ПРОГРАММА-МИНИМУМ ВАК кандидатского экзамена по специальности "Математическая логика, алгебра и теория чисел 01.01.06"

Утверждена Экспертным Советом ВАК по механике и математике
8 апреля 2002 г.

Часть 1.

Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча ([2, §§35-37], [3, §§1-6, 11-12], [4, гл. V, §§1-3]).
2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы ([3, §§5-6, 12], [4, гл. V, §§3-4]).
3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства ([3, §13]).
4. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ ([1, гл. II, §§2-6]).
5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы ([2, §§1-6, 12], [5, гл. I]).
6. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость ([4, гл. I, §4]) [5, гл. II, §§ 3-10]).
7. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме. ([2, §§15-16, 20], [4, гл. II, §10] [5, гл. III, §§1-3, 9; гл. IV, §14]).
8. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции ([2, §§18, 22], [4, гл. II, §§1-4] [5, гл. IV, §§1-8]).
9. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности ([2, §17-18, 21-22], [4, гл. II, §5] [5, гл. IV, §16, 19]).
10. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности ([2, §§24-25, 29]).
11. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка. ([4, гл. II, §12] [6, гл. V, §1]).
12. Формальная артифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной артифметике (без доказательства) ([4, гл. III, §§1-3]).
13. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике. ([4, гл. III, §§4-6]).
14. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов ([2, §§37-38]), [4, гл. III, §6]).
15. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора ([2, §§10, 13-14]), [4, гл. IV]).

Список литературы

1. М.Гэри, Д.Джонсон. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* М.: Мир, 1982.
2. . Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин. *Математическая логика*. Изд. 2. М.: Наука, 1987.
3. А.И.Мальцев. *Алгоритмы и рекурсивные функции.* Изд. 2. М.: Наука, 1986.
4. Э.Мендельсон. *Введение в математическую логику*. Изд. 3. М.: Наука, 1984.
5. П.С.Новиков. *Элементы математической логики.* Изд. 2. М.: Наука, 1973.
6. Ю.Л.Ершов. *Проблемы разрешимости и конструктивные модели.* Наука, 1980.

Часть 2.

Алгебра

1. Теоремы Силова ([2], гл. 2, §2; [6]).
2. Простота группы A_n , $n \geq 5$ и SO_3 ([2], гл. 2, §1; [3], гл. 10, §5).
3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов ([3], гл. 9, §3; [1], гл. 12, §§84-89; [2]).
4. Свободные группы и определяющие соотношения ([2], гл. 1, §4; [4], гл. V, §1).
5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа ([1], гл. 6, §§39-41; гл. 8, §§57,58; [2], гл. 5, §§1,3).
6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы ([1], гл. 6, §43; [2], гл. 5, §2).
7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности ([1], гл. 13, [4], гл. IV, §§5,6).
8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса ([1], гл. 14, §114; [4], гл. VI, §3).
9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе ([1], гл. 15, §115; [3], гл. 9, §4).
10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта ([4], гл. V, §4; [7], гл. II, гл. V, §2).
11. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности ([1], гл. 14, §108; [2], гл. 3, §§1,2,4,5; [3], гл. 11, §§1-4).
12. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа ([4], гл. II, §2; [5], гл. II, §5).
13. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевй алгебрах ([4], гл. IV, §8; [5],], гл. IV).

Список литературы

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.
3. Винберг Э.Б. М., Курс алгебры. М., "Факториал Пресс", 1001.
4. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
5. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970
6. Ленг С. Алгебра. М., Мир, 1968.
7. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.

Часть 3.

Теория чисел

1. Квадратичный закон взаимности ([2], пп. 1, 2).
2. Первообразные корни и индексы ([2], гл. 6).
3. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$ ([3], гл. 1, п. 4; [8], гл.7 пп. 1-3).
4. Дзета-функция Римана. Асимпточтический закон распределения простых чисел. ([3], гл. 2, пп. 1-3); [4], гл. 5, пп. 1,2).
5. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. ([2], гл. 7; [3], гл. 3, пп. 4, 5; [8], гл. 10, пп. 2-5).
6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений. ([1], гл. 1, пп. 1, 2; [6], гл. 1, пп. 3, 4).
7. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена. ([5], гл. 1, пп. 1-3; [6], гл. 3, п. 19).

8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм. ([7], гл. 7, пп. 1-3).
9. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами. ([7], гл. 7, пп. 4,6).
10. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел ([3], гл. 4, пп. 2, 3).
11. Трансцендентность чисел e и π. ([3], гл. 4, пп. 4, 5).

Литература

1. Боревич З.И., Шафаревич И.Р., Теория чисел. М., Наука, 1985.
2. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М., Наука, 1981.
3. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. М., МГУ, 1995.
4. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М., Наука, 1983.
5. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М., Наука, 1985.
6. Коробков Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. М., Наука, 1989.
7. Серр Ж.П., Курс арифметики. М., Мир, 1972.
8. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М., Мир, 1974.

ВОПРОСЫ БИЛЕТОВ

Часть 1.

Математическая логика и теория алгоритмов.

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу. Тезис Чёрча.
2. Понятие алгоритма и его уточнения. Частично рекурсивные функции.
3. Рекурсивно перечислимые и рекурсивные (разрешимые) множества. Их свойства.
4. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества.
5. Алгоритмические проблемы. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.
6. Классы P и PN. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи.
7. Теорема об NP-полноте задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ.
8. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
9. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.
10. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.
11. Исчисление предикатов. Непротиворечивость.
12. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.
13. Полнота исчисления предикатов.
14. Теорема Мальцева о компактности.
15. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.
16. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.
17. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).
18. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики.
19. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.

20. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики.
21. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для логики предикатов.
22. Аксиоматическая теория множеств.
23. Порядковые числа, принцип тринсфинитной индукции. Аксиома выбора.

Часть 2.

Алгебра

1. Теоремы Силова.
2. Простота группы A_n , $n \geq 5$.
3. Простота группы SO_3.
4. Евклидовы кольца – кольца главных идеалов. Факториальность колец главных идеалов.
5. Основные понятия теории модулей: теорема о гомоморфизме; свободные модули; циклические модули над кольцом главных идеалов.
6. Теорема о строении конечно порожденных модулей над евклидовым кольцом.
7. Следствия основной теоремы о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом для групп и линейных операторов.
8. Свободные группы и определяющие соотношения. Подгруппы свободных групп.
9. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
10. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.
11. Радикал кольца, его нильпотентность в артиновых кольцах.
12. Теорема плотности.Простые и полупростые кольца с условием минимальности.
13. Группа Брауэра.
14. Теорема Фробениуса об алгебрах с делением.
15. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
16. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли Примеры простых алгебр Ли.
17. Теорема Биркгофа-Витта.
18. Основные понятия теории линейных и матричных представлений: приводимость; изоморфизм; гомоморфизм.
19. Теорема Машке. Лемма Шура.
20. Регулярное представление. Кратность неприводимого представления.
21. Неприводимые представления абелевых групп. Одномерные представления.
22. Характеры представлений, их свойства. Следствия соотношения ортогональности.
23. Доказательство соотношений ортогональности.
24. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Примеры многообразий для основных алгебраических структур.
25. Теорема Биркгофа.
26. Решетки. Дедекиндовы решетки. Решетки идеалов в кольцах и нормальных подгрупп в группах.
27. Дистрибутивные решетки и булевы алгебры. Теорема Стоуна.

Часть 3.

Теория чисел

1. Квадратичный закон взаимности.
2. Первообразныве корни и индексы.
3. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.
4. Дзета-функции Римана и ее простейшие свойства в области $Rs > 1$ (Аналитичность, представление производной и логарифмической производной в виде ряда Дирихле, отсутствие нулей, тождество Эйлера).
5. Аналитическое представление дзета-функции.
6. Отсутствие нулей у дзета-функции на прямой $Rs = 1$.

7. Оценка логарифмической производжной $\zeta(s)$ в области $1 \leq Rs \leq 2, | \Im(s) | \geq 3$.
8. Сведение доказательства асимптотического закона к асимптотике комплексного интеграла.
9. Асимптотике комплексного интеграла в доказательстве асимптотического закона распределения простых чисел.
10. Характеры Дирихле, и их простейшие свойства.
11. L - функции Дирихле суммы характеров.
12. Доказательство утверждения $L(1, X) \neq 0$.
13. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
14. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы.
15. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
16. Критерий Вейля равномерного распределения.
17. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
18. Модулярная группа.
19. Ряды Эйзенштейна. Разложения в ряд Фурье.
20. Модулярные формы.Теорема о строении алгебры модулярных форм.
21. Модулярный инвариант, поле модулярных функций.
22. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
23. Приближение вещественных чисел рациональными числами. Теорема Дирихле.
24. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
25. Трансцендентность числа . *e*.
26. Трансцендентность π.