Дискретный спектр периодического оператора Шредингера с переменной метрикой при неотрицательных возмущениях

Слоущ В. А.

Доклад посвящен совместной работе с М. Ш. Бирманом.

Пусть A — эллиптический периодический самосопряженный оператор второго порядка в $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, и пусть V — оператор умножения на функцию $V(x) \geq 0$, стремящуюся (в подходящем смысле) к нулю при $|x| \to +\infty$. Пусть (α, β) — *внутренняя* лакуна в спектре A и $\lambda \in [\alpha, \beta]$ — фиксированное число. Спектр оператора $B(t) := A+tV$, $t > 0$, в лакуне (α, β) дискретен. Через $N(\lambda, \tau)$ обозначается число собственных значений оператора $B(t)$, прошедших через точку λ при увеличении t от 0 до τ. В работе была получена асимптотика $N(\lambda, \tau)$ при $\tau \to +\infty$, в случае, когда возмущение $V(x)$ имеет степенную асимптотику на бесконечности $V(x) \sim \omega(x/|x|)|x|^{-\rho}$, $|x| \to +\infty$, $\rho \in (0, d)$.

Основной результат имеет вид $N(\lambda, \tau) \sim \Gamma_\rho(\lambda)\tau^{d/\rho}$, $\tau \to +\infty$. При этом коэффициент $\Gamma_\rho(\lambda)$ вычисляеься в терминах *зонных функций* оператора A. При определенных условиях указанная асимптотика справедлива и на левом краю лакуны при $\lambda = \alpha$. Каких-либо дополнительных требований на гладкость коэффициентов оператора A не накладывается. Условие $\rho < d$ — техническое и может быть снято, если коэффициенты оператора A достаточно гладкие.

Проверка основного результата сводится к анализу асимптотики сингулярных чисел некоторых интегральных операторов. При этом существенно используются различные обобщения оценки Цвикеля. Найденная асимптотика нелокальна по энергиям, ее порядок отличается от „стандартного“ $\tau^{d/2}$. Вейлевский характер асимптотики проявляется после замены ролей координат и квазиимпульсов.