Л.11 Теперь мы готовы доказать локальную финитную аппроксимируемость метабелевых групп.

Доказательство теоремы 3.6.2. Пусть G — конечно порождённая метабелева группа и g — её неединичный элемент. Мы хотим построить гомоморфизм $f\colon G \to K$ на конечную группу, переводящий элемент g не в единицу.

Если $g \notin G'$, то в качестве такого гомоморфизма можно взять композицию естественного гомоморфизма $G \to G/G'$ и подходящего отображения группы $G/G' \to K$ (такое отображение найдётся, поскольку все мы знаем, что конечно порождённая абелева группа G/G' финитно аппроксимируема).

Если $g \in G'$, то мы возьмём подмодуль конечного индекса S в $\mathbb{Z}[G/G']$-модуле G'. Такой подмодуль S, не содержащий g, найдётся в силу следствия 3.6.3. Этот S является, другими словами, нормальной подгруппой в G, содержащейся в коммутанте и имеющей в нём конечный индекс. Рассмотрим факторгруппу G/S. Эта группа имеет конечный коммутант G'/S и, следовательно, по теореме 2.5.2 является почти абелевой. Осталось вспомнить, что почти финитно аппроксимируемые и конечно порождённые абелевы группы являются финитно аппроксимируемыми, и воспользоваться тем, что подгруппа конечного индекса конечно порождённой группы конечно порождена.*)

Другим применением локальной финитной аппроксимируемости коммутативных колец может служить следующая известная теорема А.И. Мальцева.

Теорема 3.6.4. *Конечно порождённая линейная группа финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть $G = \langle g_1, \ldots, g_k\rangle \subseteq \mathbf{GL}_n(F)$ — конечно порождённая группа. Рассмотрим кольцо R, порождённое в поле F всеми элементами всех матриц $g_1^{\pm1}, \ldots, g_k^{\pm1}$. Ясно, что это кольцо является конечно порождённым ассоциативным коммутативным кольцом с единицей; значит (по теореме 3.6.3), кольцо R является финитно аппроксимируемым. Ясно также, что $G \subseteq \mathbf{GL}_n(R)$. Осталось заметить, что группа обратимых матриц над финитно аппроксимируемым кольцом финитно аппроксимируема. Действительно, пусть $A \in \mathbf{GL}_n(R)$ — неединичная матрица, a_{ij} — её элемент, отличающийся от соответствующего элемента δ_{ij} единичной матрицы, и $I \triangleleft R$ — идеал конечного индекса, не содержащий разности $a_{ij} - \delta_{ij}$ (такой идеал существует в силу финитной аппроксимируемости кольца R). Тогда естественный гомоморфизм $\mathbf{GL}_n(R) \to \mathbf{GL}_n(R/I)$ переводит матрицу A в неединичную матрицу, что и завершает доказательство теоремы.

3.7. Периодические группы

Существуют ли конечно порождённые бесконечные группы, в которых порядок каждого элемента конечен? Или, выражаясь более учёным языком, *следует ли локальная конечность из периодичности?*

Этот вопрос, заданный В. Бернсайдом в 1902 году, ныне принято называть *неограниченной проблемой Бернсайда.* Попытки многих математиков решить эту задачу привели к разработке новых методов, которые потом применялись при решении других вопросов. В книге [ЧаМа85] отмечается, что влияние проблемы Бернсайда на теорию групп аналогично влиянию Последней теоремы Ферма на теорию чисел, а в книге [КаМе82] примеры периодических не локально конечных групп сравниваются с образцами лунного грунта.

Первый такой «образец» удалось добыть Е.С. Голоду в 1964 году (см. [КаМе82]). Позже были построены примеры С.В. Алёшина, Р.И. Григорчука и др. В каждом из этих примеров порядки элементов конечны, но не ограничены в совокупности; таким образом, построенные группы были периодическими но их период был бесконечен.

Ещё более трудным оказался другой вопрос Бернсайда, называемый сейчас *ограниченной проблемой Бернсайда***): *При каких m и n существует бесконечная m-порождённая группа периода n, то есть такая группа G, что $g^n = 1$ при всех $g \in G$?*

В настоящее время конечность каждой конечно порождённой группы периода n известна для следующих показателей:

$n = 1$ (шутка),
$n = 2$ (лёгкое упражнение),
$n = 3$ (это доказал сам Бернсайд в 1902 году, см. [МаКаСо74]),
$n = 4$ (теорема Де Сегье 1903 г., см. [МаКаСо74]),
$n = 6$ (теорема М.Холла 1940 г., см. [Холл62]).

Первый пример бесконечной конечно порождённой группы ограниченного периода был построен в 1968 году П.С. Новиковым и С.И. Адяном. Более того, они показали, что для каждого нечётного показателя $n \geqslant 4381$ существует бесконечная 2-порождённая группа периода n. Позже С.И. Адяну удалось несколько упростить доказательство и заменить оценку 4381 на 665, см. [Адян75]. Тем не менее доказательство теоремы Новикова–Адяна остаётся, по мнению авторов книги [ЧаМа85], «возможно, самой трудной для чтения среди всех работ

*) Смотрите сноску на странице 14.

**) Не путайте с *ослабленной проблемой Бернсайда*, о которой пойдёт речь в упражнениях.

по математике, которые когда-либо были написаны». Более простое доказательство (но с ухудшенной оценкой $n > 10^{10}$), основанное на геометрических идеях, можно найти в [Ольш89].

Случай большого чётного n оказался ещё более трудным. Лишь в 1990-х годах С.В. Иванову и И.Г. Лысёнку (независимо) удалось показать, что утверждение теоремы Новикова–Адяна остаётся справедливым для всех достаточно больших чётных показателей n. Таким образом, ограниченная проблема Бернсайда решена почти для всех показателей n.

В наше время никого нельзя удивить примерами периодических не локально конечных групп (равно как и образцами лунного грунта). Сейчас известно, что бывают группы с гораздо более ужасными свойствами.*) Однако решение проблемы Бернсайда для показателя 5 (или, например, 50) вызвало бы сенсацию. Мы докажем здесь гораздо более простую теорему.

Утверждение 3.7.1. *Каждая разрешимая периодическая группа локально конечна.*

Доказательство. Коммутант нетривиальной разрешимой группы имеет меньшую ступень разрешимости, а факторгруппа по коммутанту является периодической абелевой группой, которая, очевидно, локально конечна. Поэтому для доказательства утверждения по индукции достаточно установить, что класс локально конечных групп замкнут относительно расширений.

Теорема 3.7 (Теорема Шмидта**)). *Расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы локально конечно.*

Доказательство. Пусть B — нормальная подгруппа некоторой группы G, группы B и G/B локально конечны и H — конечно порождённая подгруппа группы G. Мы хотим показать, что H конечна. Группа H является расширением группы $H \cap B$ при помощи $H/(H \cap B)$. Эта группа $H/(H \cap B)$ конечна, поскольку она является конечно порождённой подгруппой локально конечной группы G/B. Осталось показать, что группа $H \cap B$ конечна. Поскольку эта группа является подгруппой локально конечной группы B, достаточно установить конечную порождённость группы $H \cap B$. Но $H \cap B$ имеет конечный индекс в H. Поэтому доказываемая теорема вытекает из следующего утверждения, которым мы уже неоднократно пользовались в этой книге.

Утверждение 3.7.2. *Подгруппа конечного индекса конечно порождённой группы конечно порождена.*

Доказательство. Пусть группа G порождается конечным множеством X, H — подгруппа конечного индекса группы G и Y — (конечное) множество представителей левых смежных классов группы G по подгруппе H. Без ограничения общности (увеличивая, если надо, множество X) мы можем считать, что $X = X^{-1}$ и $1 \in Y \subseteq X$. Каждое произведение образующих xx', где $x, x' \in X$, представляется в виде $xx' = yz$, где $y \in Y$ и $z \in H$ (поскольку Y есть множество представителей смежных классов). Множество всех $z \in H$, возникающих в таких разложениях, обозначим буквой Z. Другими словами, $Z = \{\overline{xx'}^{-1} xx' \; ; \; x, x' \in X\}$, где $\overline{g} \in Y$ есть представитель класса gH.

Покажем, что (конечное!) множество $Z \subseteq H$ порождает подгруппу H. Действительно, каждый элемент $h \in H$ можно выразить через элементы множества X: $h = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n$, где $x_i \in X$. Произведение двух последних сомножителей можно представить так: $x_{n-1} x_n = y_1 z_1$. Произведение $x_{n-2} y_1$ можно представить как $y_2 z_2$. Продолжая этот процесс, мы получим

$$h = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n = x_1 x_2 \ldots x_{n-2} y_1 z_1 = x_1 x_2 \ldots x_{n-3} y_2 z_2 z_1 = \ldots = y \prod z_i'.$$

Осталось заметить, что $y = 1$, поскольку y является представителем элемента $h \in H$. Тем самым утверждение 3.7.2, а также теорема 3.7 и утверждение 3.7.1, доказаны.

---

*) Например, А.Ю. Ольшанским было доказано существование так называемых *монстров Тарского* — бесконечных групп, все нетривиальные собственные подгруппы которых являются циклическими группами одного и того же простого порядка. О монстрах Тарского и других удивительных группах можно прочитать в книге [Ольш89].

**) Герой Советского Союза Отто Юльевич Шмидт (1891-1956) был знаменитым исследователем Арктики, организатором Северного морского пути, автором одной из самых известных гипотез об образовании Солнечной системы, основателем Геофизического института, государственным деятелем. При этом Отто Юльевич почти всю жизнь занимался алгеброй (даже в полярных экспедициях). Он написал первый учебник по теории групп на русском языке, основал кафедру алгебры МГУ и московский алгебраический семинар.

Теорема Шмидта, которую мы здесь доказываем, весьма проста. Читатель может захотеть самостоятельно доказать более трудные результаты, принадлежащие этому легендарному человеку:

- *Каждая группа, обладающая главным рядом (в частности, каждая конечная группа), раскладывается в прямое произведение неразложимых групп однозначно с точностью до изоморфизма.* (см. [Куро67]).
- *Группа $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ — это единственная квазиконечная 2-группа.* (Как показал Ольшанский, ни для какого нечётного простого числа аналогичное утверждение не верно, см. [Ольш89]).

4. ТОЖДЕСТВА

4.1. Многообразия: определение и примеры. Теорема Биркгофа

Групповым тождеством принято называть формальное выражение вида

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} = 1, \quad \text{где } x_i \text{ — (не обязательно разные) буквы некоторого алфавита } X \text{ и } \varepsilon_i \in \{\pm 1\}. \qquad (*)$$

Говорят, что тождество $(*)$ выполнено в группе G, если для любого отображения $f\colon X \to G$ в группе G выполнено равенство $f(x_1)^{\varepsilon_1} f(x_2)^{\varepsilon_2} \ldots f(x_n)^{\varepsilon_n} = 1$; другими словами, равенство $(*)$ выполнено в группе G тождественно. Класс всех групп, в которых выполнен данный набор тождеств, называется *многообразием*, задаваемым этим набором тождеств. Многие важные классы групп задаются тождествами, то есть являются многообразиями.

Пример 4.1.1. Тождество $[x, y] = 1$ задаёт многообразие абелевых групп.

Пример 4.1.2. Тождество $x^n = 1$ задаёт многообразие групп периода n.

Пример 4.1.3. Пара тождеств $[x, y] = 1$ и $x^n = 1$ задаёт многообразие абелевых групп периода n.

Пример 4.1.4. Тождество $[x_1, \ldots, x_n] = 1$ задаёт многообразие нильпотентных групп ступени $n - 1$.

Пример 4.1.5. Класс разрешимых групп ступени n также является многообразием. Например, класс метабелевых групп задаётся тождеством $[[x, y], [z, t]] = 1$.

Пример 4.1.6. Отметим ещё, что класс всех групп является многообразием, задаваемым тождеством $1 = 1$ (или даже пустым множеством тождеств), а многообразие, состоящее из одной только тривиальной группы, задаётся тождеством $x = 1$.

Непосредственно из определения видно, что каждое многообразие является *абстрактным классом групп*, в том смысле, что вместе с каждой группой G этот класс содержит все группы, изоморфные группе G. Кроме того, понятно, что всякое многообразие содержит тривиальную группу и замкнуто относительно взятия подгрупп, факторгрупп и декартовых произведений. На самом деле верно и обратное.

Теорема Биркгофа. *Абстрактный непустой класс групп является многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп, факторгрупп и декартовых произведений.*

Доказательство. Нужно доказать, что каждый класс групп $\mathcal{K}$, замкнутый относительно указанных операций, задаётся тождествами. Другими словами, мы хотим показать, что класс $\mathcal{K}$ содержит каждую группу G, в которой выполнены все тождества, выполненные в классе $\mathcal{K}$. (Мы говорим, что тождество выполнено в некотором классе групп, если это тождество выполнено в каждой группе из этого класса.)

Возьмём некоторый алфавит X и отображение $\varphi\colon X \to G$ такое, что $\langle \varphi(X) \rangle = G$ (то есть мы выбираем систему образующих в G).

Рассмотрим множество W всех тождеств в алфавите X, НЕ выполненных в классе $\mathcal{K}$, то есть выполненных не во всех группах из $\mathcal{K}$. Пусть тождество $w \in W$ не выполнено в группе $G_w \in \mathcal{K}$ и $f_w\colon X \to G_w$ — тот набор элементов, на которых это тождество нарушается: $w(f_w(X)) \neq 1$ в G_w. Рассмотрим декартово произведение D всех групп G_w, где $w \in W$. Для каждого $x \in X$ рассмотрим элемент

$$d_x = \prod_{w \in W} f_w(x) \in D,$$

то есть элемент, у которого координата с номером w равна $f_w(x)$. Возьмём группу $F = \langle d_x\ ;\ x \in X \rangle \subseteq D$. Группа F лежит в классе $\mathcal{K}$ в силу замкнутости этого класса относительно декартовых произведений и подгрупп. Рассмотрим отображение $\Phi\colon F \to G$, заданное на образующих формулой $\Phi(d_x) = \varphi(x)$. В явном виде это отображение имеет вид

$$\Phi\colon \prod_i d_{x_i}^{k_i} \mapsto \prod_i (\varphi(x_i))^{k_i}.$$

Покажем, что эта формула корректна.

$$\text{Если } \prod_i d_{x_i}^{k_i} = \prod_i d_{x'_i}^{k'_i}, \quad \text{то равенство} \prod_i {x_i}^{k_i} = \prod_i (x'_i)^{k'_i} \text{ является тождеством в } \mathcal{K},$$

поскольку, если бы это равенство лежало в W, то равенство $\prod d_{x_i}^{k_i} = \prod d_{x'_i}^{k'_i}$ нарушалось бы на соответствующей координате. Раз мы имеем дело с тождеством в классе $\mathcal{K}$, это тождество выполнено и в G. Значит,

$$\prod_i (\varphi(x_i))^{k_i} = \prod_i (\varphi(x'_i))^{k'_i}$$

и Φ — корректно определённый эпиморфизм. Таким образом, группа G оказалась факторгруппой подгруппы декартова произведения групп из класса $\mathcal{K}$, что и требовалось доказать.