Л.10

3.6. Метабелевы группы

Никого из нас не удивляет, что разрешимые группы ступени 1, то есть абелевы группы, резко выделяются по своим свойствам среди всех разрешимых групп. Менее очевидно, что разрешимость ступени 2 также является особым случаем, а «общий случай» начинается со ступени 3. Двуступенно разрешимые группы, то есть группы с абелевым коммутантом, оказались настолько хороши, что заслужили специальное название: такие группы называют *метабелевыми*.*)

Теория метабелевых групп оказывается тесно связанной с теорией коммутативных колец и модулей над ними.

Напомним, что (правым) *модулем* над кольцом R с единицей называется пара — абелева группа M, записываемая аддитивно, и отображение $M \times R \to M$, называемое умножением и обладающее следующими естественными свойствами:
1) $(m_1 + m_2)r = m_1r + m_2r$;
2) $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$;
3) $m(r_1r_2) = (mr_1)r_2$;
4) $m \cdot 1 = m$,

где m, m_1, m_2 — произвольные элементы группы M, r, r_1, r_2 — произвольные элементы кольца R и 1 — единица кольца R.

Понятия *подмодуля, фактормодуля, конечно порождённого модуля, гомоморфизма* и *изоморфизма модулей* определяются естественным образом (см., например, [Куро62]).

Модуль над полем — это просто векторное пространство над этим полем; модули над другими кольцами могут быть устроены весьма сложно. Примерами модулей над кольцом R могут служить (правые) идеалы кольца R, а также идеалы колец, содержащих R в качестве подкольца. Последний пример является универсальным.

Утверждение 3.6.1. *Каждый модуль M над кольцом R изоморфен (как модуль) некоторому идеалу в некотором большем кольце $\widehat{R} \supseteq R$. Кольцо $\widehat{R}$ коммутативно и ассоциативно, если таковым является исходное кольцо R. Если кольцо R и модуль M конечно порождены, то и кольцо $\widehat{R}$ можно считать конечно порожденным.*

Доказательство. Если кольцо R коммутативно, то в качестве $\widehat{R}$ можно взять множество формальных сумм $\{r+m\ ;\ r \in R, \forall m \in M\}$, которые складываются естественным образом, а умножаются по правилу $(r+m)(r_1+m_1) = rr_1 + (mr_1 + m_1r)$. Другими словами, $\widehat{R}$ представляет собой кольцо матриц

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad \text{где } r \in R,\ m \in M.$$

Непосредственная проверка показывает, что кольцо $\widehat{R}$ обладает всеми нужными свойствами.

Построение кольца $\widehat{R}$ в некоммутативном случае мы оставляем читателю (некоммутативные кольца нам не понадобятся).

Утверждение 3.6.2. *Пусть $(G,\cdot)$ — метабелева группа, $(G',+)$ — её коммутант, групповую операцию в котором мы записываем аддитивно, а $\mathbb{Z}[G/G']$ — целочисленное групповое кольцо факторгруппы G/G'. Тогда следующая формула корректно задаёт на $(G',+)$ структуру модуля над $\mathbb{Z}[G/G']$:*

$$g'\left(\sum n_i g_i G'\right) = \sum n_i (g')^{g_i}, \quad \text{где } g' \in G',\ g_i \in G,\ n_i \in \mathbb{Z} \text{ — произвольные элементы.}$$

При этом подмодулем, порождённым данным множеством $X \subseteq G'$, оказывается в точности нормальная подгруппа $\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$ группы G.

Доказательство. Лёгкая проверка, которую мы оставляем читателю.

Кольцо называется *нётеровым* (справа), если каждый (правый) идеал в нём конечно порождён как (правый) идеал (или, что то же самое, конечно порождён как модуль). Другими словами, нётерово кольцо — это такое кольцо, в котором всякая возрастающая цепочка идеалов стабилизируется на конечном шаге, то есть кольцо удовлетворяет условию max для идеалов. Следующая теорема лежит в основе коммутативной алгебры.

Теорема Гильберта о базисе. *Кольцо многочленов от конечного числа переменных над нётеровым ассоциативным коммутативным кольцом с единицей нётерово.*

Доказательство этой теоремы можно найти почти в любом учебнике по алгебре.

Следствие 3.6.1. *Конечно порождённое коммутативное ассоциативное кольцо с единицей нётерово.*

Доказательство. Ясно, что всякое такое кольцо является факторкольцом кольца $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, которое нётерово по теореме Гильберта. Осталось заметить, что нётеровость сохраняется при переходе к факторкольцам.

Модуль называется *нётеровым*, если каждый подмодуль в нём конечно порождён. Другими словами, нётеров модуль — это такой модуль, в котором всякая возрастающая цепочка подмодулей стабилизируется на конечном шаге, то есть модуль удовлетворяет условию max для подмодулей.

---

*) В старой литературе, например в книге [Куро67], можно встретить употребление слова «метабелевость» в смысле нильпотентность ступени 2. В настоящее время приставка *мета-* употребляется в следующем смысле: если группа G является расширением группы со свойством $\mathcal{P}$ при помощи группы со свойством $\mathcal{P}$, то говорят, что группа G обладает свойством *мета-$\mathcal{P}$*. Например, *метанильпотентная* группа — это расширение нильпотентной группы при помощи нильпотентной (но вместо «мета-абелева группа» почти всегда говорят «метабелева группа»).

Следствие 3.6.2. *Конечно порождённый модуль над конечно порождённым коммутативным ассоциативным кольцом с единицей нётеров.*

Доказательство. Утверждение 3.6.1 показывает, что это следствие вытекает из предыдущего.

Вернёмся теперь к группам. Мы видели (пример 3.2.1), что не всякая метабелева конечно порождённая группа нётерова. Однако из теоремы Гильберта выводится несколько более слабое свойство метабелевых групп.

Группу называют удовлетворяющей *условию максимальности для нормальных подгрупп*, или *нётеровой по нормальным подгруппам*, если каждая нормальная подгруппа в ней конечно порождена как нормальная подгруппа; другими словами, всякая возрастающая цепочка нормальных подгрупп стабилизируется на конечном шаге.

Теорема 3.6.1. *Каждая метабелева конечно порождённая группа является нётеровой по нормальным подгруппам.*

Доказательство. Пусть G — конечно порождённая метабелева группа и N — её нормальная подгруппа. Мы хотим доказать, что N конечно порождена как нормальная подгруппа. Ясно, что $N/(N\cap G')$ конечно порождена, поскольку является подгруппой конечно порождённой абелевой группы G/G'. Осталось доказать, что $N\cap G'$ конечно порождена как нормальная подгруппа. Перейдя на язык модулей с помощью утверждения 3.6.2, мы видим, что нам надо установить конечную порождённость подмодуля $N\cap G'$ модуля G'. Но модуль G' является конечно порождённым, поскольку порождается всевозможными коммутаторами образующих группы G. Для завершения доказательства осталось сослаться на следствие 3.6.2.

Пример 3.2.2 показывает, что конечно порождённые разрешимые ступени 3 группы не обязаны быть финитно аппроксимируемыми. Естественно спросить, а как в этом смысле обстоит дело с метабелевыми группами? Оказывается, что с метабелевыми группами всё в порядке.

Теорема 3.6.2. *Каждая метабелева конечно порождённая группа является финитно аппроксимируемой.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся ещё некоторые сведения из коммутативной алгебры. Сначала мы докажем, что каждое конечно порождённое ассоциативное коммутативное кольцо является финитно аппроксимируемым. Идея излагаемого ниже простого доказательства принадлежит Е. С. Голоду.

Напомним, что собственный идеал I кольца R называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом собственном идеале. Факторкольцо R/I ассоциативного коммутативного кольца R с единицей по максимальному идеалу I является полем.

Аналогично, ненулевой идеал I кольца R называется *минимальным*, если он не содержит ненулевых собственных подидеалов (то есть является неприводимым как модуль). Идеал I называется *наименьшим*, если он содержится в каждом ненулевом идеале кольца R.

Идеал I называется нильпотентным, если $I^n=\{0\}$ при некотором натуральном n. В случае конечно порождённого идеала коммутативного кольца это условие эквивалентно нильпотентности каждого элемента $y\in I$.

Лемма 3.6.1. *Пусть R — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, xR — минимальный идеал в R. Тогда*
1) *$I=\operatorname{Ann}x$ — максимальный идеал;*
2) *если кольцо R нётерово, а идеал xR наименьший, то идеал I нильпотентный.*

Доказательство.
1) Если $\operatorname{Ann}x\subset J\lhd R$, то $0\neq xJ=xR$, т.е. $R=J+\operatorname{Ann}x=J$.
2) Если некоторый $y\in I$ ненильпотентен, то $x=r_ky^k$ для всех натуральных k и некоторых $r_k\in R$. Но
$$\sum_{k=1}^{\infty}r_kR=\sum_{k=1}^{n}r_kR$$
для некоторого n. В частности,
$$r_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_kr_k,\quad x=r_{n+1}y^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_kr_ky^{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_kxy^{n+1-k}=\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot 0=0.$$
Это противоречие показывает, что все элементы идеала I являются нильпотентными. Следовательно, сам идеал I также является нильпотентным в силу его конечной порождённости.

Лемма 3.6.2. *Конечно порождённое кольцо, являющееся полем, конечно.*

Доказательство. Любое бесконечное поле F является алгебраическим расширением своего подполя P, которое изоморфно либо полю рациональных чисел, либо полю рациональных дробей над некоторым другим полем (см. [Ленг68]). Поскольку конечно порождённое алгебраическое расширение F поля P является конечномерным над P, из конечной порождённости F следует конечная порождённость поля P. Однако нетрудно сообразить, что ни поле рациональных дробей, ни поле $\mathbb{Q}$ не может быть конечно порождено как кольцо.

Теорема 3.6.3. *Конечно порождённое ассоциативное коммутативное кольцо с единицей финитно аппроксимируемо.*

Доказательство. Пусть x — произвольный ненулевой элемент кольца S. Мы хотим показать, что существует гомоморфизм кольца S на конечное кольцо, переводящий элемент x не в ноль. Кольцо S можно профакторизовать по максимальному идеалу, не содержащему элемента x (такой идеал существует по лемме Цорна). Получившееся кольцо $R=S/I$ будет конечно порождённым ассоциативным коммутативным кольцом с единицей, в котором каждый ненулевой идеал содержит элемент x.

Таким образом, достаточно доказать, что конечно порождённое ассоциативное коммутативное кольцо R с наименьшим идеалом xR конечно. Идеал $I=\operatorname{Ann}x$ является максимальным (по лемме 3.6.1). Факторкольцо R/I является конечно порождённым, а значит конечным (по лемме 3.6.2), полем. Факторы I^i/I^{i+1} являются конечномерными векторными пространствами над этим полем, и $I^n=\{0\}$ для некоторого n (в силу леммы 3.6.1). Значит,
$$|R|=|R/I|\cdot|I/I^2|\cdot\ldots\cdot|I^{n-1}/I^n|,$$
что и доказывает теорему.