О спектре общих дифференциальных операторов с переменными коэффициентами

Отелбаев М., Кусаинова Л.

(Евразийский Национальный университет имени Л.Н.Гумилева)

leili2006@mail.ru

В данной работе получены оценки спектра общих дифференциальных операторов в $L_2[0,\infty]$ с переменными коэффициентами. Основной целью работы является изложение некоторых идей, касающихся дальнейшего развития метода локализации с использованием „бегущей средней“ от потенциала, впервые примененного одним из авторов при исследовании спектральных свойств операторов типа Шредингера. Для простоты изложения мы будем рассматривать самосопряженные расширения L неотрицательных дифференциальных операторов вида

$$L_0 y = (-1)^l y^{(2l)} + \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k (\rho_k(x) y^{(k)})^{(k)}, \qquad y \in C_0^\infty[0,\infty).$$

Положим $S(x,h) = \sum\limits_{k=0}^{l-1} h^{-2k-l} \int\limits_x^{x+h} \rho_k(t)dt$. Определим многовесовой аналог „бегущей средней“ как

$$h^*(x) = \inf_{h>0} \{h^{-2l} : h^{-2l} \geq S(x,h)\}.$$

Пусть $N(\lambda, L)$ — количество точек спектра (с учетом кратности) оператора L, не превосходящих $\lambda > 0$.

Теорема. *Справедливы утверждения:*

a)

$$N(\lambda, L) \geq (c^{-1}\lambda)^{1/2l} mes\{x > 0 : h^*(x) \leq \lambda\}. \tag{1}$$

b) Нижняя грань оператора L

$$m(L) \leq c \inf_{x \geq 0} h^*(x). \tag{2}$$

c) Если спектр оператора L дискретен, то

$$\lim_{x\to+\infty} h^*(x) = +\infty. \tag{3}$$

Далее нами доказывается, что для совокупности коэффициентов $\{\rho_k\}$, удовлетворяющих некоторому условию регулярности в целом, оценки (1) и (2) являются двухсторонними, условие (3) — критерием дискретности спектра, а при $m(L) > 0$ норма Шаттена

$$\|L^{-1}\|_{\sigma_p} \sim \int\limits_0^\infty (h^*(x))^\theta dx, \quad \theta = -p + 1/2l.$$

Исследование спектра определенных классов операторов можно проводить с позиций теории приближения и теорем вложения. Пусть $\widetilde{L}$ — самосопряженное расширение оператора

$$\widetilde{L_0}y = (-1)^l(\rho_l(x)y^{(l)})^{(l)} + \rho_0(x)y, \quad y \in C_0^\infty[0,\infty).$$

Мы рассматриваем пару (ρ_l, ρ_0), удовлетворяющую определенному условию, в котором существенным является поведение ρ_l в среднем на характеристических интервалах $\Delta^*(x) = (x - 1/2(\widetilde{h^*}(x))^{1/2l}, (x + 1/2(\widetilde{h^*}(x))^{1/2l}$, где

$$\widetilde{h^*}(x) = \inf_{h>0}\{h^{-2l} : h^{-2l} \geq \mu(x, \tau h; \rho_l^{-1})\mu(x, \tau h; \rho_0)\},$$

$0 < \tau < 1$, а $\mu(x, h; f)\}$ есть среднее функции f на интервале $(x - h/2, x + h/2)$. Пусть M^*f — максимальная функция от f на базисе $B_\tau = \bigcup\limits_{x>0}\{\Delta = (a, b) : \Delta \subset \tau\Delta^*(x)\}$. Нами получены критерий дискретности оператора $\widetilde{L}$ и двухсторонние оценки

$$(c^{-1}\lambda)^{-1/2l}N(c^{-1}\lambda; \widetilde{L}) \leq \int\limits_{\{M^*(\rho_l^{-1}) > \sqrt{\widetilde{h^*}/\lambda}\}} (M^*(\rho_l^{-1})(x))^{1/2l}dx \leq$$

$$\leq (c\lambda)^{-1/2l}N(c\lambda; \widetilde{L}),$$

В терминах функции $h^*(x)$ можно получать также оценки s-чисел для широкого класса несамосопряженных операторов. Достаточно полный список работ, в которых подробно развернуты изложенные результаты дан в [1].

Литература:

[1] *Отелбаев М., Кусаинова Л.* Оценки спектра одного класса дифференциальных операторов.// Збірнік праць Ин-ту математики НАН Украіна, т. 6, № 1. 2009. P. 165–190.