Л.1

1. АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

Читателю должно быть известно, что конечно порождённые абелевы группы устроены просто — они раскладываются в прямое произведение циклических. Цель этой главы немного познакомить читателя с не конечно порождёнными абелевыми группами. Их строение, как мы увидим, может быть гораздо более сложным и более интересным.

1.1. Прямые и декартовы суммы. Свободные абелевы группы

Декартовой суммой групп G_i, $i \in I$, называют множество функций

$$\overline{\bigoplus_{i\in I}} G_i \overset{\text{опр}}{=} \left\{ f\colon I \to \bigcup_{i\in I} G_i \;\middle|\; f(i) \in G_i \right\}$$

с поточечным сложением. *Прямой суммой* $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i$, групп G_i, $i \in I$ называют подгруппу декартовой суммы этих групп, состоящую из функций с конечным носителем. Другими словами можно сказать, что прямая сумма G_i есть множество всех конечных формальных сумм $\{g_{i_1} + \ldots + g_{i_k} \mid g_i \in G_i \setminus \{0\}\}$ с естественным сложением (здесь мы считаем, что группы G_i попарно не пересекаются).

Свободной абелевой группой $F(X)$ *с базисом* X (где X — это некоторое множество) называют множество всевозможных конечных формальных сумм $\{n_{i_1}x_{i_1}+\ldots+n_{i_k}x_{i_k} \mid x_i \in X,\ n_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ с естественным сложением. Свободная абелева группа с базисом X изоморфна прямой сумме $|X|$ копий бесконечной циклической группы. Основное свойство свободных групп состоит в том, что всякая абелева группа G является факторгруппой свободной абелевой группы. Действительно, отображение $\varphi\colon F(G) \to G$, переводящее формальную сумму $n_{i_1}g_{i_1} + \ldots + n_{i_k}g_{i_k}$ в сумму $n_{i_1}g_{i_1} + \ldots + n_{i_k}g_{i_k}$ в группе G, является сюръективным гомоморфизмом и, следовательно, $G \simeq F(G)/\ker\varphi$.

1.2. Полные группы и пополнения

Группу G называют *полной* (или *делимой*) если для каждого элемента $g \in G$ и каждого натурального числа n найдётся такой элемент $x \in G$, что $nx = g$, то есть из каждого элемента извлекается корень любой степени. Следующие свойства полных групп (почти) очевидны:

- группа, в которой из каждого элемента извлекается корень каждой простой степени, является полной;
- факторгруппы, прямые слагаемые, прямые и декартовы суммы полных групп являются полными;
- группа, являющаяся объединением возрастающей цепочки своих полных подгрупп, является полной.

Теорема 1.2. *Каждая абелева группа вкладывается в полную абелеву группу.*

Доказательство. Действительно, бесконечная циклическая группа $\mathbb{Z}$ очевидным образом вкладывается в полную абелеву группу $\mathbb{Q}$. Следовательно, всякая свободная абелева группа F, будучи прямой суммой бесконечных циклических, вкладывается в полную группу $\widehat{F} \supset F$, являющуюся прямой суммой нескольких экземпляров группы $\mathbb{Q}$. Произвольная абелева группа G является факторгруппой свободной абелевой группы: $G \simeq F/N$. Рассмотрим естественной отображение $F \to \widehat{F}/N$. Подгруппа N является ядром этого отображения, следовательно, группа $G \simeq F/N$ изоморфна образу этого отображения, который является подгруппой полной группы $\widehat{F}/N$.

Пополнением абелевой группы G назовём полную абелеву группу $\widehat{G}$, содержащую G в качестве подгруппы и обладающую тем свойством, что никакая собственная (то есть отличная от $\widehat{G}$) полная подгруппа группы $\widehat{G}$ не содержит G. Другими словами, пополнение группы G — это минимальная полная группа, содержащая G.

Нашей ближайшей целью будет доказательство существования и единственности пополнения произвольной абелевой группы. Как ни странно, доказать это не так просто; нам понадобятся некоторые дополнительные теоретико-множественные инструменты.

1.3. Аксиома выбора и лемма Цорна

Аксиомой выбора называют следующее утверждение:

Аксиома выбора. *Пусть X — некоторое множество попарно непересекающхся непустых множеств. Тогда существует такое множество C, что для каждого $x \in X$, множество $C \cap x$ состоит ровно из одного элемента.*

В начале XX века было сломано немало копий по поводу интуитивной очевидности и полезности этой аксиомы. На сегодняшний день известно, что

- ни аксиома выбора, ни её отрицание не следуют из остальных аксиом теории множеств;
- использование аксиомы выбора может привести к доказательству некоторых вещей, противоречащих нашей интуиции; например, из аксиомы выбора следует, что трёхмерный шар можно разрезать на конечное

число частей и, передвинув эти части, собрать из них два шара, равных исходному (парадокс Банаха–Тарского);
- отказ от аксиомы выбора приводит к сильному обеднению математики; например, без аксиомы выбора нельзя доказать, что всякое векторное пространство имеет базис, или что любые два базиса векторного пространства равномощны.

В настоящее время большинство математиков используют аксиому выбора в случае необходимости.

У аксиомы выбора имеется много эквивалентных формулировок, наиболее забавная из них звучит так:

Аксиома выбора (мультипликативная форма). *Декартово произведение непустых множеств непусто.*

Самая полезная для агебры версия аксиомы выбора называется леммой Цорна. Чтобы её сформулировать, нам понадобится несколько простых определений.

Частично упорядоченным множеством называется пара $(M, \leqslant)$, где M — это некоторое множество, а $\leqslant$ — некоторое бинарное отношение на M, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $x \leqslant y \;\&\; y \leqslant z \quad\Longrightarrow\quad x \leqslant z$;
2) $x \leqslant y \;\&\; y \leqslant x \quad\Longrightarrow\quad x = y$;
3) $x \leqslant x$.

Типичный пример частично упорядоченного множества представляет собой (какое-нибудь) множество множеств, упорядоченное по включению ($x \leqslant y \iff x \subseteq y$).

Линейно упорядоченным множеством называется частично упорядоченное множество, в котором любые два элемента сравнимы ($\forall x, y \;\; x \leqslant y$ или $y \leqslant x$).

Цепью в частично упорядоченном множестве называется его линейно упорядоченное подмножество. Подмножество S частично упорядоченного множества M называется *ограниченным* (сверху), если существует такой элемент $x \in M$, что $s \leqslant x$ для каждого $s \in S$.

Элемент x частично упорядоченного множества M называется *максимальным*, если в M нет элементов больших x (то есть $x \leqslant y \implies x = y$).

Лемма Цорна. *Если в непустом частично упорядоченном множестве M всякая цепь ограничена сверху, то в M существует максимальный элемент.*

Доказательство эквивалентности леммы Цорна и аксиомы выбора можно прочитать, например, в книге [Куро62] или в любой книге по теории множеств.

Пользоваться леммой Цорна очень удобно. Докажем, например, следующую теорему.

Теорема 1.3. *Всякое векторное пространство V имеет базис, то есть такое подмножество $B \subset V$, что всякий вектор из V выражается единственным образом как (конечная) линейная комбинация элементов B.*

Доказательство. Рассмотрим множество M всех линейно независимых подмножеств пространства V. Множество M, очевидно, непусто и упорядочено по включению. Причём всякая цепь $\{X_\alpha\} \subset M$ ограничена сверху множеством $\bigcup X_\alpha$, которое также является линейно независимым подмножеством пространства V, поскольку каждое из множеств X_α является линейно независимым (а в определении линейной независимости речь идёт, разумеется, о конечных линейных комбинациях). Таким образом, по лемме Цорна в пространстве V существует максимальное линейно независимое подмножество, которое и будет, очевидно, базисом V.

1.4. Существование и единственность пополнения. Полные подгруппы абелевых групп

Теорема 1.4.1. *Любые два пополнения абелевой группы G изоморфны между собой, причём этот изоморфизм может быть выбран тождественным на G.*

Доказательство. Пусть X и Y — два пополнения группы G. Рассмотрим множество всех тождественных на G изоморфизмов $\varphi\colon A \to B$ между подгруппами A и B групп X и Y, содержащими группу G. На этом непустом множестве имеется естественный частичный порядок: мы говорим, что изоморфизм $\varphi_1\colon A_1 \to B_1$ меньше или равен изоморфизма $\varphi_2\colon A_2 \to B_2$, если $A_1 \subseteq A_2$ и ограничение отображения φ_2 на A_1 совпадает с φ_1 (то есть φ_2 продолжает φ_1).

Всякая цепь $\{\varphi_i\colon A_i \to B_i\}$ ограничена сверху изоморфизмом $\varphi\colon \bigcup A_i \to \bigcup B_i$, определяемым (корректно!) формулой $\varphi\Big|_{A_i} = \varphi_i$.

Применяя лемму Цорна, мы приходим к выводу, что существует изоморфизм $\varphi\colon A \to B$, который нельзя продолжить ни на какую подгруппу группы X, большую чем A. Покажем, что это означает, что $A = X$. Действительно, в противном случае в силу полноты группы X и неполноты группы A существовал бы элемент $x \in X \setminus A$ такой, что $px \in A \setminus pA$ для некоторого простого p. Поскольку φ — изоморфизм, элемент $\varphi(px) \in B$ не лежит в pB, но (в силу полноты группы Y) может быть записан в виде py для некоторого $y \in Y \setminus B$. Формула $\psi(a+kx) = \varphi(a)+ky$ задаёт корректно определённый (проверьте!) изоморфизм ψ между подгруппами $A+\langle x\rangle$ и $B+\langle y\rangle$, продолжающий изоморфизм φ, что проиворечит максимальности последнего. Это противоречие показывает, что $A = X$. Следовательно, $B = Y$, поскольку $B \simeq A$ является полной подгруппой в Y, содержащей G. Таким образом, φ является искомым изоморфизмом между пополнениями X и Y группы G. Теорема доказана.