Ограниченость оператора свертки в пространстве Лебега и Лоренца

Нурсултанов Е. Д., Тихонов С. Ю., Тлеуханова Н. Т.

(Астана; Барселона; Астана)

er-nurs@yandex.ru, s.tikhonov@sns.it, tleukhanova@rambler.ru

В работе рассматриваются операторы свертки

$$(Af)(x) = (K * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} K(x-y)f(y)dy, \tag{1}$$

при условии, что интеграл абсолютно суммируем при почти всех $x \in \mathbb{R}$ для любой $f \in L_p(\mathbb{R})$.

О'Нейлом [1] было доказано неравенство при $1 < p < q < +\infty$, $1/r = 1 - 1/p + 1/q$

$$\|A\|_{L_p \to L_q} \le C\|K\|_{L_{r,\infty}} = C\sup_{t>0}\, t^{1/r}K^*(t) \tag{2}$$

где $\quad K^*(t) = \inf\{\sigma : \mu\{x \in \Omega : |f(x)| > \sigma\} \le t\}\quad$ is the decreasing rearrangement of K.

Это неравенство дает более тонкое, чем неравенство Юнга, достаточное условие ограниченности интегральных операторов свертки и охватывает неравенство Харди-Литтлвуда.

Определим некоторые семейства множеств. Пусть $[a, b]$ отрезок в $\mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $d \in \mathbb{R}_+$, $0 < (b-a) < d$ множество вида $e = \bigcup\limits_{i=0}^{m} \big([a, b] + id\big)$. назовем гармоническим отрезком в $\mathbb{R}$. Через M_0 обозначим множество всех гармонических отрезков.

Пусть $d > 0, T_d = \{(dm, (m+1)d]\}_{m \in \mathbb{Z}}-$ разбиение $\mathbb{R}$, семейство измеримых множеств $M(d)$ определим следующим образом. Это система всех множеств вида $e = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \omega_k$, $m \in \mathbb{N}$, где компакты ω_k имеют одинаковые меры $|\omega_k| = |\omega_j| \le d$ и принадлежат разным элементам разбиения T_d.

Отметим, что семейство M_0 содержит множество всех отрезков из $\mathbb{R}$ и в свою очередь $M_0 \subset \cup_{d>0} M(d)$. Основным результатом является следующая теорема.

Theorem 1. *Пусть $1 < p < q < +\infty$. Тогда для $Af = K * f$ имеют место оценки*

$$C_1 \sup_{e \in M_0} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left|\int_e K(x)dx\right| \le \|A\|_{L_p \to L_q} \le C_2 \inf_{d>0} \sup_{e \in M(d)} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left|\int_e K(x)dx\right|.$$

Литература:

[1] *O'Neil R.* Convolution operators and $L(p, q)$ spaces// Duke Math. J. V. 30. 1963. S. 129–142.