Неравенства Либа-Тирринга и их приложение к спектральной теории.

Барсегян Д. С.

(Московский государственный университет)

dianabar@bk.ru

В 1976 году Либом и Тиррингом [1] была доказана следующая

Theorem 1. *Для произвольной ортонормированной системы* $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(R^2)$ *имеет место неравенство*

$$\int_{R^2} {\rho_\Phi}^2 dxdy \leqslant C \sum_{j=1}^N \|\nabla\varphi_j\|_2^2; \tag{1}$$

в (1) *и ниже*

$$\rho_\Phi \equiv \sum_{j=1}^N \varphi_j^2(x,y), \tag{2}$$

C-абсолютная постоянная и, как обычно, $\nabla\varphi \equiv (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y})$

.

В дальнейшем серия неравенств типа Либа-Тирринга для ортонормированных систем была установлена многими авторами(см., в частности,[2],[3].

В данной работе рассматриваются конечные ортонормированные системы и для них доказываются три теоремы

Theorem 2. *Для произвольной ортонормированной системы* $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(R^2)$ *имеет место неравенство*

$$\int_{R^2} {\rho_\Phi}^2 dxdy \leqslant C(\ln N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{R^2} |xy||\hat{\varphi}_j|^2 dxdy; \tag{3}$$

C-абсолютная постоянная.

С помощью этой теоремы доказывается оценка для спектра неограниченного самосопряженного дифференциального оператора $L\psi = -\triangle\psi + |xy|\psi$.

Theorem 3. *Пусть* $\{\lambda_j\}$*-собственные значения оператора L, тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \geq C' \frac{N^{3/2}}{\sqrt{1+\ln N}} \tag{4}$$

с некоторой постоянной C'.

Также доказывается

Theorem 4. *Существует постоянная C_1, такая что для произвольной ортонормированной системы функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(R^2)$ имеет место неравенство*

$$\int_{R^2} \rho_\Phi^3 \, dxdy \leq C_1(\ln^2 N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{R^2} x^2 y^2 |\hat{\varphi}_j|^2(x,y) \, dxdy \tag{5}$$

,

и с ее помощью оценивается спектр оператора $L_1 = -\triangle\psi + x^2y^2\psi$. Доказывается

Theorem 5. *Пусть $\{\lambda_j\}$-собственные значения оператора L_1, тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \geq C_1' \frac{N^{5/3}}{(1+\ln^2 N)^{1/3}}. \tag{6}$$

с некоторой константой C_1'.

Получена аналогичная для трёхмерного случая

Theorem 6. *Существует постоянная C_2, такая что для произвольной ортонормированной системы функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(R^3)$ имеет место неравенство*

$$\int_{R^2} \rho_\Phi^2 \, dxdydz \leq C_2(\ln^2 N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{R^2} |xyz||\hat{\varphi}_j|^2(x,y,z) dxdydz. \tag{7}$$

Для оператора $L_2 = -\triangle\psi + |xyz|\psi$ доказана

Theorem 7. *Пусть $\{\lambda_j\}$-собственные значения оператора L_2, тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \geq C_2' \frac{N^{7/5}}{(1+\ln^2 N)^{2/5}}. \tag{8}$$

References:

[1] *E.Lieb, W.Thirring* Title// Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities. 1976. P. 269–303.

[2] *Б.Кашин.* Title//Матем. Заметки , 80:2. 2006. P. 204–208.

[3] *Д.Барсегян.* Title//Матем. Заметки, 82:4 . 2007. P. 504–514.