП при $F = \Phi_{\alpha,b,c}$.

$B(x)$ — функция распределения времени обслуживания заявки (разделы 4.1, 4.3).

$\Pi(t)$ — пуассоновский процесс единичной интенсивности.

$\varphi(s)$ — функция среднего максимума, с. 153 (раздел 4.2.2), с. 163 (раздел 4.3.1).

$\varphi_r(s)$ — функция r-го момента максимума, с. 165.

$u(s)$ — функция: $u(s) = F^{-1}(1-1/s)$ (раздел 4.2.2), $u(s) = B^{-1}(1-1/s)$ (раздел 4.3.1).

$P_\alpha(x, \theta)$ — функция распределения Парето, с. 168.

$\Phi_\alpha(x, \theta)$ — функция двухпараметрического распределения Фреше, с. 168.

$\tilde{\nu}$ — случайная величина со стационарным распределением числа заявок, обслуженных за стадию, со средним μ и r-ми моментами μ_r (раздел 4.3).

$\tilde{\tau}$ — случайная величина со стационарным распределением длительности стадии, со средним T и r-ми моментами T_r (раздел 4.3).

Специальные обозначения главы 5

$Z(n) = (Z_1(n), \ldots Z_d(n))$, $n \geq 0$, — МВП с $d \geq 2$ типами частиц (раздел 5.1).

$\xi^{(k)}$ — вектор, описывающий (обобщенные) числа непосредственных потомков всех типов от частицы k-го типа, $1 \leq k \leq d$ (раздел 5.1).

F_k — многомерное распределение $\xi^{(k)}$; F_{kl} — распределение его l-ой компоненты, $1 \leq l \leq d$.

T_k — носитель распределения вектора $\xi^{(k)}$, $T_k \subset \mathbf{R}_+^d$, с проекциями $T_{k,l}$ на оси Ox_l.

$T_k^* = \cup_{j=1}^d T_{j,k}$.

$T_k^{(s)}$ — носитель распределения с функцией распределения F_k^s, $s > 0$ (разделы 5.1, 5.3).

$\|(x_1, \ldots, x_d)\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$.

ρ_k — характеристика распределения $\xi^{(k)}$, с. 183.

γ — константа Эйлера, $\gamma = 0,577...$ (разделы 5.1, 5.3).

S — множество (существенных) состояний МВП, с. 182 (раздел 5.1), 199 (раздел 5.3).

Ψ — стационарное распределение МВП.

$\tilde{Z}$ — случайный вектор с распределением Ψ.

$\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ — семейство МВП с $F_k^{(\lambda)}$ с носителями $T_k^{(\lambda)}$, $1 \leq k \leq d$, и $\Psi^{(\lambda)}$ (разделы 5.2, 5.3).

$\Psi_{(\alpha_k),(b_{kl}),(c_{kl})}$ — стационарное распределение МВП, соответствующее частным распределениям чисел потомков $F_{kl} = \Phi_{\alpha_k, b_{kl}, c_{kl}}$ и фиксированной копуле экстремальных значений (раздел 5.3).

Литература

[1] *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.

[2] *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. М.: Мир, 1974.

[3] *Боровков А.А.* Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М.: УРСС, 1999.

[4] *Будников Ю.А.* Об асимптотическом поведении хроматического индекса случайных гиперграфов // Интеллектуальные системы. 2007. Т. 11. № 1–4. С. 343–360.

[5] *Булинский А.В., Шашкин А.П.* Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: Физматлит, 2008.

[6] *Ватутин В.А.* Ветвящиеся процессы и их применения. Лекционные курсы НОЦ. Вып. 8. М.: МИАН, 2008.

[7] *Ватутин В.А., Зубков А.М.* Ветвящиеся процессы. I. Итоги науки и техники. Сер. Теор. вероятн. Матем. статистика. Теор. кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 23. С. 3–67.

[8] *Вахтель В.И., Денисов Д.Э., Коршунов Д.А.* Об асимптотике хвоста распределения надкритического процесса Гальтона-Ватсона в случае тяжелых хвостов // Труды МИАН, 2013. Т. 282. С. 288–314.

[9] *Галамбош Я.И.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.

[10] *Галамбош Я.И.* О развитии математической теории экстремумов за последние полвека // Теория вероятностей и ее применения, 1994. Т. 39. № 2. С. 272–293.

[11] *Гнеденко Б.В.* Предельные теоремы для максимального члена вариационного ряда // Доклады Академии наук УССР. 1941. Т. 32. № 1. С. 101–106.

[12] *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.

[13] *Голдаева А.А.* Тяжелые хвосты, экстремумы и кластеры линейных стохастических рекуррентных последовательностей. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.05. М.: МГУ, 2014.
http://mech.math.msu.su/~snark/files/diss/0008diss.pdf

[14] *Голдаева А.А.* Равномерная оценка экстремального индекса стохастических рекуррентных последовательностей // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 2012. № 2. С. 51–55.

[15] *Голдаева А.А.* Экстремальные индексы и кластеры в линейных стохастических рекуррентных последовательностях // Теория вероятностей и ее применения, 2013. Т. 58. № 4. С. 795–804.

[16] *Гриневич И.В.* Макс-полуустойчивые предельные распределения, отвечающие линейной и степенной нормировке // Теория вероятностей и ее примен. 1992. Т. 37. № 4. С. 774–776.

[17] *Гумбель Э.* Статистическая теория экстремальных значений (основные результаты) / Введение в теорию порядковых статистик. М.: Фазис, 1970. С. 61–93.

[18] *Деовельс П., Невзоров В.Б.* Рекорды в F^α-схеме. II. Предельные теоремы // Проблемы теории вероятностных распределений. 13. Зап. науч. сем. ПОМИ. 1994. Т. 216. С. 42–51.

[19] *Захаров П.* Народ-блогоносец // Компьютерра. 2007. № 27–28. С. 36–39. http://offline.computerra.ru/2007/695/327726

[20] *Земплени А.* Проверка max-безграничной делимости // Теория вероятностей и ее применения, 1992. Т. 37. № 1. С. 173–175.

[21] *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.

[22] *Ивченко Г.И.* Вариационный ряд для схемы суммирования независимых величин // Теория вероятн. и ее примен., 1973. Т. 18. № 3. С. 557–570.

[23] *Иржина М.* Ветвящиеся случайные процессы с непрерывным пространством состояний // Теория вероятн. и ее примен., 1959. Т. 4. № 4. С. 482–484.

[24] *Касами Т., Токура Н., Ивадари Е., Ингаки Я.* Теория кодирования. М.: Мир, 1978.

[25] *Колчин В.Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2004.

[26] *Кузнецова Т.В.* Уточнение предельной теоремы для максимумов независимых случайных сумм в случае нулевой асимметрии // Теория вероятн. и ее примен. 2010. Т. 55. № 2. С. 357–361.

[27] *Кузнецова Т.В.* Предельные теоремы для максимумов некоторых зависимых случайных сумм // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 2012. № 3. С. 18–23.

[28] *Купавский А.Б., Шабанов Д.А.* Раскраски частичных систем Штейнера и их приложения // Фундаментальная и прикладная математика, 2013. Т. 18. № 3. С. 77–115.

[29] *Лебедев А.В.* Предельные теоремы о максимумах независимых случайных сумм // Теория вероятностей и ее применения, 1999. Т. 44. № 3. С. 631–633.

[30] *Лебедев А.В.* Экстремумы полей дробового шума // Фундаментальная и прикладная математика, 2001. Т. 7. № 4. С. 1081–1090.

[31] *Лебедев А.В.* Максимумы субэкспоненциальных полей дробового шума с конечным радиусом влияния // Математические заметки, 2003. Т. 73. № 2. С. 258–262.

[32] *Лебедев А.В.* Обобщенные максимальные ветвящиеся процессы на ограниченных множествах // Вестник МГУ. Сер.1. Математика. Механика. 2002. № 6. С. 55–57.

[33] *Лебедев А.В.* Двойной показательный закон для максимальных ветвящихся процессов // Дискретная математика, 2002. Т. 14. № 3. С. 143–148.

[34] *Лебедев А.В.* Вентильная бесконечнолинейная система с неограниченными временами обслуживания и большой загрузкой // Проблемы передачи информации, 2003. Т. 39. № 3. С. 87–94.

[35] *Лебедев А.В.* Вентильная бесконечнолинейная система с большой загрузкой и степенным хвостом // Проблемы передачи информации, 2004. Т. 40. № 3. С. 62–68.

[36] *Лебедев А.В.* Максимумы независимых сумм в случае тяжелых хвостов // Теория вероятностей и ее применения, 2004. Т. 49. № 4. С. 791–794.

[37] *Лебедев А.В.* Обобщенные максимальные ветвящиеся процессы в случае степенных хвостов // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. № 2. С. 47–49.

[38] *Лебедев А.В.* Общая схема максимумов сумм независимых случайных величин и ее приложения // Математические заметки, 2005. Т. 77. № 4. С. 544–550.

[39] *Лебедев А.В.* Максимальные ветвящиеся процессы с неотрицательными значениями // Теория вероятностей и ее применения, 2005. Т. 50. № 3. С. 564–570.

[40] *Лебедев А.В.* Максимумы активности в случайных сетях в случае тяжелых хвостов // Проблемы передачи информации, 2008. Т. 44. № 2. С. 96–100.

[41] *Лебедев А.В.* Максимумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 5. С. 3–6.

[42] *Лебедев А.В.* Максимальные ветвящиеся процессы / Современные проблемы математики и механики, 2009. Т. 4. № 1. С. 93–106. http://www.math.msu.su/department/probab/svodny2.pdf

[43] *Лебедев А.В.* Асимптотика хвостов стационарных распределений максимальных ветвящихся процессов // Теория вероятностей и ее применения, 2009. Т. 54. № 4. С. 515–520.

[44] *Лебедев А.В.* Асимптотическое поведение экстремумов случайных признаков частиц в ветвящихся процессах с наследственностью // Ярославский педагогический вестник. Сер. Физико-математические и естественные науки, 2010. № 1. С. 7–14. http://www.math.msu.su/department/probab/linasl.pdf

[45] *Лебедев А.В.* Максимумы активности в безмасштабных случайных сетях с тяжелыми хвостами / Информатика и ее применения, 2011. Т. 5, № 4. С. 13–16.

[46] *Лебедев А.В.* Предельные теоремы для стационарных распределений максимальных ветвящихся процессов с двумя типами частиц // Современные проблемы математики и механики, 2011. Т. 7. № 1. С. 29–38. http://www.math.msu.su/department/probab/cheb190.pdf

[47] *Лебедев А.В.* Многотипные максимальные ветвящиеся процессы с копулами экстремальных значений // Современные проблемы математики и механики, 2011. Т. 7. № 1. С. 39–49. http://www.math.msu.su/department/probab/cheb190.pdf

[48] *Лебедев А.В.* Максимальные ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика, 2012. № 3. С. 8–13.

[49] *Лебедев А.В.* Многомерные экстремумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах // Теория вероятностей и ее применения, 2012. Т. 57. № 4. С. 788–794.

[50] *Лебедев А.В.* Экстремальные индексы в схеме серий и их приложения // Информатика и ее применения, 2015. Т. 9. № 3. С. 39–54.

[51] *Лебедев А.В.* Экстремумы зависимых признаков частиц в ветвящихся процессах // Современные проблемы математики и механики, 2015. Т. 10. № 3. С. 121–135. http://www.math.msu.su/department/probab/ktv80.pdf

[52] *Лебедев А.В.* Максимумы активности в некоторых моделях информационных сетей со случайными весами и тяжелыми хвостами // Проблемы передачи информации, 2015. Т. 51. № 1. С. 72–81.

[53] *Лери М.М., Чеплюкова И.А.* Об одной статистической задаче для случайных графов Интернет-типа // Информатика и ее применения. 2011. Т. 5. № 3. С. 34–40.

[54] *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

[55] *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983. 576 с.

[56] *Мацак И.К.* Об относительной устойчивости экстремальных случайных функций // Матем. заметки., 2002. Т. 71. № 5. С. 787–790.

[57] *Невзоров В.Б.* Рекорды. Математическая теория. М.: Фазис, 2000.

[58] *Новак С.Ю.* О распределении максимума случайного числа случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36. №4. С. 675–681.

[59] *Новак С.Ю.* О распределении максимума частичных сумм Эрдеша-Реньи // Теория вероятностей и ее применения. 1997. Т. 42. №2. С. 274–293.

[60] *Новак С.Ю.* Предельные теоремы и оценки скорости сходимости в теории экстремальных значений. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.05. СПб.: ПОМИ РАН, 2014.

[61] *Павлов Ю.Л.* О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21. № 3. С. 14–23.

[62] *Павлов Ю.Л.* Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22. № 3. С. 20-33.

[63] *Панчева Е.И.* Общие предельные теоремы для максимума независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Т. 31. № 4. С. 730–744.

[64] *Питербарг В.И.* Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: МГУ, 1988. 176 с.

[65] *Питербарг В.И., Козлов А.М.* О больших скачках случайного блуждания с условием Крамера // Теория вероятностей и ее применения. 2002. Т. 47. № 4. С. 803–814.

[66] *Райгородский А.М.* Модели случайных графов и их применения // Труды МФТИ. 2010. Т. 2. № 4. С. 130–140.

[67] *Рослер У., Топчий В.А., Ватутин В.А.* Условия сходимости для ветвящихся процессов с частицами, имеющими вес // Дискретная математика, 2000. Т. 12. № 1. С. 7–23.

[68] *Рюэль Д.* Статистическая механика. М.: Мир, 1971.

[69] *Савинов Е.А.* Предельная теорема для максимума случайных величин, связанных IT-копулами t-распределения Стьюдента // Теория вероятностей и ее применения, 2014. Т. 59. № 3. С. 594–602.

[70] *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.

[71] *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Институт компьютерных исследований, 2003.

[72] *Сенатов В.В.* Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: УРСС, 2009. 352 с.

[73] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

[74] *Степанов А.В.* Предельные теоремы и статистические процедуры для величин, связанных с рекордами и экстремальными порядковыми статистиками. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.05. СПб.: ПОМИ РАН, 2015.

[75] *Ткачук С.Г.* Теорема о больших уклонениях в $\mathbf{R}^s$ в случае устойчивого предельного закона // Случайные процессы и статистические выводы. Ташкент: Фан, 1974. Вып. 4. С.178–184.

[76] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.

[77] *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.

[78] *Чистяков В.П.* Теорема о суммах положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам // Теория вероятностей и ее применения, 1964. Т. 9. № 4. С. 710–718.

[79] *Чупрунов А.Н.* О сходимости по распределению максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин со случайными коэффициентами // Теория вероятностей и ее применения, 1999. Т. 44. № 1. С. 138–143.

[80] *Шаповалов А.В.* Цикловая структура случайного неоднородного гиперграфа на докритическом этапе эволюции // Дискретная математика. 2007. Т. 19. № 4. С. 52–69.

[81] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т.1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998.

[82] *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. 2005.

[83] *Штойян Д.* Качественные свойства и оценки стохастических моделей. М.: Мир, 1979. 268 с.

[84] *Якымив А.Л.* Редуцированные ветвящиеся процессы // Теория вероятностей и ее применения. 1980. Т. 25. № 3. С. 593–596.

[85] *Якымив А.Л.* Асимптотические свойства докритических и надкритических редуцированных ветвящихся процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1985. Т. 30. № 1. С. 183–188.

[86] *Adami C., Chu J.* Critical and near-critical branching processes // Phys. Rev., 2002. V. 66. 011907.

[87] *Aiello W., Chung F., Lu L.* A random graph model for power law graphs // Exp. Math. 2001. V. 10. № 1. P. 53–66.

[88] *Albert R., Jeong H., Barabási A.* Diameter of the World-Wide Web // Nature. 1999. V. 401. P. 130–131.

[89] *Arnold B.C., Villasenor J.A.* The tallest man in the world / Statistical theory and applications. Papers in honor of H.A.David. Springer, 1996. P. 81–88.

[90] *Avrachenkov K., Markovich N.M., Sreedharan J.K.* Distribution and dependence of extremes in network sampling processes. INRIA Research report № 8578. August 2014. http://arxiv.org/abs/1408.2529

[91] *Avrachenkov K., Markovich N.M., Sreedharan J.K.* Distribution and dependence of extremes in network sampling processes // Workshop on Complex Networks and their Applications at the 10th IEEE International Conference on Signal-Image Technology and Internet-Based Systems (SITIS 2014), November 23–27, 2014, Marrakech, Morocco. P. 331–338.

[92] *Aydogmus O., Ghosh A.P., Ghosh S., Roitershtein A.* Coloured maximal branching process // Теория вероятн. и ее примен. 2014. Т. 59. № 4. С. 790–800.
http://www.public.iastate.edu/~roiterst/papers/cmbp4.pdf

[93] *Balkema A.A., Resnick S.I.* Max-infinite divisibility // J. Appl. Probab., 1977. V. 14. № 2. P. 309–311.

[94] *Barabási A., Albert R.* Emergence of scaling in random networks // Science. 1999. V. 286. P. 509–512.

[95] *Barabási A.* The origin of bursts and heavy tails in human dynamics // Nature. 2005. V. 435. C. 207–211.

[96] *Bertoin J.* On the maximal offspring in a critical branching processes with infinite variance // J. Appl. Probab., 2011. V. 48. № 2. P. 576–582.

[97] *Bertoin J.* On the maximal offspring in a critical branching processes with finite variance // J. Appl. Probab., 2013. V. 50. № 3. P. 791–800.

[98] *Bhattacharya R.N., Lee C.* Ergodicity of nonlinear first order autoregressive models // J. Theor. Probab., 1995. V. 8. № 1. P. 207–219.

[99] *Bollobás B.* Random graphs. Cambridge Univ. Press. 2001.

[100] *Borak S., Härdle W., Weron R.* Stable distributions. SFB649 Discussion Paper 2005-008. http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de

[101] *Browne S., Coffman E.G., Gilbert E.N., Wright P.E.* Gated, exhaustive, parallel Service // Probab. Eng. Inf. Sci. 1992. V. 2. № 2. P. 217–239.

[102] *Browne S., Coffman E.G., Gilbert E.N., Wright P.E.* The gated infinite-server queue: uniform service times // SIAM J. Appl. Math., 1992. V. 52. № 6. P. 1751–1762.

[103] *Budhiraja A., Reinhold D.* Near critical catalyst-reactant process with controlled immigration // Adv. Appl. Probab., 2013. V. 23. № 5. P. 2053–2098.

[104] *Canto e Castro L., de Haan L., Temido M.G.* Rarely observed sample maxima // Теория вероятностей и ее примен. 2000. Т. 45. № 4. P. 787–799.

[105] *Choi H.* Central limit theory and extremes of random fields. PhD Dissertation in Univ. of North Carolina at Chapel Hill. 2002.

[106] *Davis R.A., Resnick S.I.* Basic properties and prediction of max-ARMA processes // Adv. Appl. Prob., 1989. V. 21. № 4. P. 781–803.

[107] *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosh T.* Modelling extremal events for insurance and finance. Springer, 2003.

[108] *Erdös P., Rényi A.* On random graphs // Publ. Math. Debrecen. 1959. V. 6. P. 290–297.

[109] *Esary J., Prochan F., Walkup D.* Association of random variables with applications // Ann. Math. Stat. 1967. V. 38. № 5. P. 1466–1474.

[110] *Ferreira H., Pereira L.* How to compute the exremal index of stationary random fields // Statistics and Probability Letters, 2008. V. 78. P. 1301–1304.

[111] *Fisher R.A., Tippett L.H.C.* Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample // Proc. Camb. Phil. Soc. 1928. V. 24. P. 180–190.

[112] *Fleischmann K., Siegmund-Schultze R.* The structure of reduced critical Galton-Watson processes // Math. Nachr., 1977. V. 79. № 1. P. 233–241.

[113] *Fréshet M.* Sur la loi de probabilité de l'écart maximum // Ann. de la Soc. polonaise de Math. (Cracow). 1927. V. 6. P. 93.

[114] *Foss S., Korshunov D., Zachary S.* An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions. NY.: Springer, 2011.

[115] *Ghosh S.* Topics in stochastic growth models. Iowa State Univ. 2013. http://lib.dr.iastate.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4492&context=etd

[116] *Gnedenko B.V.* Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire // Ann. Math. 1943. V. 44. № 3. P. 423–453.

[117] *Goldie C.M., Klüppelberg C.* Subexponential distributions / A practical guide to heavy tails. Birkhauser, 1998. P. 435–459.

[118] *de Haan L., Ferreira A.* Extreme value theory. An introduction. Springer, 2006.

[119] *van der Hofstad R.* Random graphs and complex networks. V. 1. Eindhoven Univ. of Technology, 2014.
http://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCN.pdf

[120] *Jiřina M.* Stochastic branching processes with continuous state space // Chechoslovak Math. J., 1958. V. 8. № 2. P. 292–313.

[121] *Kang S., Serfozo R.F.* Extreme values of phase-type and mixed random variables with parallel-processing examples // J. Appl. Prob., 1999. V. 36. № 1. P. 194–210.

[122] *Knessl Ch., Tan X.* Heavy traffic asymptotics for a gated, infinite-server queue with uniform service times // SIAM J. Appl. Math. 1994. V. 54. № 6. P. 1768–1779.

[123] *Lamperti J.* Maximal branching processes and long-range percolation // J. Appl. Probab., 1970. V. 7. № 1. P. 89–96.

[124] *Lamperti J.* Remarks on maximal branching processes // Теория вероятн. и ее примен., 1972. Т. 17. № 1. С. 46–54.

[125] *Lebedev A.V.* Maxima of random particles scores in Markov branching processes with continuous time // Extremes, 2008. V. 11. № 2. P. 203–216.

[126] *Markovich N.M.* Nonparamertic analysis of univariate heavy-tailed data. Wiley, 2007.

[127] *Markovich N.M.* Modeling clusters of extreme values // Extremes, 2013. V. 17. № 1. P. 97–125.

[128] *Markovich N.M.* Quality assessment of the packet transport of peer-to-peer video traffic in high-speed networks // Perform. Evaluation, 2013. V. 70. № 1. P. 28–44.

[129] *Marshall A., Olkin I.* Domains of attraction of multivariate extreme value distributions // Ann. Probab., 1983. V. 11. № 1. P. 168–177.

[130] *McNeil A.J., Frey R., Embrechts P.* Quantitative risk management. Princeton University Press, 2005.

[131] *von Mises R.* La distribution de la plus grande de n valeurs. 1936. Reprinted in Selected Papres, II // Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1954. P. 271–294.

[132] *Mitov K.V., Yanev G.P.* Maximum individual score in critical two-type branching processes // C. R. Acad. Bulg. Sci., 2002. V. 55. № 11. P. 17–22.

[133] *Nagaev S.V.* Large deviations of sums of independent random variables // Ann. Prob. 1979. V. 7. № 5. P. 745–789.

[134] *Nelsen R.* An introduction to copulas. Springer, 2006.

[135] *O'Connel N.* The genealogy of branching processes and the age of our most recent common ancestor // Adv. Appl. Probab., 1995. V. 27. P. 418–442.

[136] *Pakes A.G.* Extreme order statistics on Galton-Watson trees // Metrika, 1998. V. 47. P. 95–117.

[137] *Pancheva E.* Multivariate max-semistable distributions // Теория вероятностей и ее примен. 1992. V. 37. № 4, P. 794–795.

[138] *Pancheva E.* Max-semistability: a survey // ProbStat Forum, 2010. V. 3. P. 11–24.

[139] *Pereira L.* The asymptotic location of the maximum of a stationary random field // Statistics and Probability Letters, 2009. V. 79. P. 2166–2169.

[140] *Pickands J.* Moment convergence of sample extremes // Ann. Math. Stat. 1968. V. 39. № 3. P. 881–889.

[141] *Pinotsi D., Zazanis M. A.* Stability conditions for gated $M|G|\infty$ queues // Probab. Eng. Inf. Sci. 2004. V. 18. № 1. P. 103–110.

[142] *Rahimov L., Yanev G.P.* On maximum family size in branching processes // J. Appl. Probab. 1999. V. 36. P. 632–643.

[143] *Resnick S.I.* Extreme values, regular variation and point processes. Springer, 1987.

[144] *Stam A.J.* Regular variation of the tail of a subordinated probability distribution // Adv. Appl. Prob. 1973. V. 5. P. 308–327.

[145] *Vatutin V.A., Zubkov A.M.* Branching processes. II // J. Sov. Math. 1993. V. 67. № 6. P. 3407–3485.

[146] *Yanev G.P.* Revisiting offspring maxima in branching processes // Pliska Studia Mathematica Bulgarica, 2007. V. 18. P. 401–426.

[147] *Yang M.C.K.* On the distribution of the inter-record times in an increasing population // J. Appl. Probab. 1975. V. 12. № 1. P. 148–154.