Л.13

1. ГРАФЫ КЭЛИ

1.1. Графы

Графом (точнее, *ориентированным графом*) называют четвёрку $\Gamma = (V, E, \alpha, \omega)$, где V и E — некоторые множества, элементы которых называют, соответственно, *вершинами* и *рёбрами* графа Γ, а α и ω — некоторые отображения из E в V. При этом вершину $\alpha(e)$ называют *началом* ребра e, а вершину $\omega(e)$ называют *концом* ребра e; иногда ещё говорят, что ребро e *соединяет* вершины $\alpha(e)$ и $\omega(e)$, или *ведёт* (*идёт*) из $\alpha(e)$ в $\omega(e)$.

Графы принято изображать в виде рисунков, на которых вершины изображены точками, а рёбра — дугами со стрелочками. На рисунке 1 представлены примеры графов.

Множества вершин и рёбер графа Γ мы будем обозначать $V(\Gamma)$ и $E(\Gamma)$ соответственно.

Раскраской графа Γ мы называем (произвольное) отображение $\lambda: E(\Gamma) \to X$, где X — произвольное множество (множество цветов). На рисунках рёбра раскрашенного графа изображаются разноцветными дугами, или (если цветных карандашей под рукой нет) помечаются буквами из множества X.

Таким образом, графы можно рассматривать как алгебраические объекты, подобные группам, кольцам, векторным пространствам и т.п. Например, естественным образом определяются понятия подграфа и морфизма графов.

Подграф графа Γ — это пара подмножеств $(V' \subseteq V, E' \subseteq E)$ такая, что начало и конец всякого ребра из E' лежат в V'. *Морфизмом* $f: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ из графа Γ_1 в граф Γ_2 называют такую пару отображений $f_V: V(\Gamma_1) \to V(\Gamma_2)$ и $f_E: E(\Gamma_1) \to E(\Gamma_2)$, что $f_V(\alpha(e)) = \alpha(f_E(e))$ и $f_V(\omega(e)) = \omega(f_E(e))$ для любого ребра $e \in E(\Gamma_1)$; если речь идёт о морфизмах раскрашенных графов, то к этому определению добавляют ещё требование сохранения цвета. Очевидным образом определяются понятия *изоморфизма* графов и *автоморфизма* графа. Множество всех автоморфизмов данного графа Γ (равно как и множество автоморфизмов чего угодно) образует группу относительно композиции. Эта группа обозначается $\operatorname{Aut}\Gamma$.

Говорят, что ребро *инциндентно* вершине, если эта вершина является либо началом, либо концом этого ребра. *Кратностью* (*степенью, валентностью*) вершины называют число инциндентных ей рёбер. Граф называют *конечным*, если конечно число его рёбер (а значит, и число его вершин). Граф называют *локально конечным*, если кратность каждой его вершины конечна.

Две вершины a и b графа Γ называются *соседними*, если они соединены ребром (то есть существует ребро с началом в вершине a и концом в b или наоборот). Граф Γ называют *связным*, если для любых двух его вершин a и b найдётся такая (конечная) последовательность вершин $v_0, v_1, \dots, v_n$, что $v_0 = a$, $v_n = b$ и вершины v_i и v_{i+1} являются соседними для всех $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Мы называем граф *отрезком длины* n (где $n \in \mathbb{N}$), если он связный, имеет ровно n рёбер, а все его вершины кроме ровно двух имеют кратность 2 (при этом оставшиеся две вершины обязаны иметь кратность 1). Мы будем всегда предполагать, что в отрезке одна из двух вершин кратности 1 выделена и называется *началом отрезка*; вторую вершину кратности 1 мы будем называть *концом отрезка*. Если в отрезке I фиксировать начало по-другому (поменять местами начало и конец), то получившийся отрезок I^{-1} мы будем называть *обратным* к отрезку I. Граф, состоящий из одной вершины и не имеющий рёбер, мы считаем отрезком длины 0 (считая при этом, что его начало и конец совпадают).

Композицией двух отрезков I_1 и I_2 мы называем отрезок I_1I_2, получающийся «приклеиванием» конца отрезка I_1 к началу отрезка I_2. При этом началом композиции I_1I_2 мы считаем начало отрезка I_1, а концом композиции мы считаем конец отрезка I_2. Ясно, что длина композиции равна сумме длин исходных отрезков.

Путём в графе Γ мы называем морфизм $f: I \to \Gamma$ из некоторого отрезка I в граф Γ. *Длиной пути* f называют длину отрезка I, а *началом* и *концом пути* f называют вершины a и b графа Γ, являющиеся образами начала и конца отрезка I соответственно. При этом мы будем говорить, что путь f *соединяет* вершины a и b, или *ведёт* (*идёт*) из вершины a в вершину b. Путь f, рассматриваемый как путь, определённый на отрезке, обратном к I, мы называем обратным путём и обозначаем f^{-1}; так что $f^{-1}: I^{-1} \to \Gamma$.* Ясно, что начало обратного пути совпадает с концом исходного пути и наоборот.

Путь называют *замкнутым*, если его начало и конец совпадают. Замкнутые пути в графе называют также *циклами*, или *петлями*. Нетрудно сообразить, что граф является связным тогда и только тогда, когда любые две его вершины можно соединить путём. Длина кратчайшего пути, соединяющего две вершины, называется *расстоянием* между этими вершинами; если две вершины нельзя соединить путём, то расстояние между ними считается бесконечным.

Если в графе Γ имеются два пути $f_1: I_1 \to \Gamma$ и $f_2: I_2 \to \Gamma$, причём конец первого пути совпадает с началом второго пути, то естественным образом определяется путь $f: I_1I_2 \to \Gamma$. Этот путь f мы называем *композицией* исходных путей и обозначаем f_1f_2.

1.2. Граф Кэли группы

Пусть имеется группа G. Зафиксируем некоторое порождающее множество X в этой группе и построим раскрашенный граф следующим образом: в качестве множества вершин возьмём множество элементов группы G; две вершины g и h соединим ребром цвета $x \in X$, ведущим из g в h, в том и только том случае, когда $gx = h$. Полученный раскрашенный граф $\mathbf{Cay}(G, X)$ называют *графом Кэли группы* G (или просто *графом группы* G) относительно множества порождающих X.

На рисунке 1 показаны графы групп $\mathbb{Z}_6$, S_3 (два варианта, соответствующие различным выборам системы порождающих), $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$. На этих рисунках мы изобразили рёбра, соответствующие первому порождающему сплошными линиями, а рёбра, соответствующие второму порождающему, — пунктиром; кроме того, два противоположных ребра одного цвета мы рисуем в виде одной линии со стрелками в обе стороны.

---

* Если быть предельно аккуратным, то следует сказать, что на самом деле путём в графе Γ называется пара (*отрезок* I, *морфизм* $f: I \to \Gamma$). Тогда путём, обратным к (I, f), называется путь (I^{-1}, f).

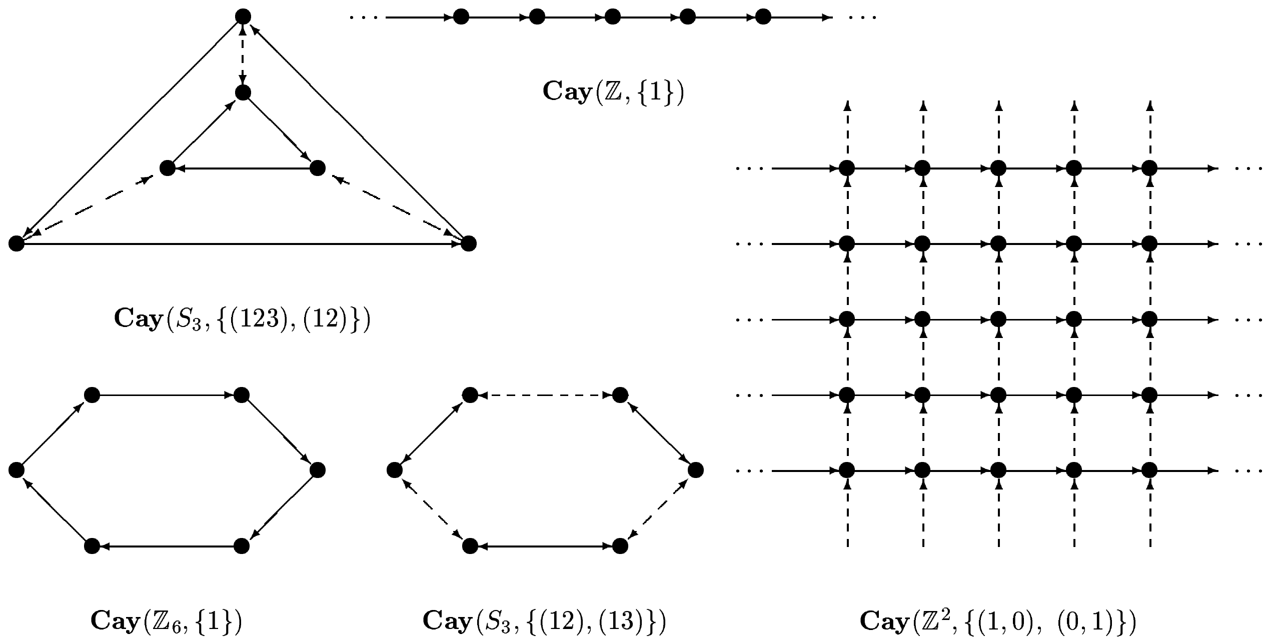

Рис. 1

Граф Кэли можно рассматривать как наглядное (и сжатое) изображение таблицы умножения в группе. Чтобы умножить элементы g и h группы G, надо взять путь $f\colon I \to \mathbf{Cay}(G, X)$ с началом в единице и концом в вершине h (здесь I — некоторый раскрашенный ориентированный граф, являющийся отрезком) и рассмотреть путь $f'\colon I \to \mathbf{Cay}(G, X)$ с началом в точке g (рис. 2). Нетрудно сообразить, что такой путь f' найдётся (и притом только один), и его конец будет вершиной gh. Про путь f' иногда говорят, что он представляет собой «путь f, отложенный от точки g»; а описанный метод умножения вершин графа Кэли можно назвать «правилом треугольника».

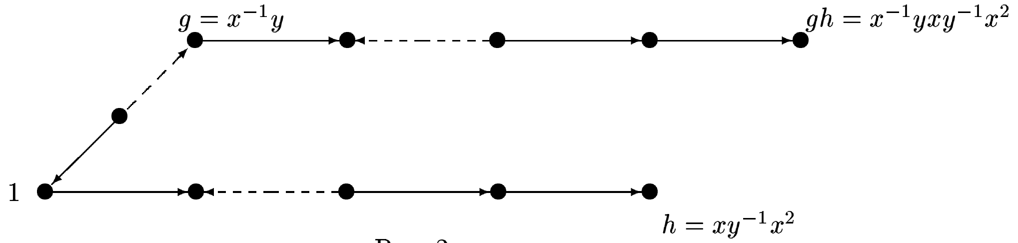

Рис. 2

Отметим некоторые общие свойства графов Кэли.

Свойство 1. *Граф Кэли является связным.*

Это свойство непосредственно вытекает из того, что рассматриваемое множество порождающих действительно порождает группу. Более того, можно заметить, что расстояние между вершинами g и h в графе Кэли $\mathbf{Cay}(G, X)$ представляет собой не что иное как длину минимального выражения элемента $g^{-1}h$ через образующие:

$$\rho(g, h) = \|g^{-1}h\| \overset{\text{опр}}{=} \min(n \mid g^{-1}h = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n},\ \text{где } x_i \in X,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}).$$

Эту метрику ρ называют *словарной метрикой* на группе G (относительно системы порождающих X).

Свойство 2. *Граф Кэли является правильно раскрашенным*
в том смысле, что из каждой вершины выходит и в каждую вершину входит ровно одно ребро каждого цвета.

Это свойство непосредственно вытекает из определения графа $\mathbf{Cay}(G, X)$ и того очевидного факта, что для любого элемента $g \in G$ и любого образующего $x \in X$ найдутся единственные элементы g_1 и g_2 такие, что $gx = g_1$ и $g_2x = g$.

Лемма 1.2.1. *Для любого раскрашенного графа I, являющегося отрезком, и любой вершины v правильно раскрашенного графа Γ найдётся единственный путь $f\colon I \to \Gamma$ с началом в вершине v.*

Доказательство этого простого факта мы оставляем читателю.

Лемма 1.2.2. *Для любых вершин a и b правильно раскрашенного связного графа найдётся не более одного автоморфизма этого графа, переводящего вершину a в вершину b.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать, что нетождественный автоморфизм нашего графа не может оставлять на месте ни одну вершину. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что рёбра, смежные с неподвижной вершиной, сами остаются неподвижными (в силу правильности раскраски); следовательно, вершины, соседние с неподвижной, неподвижны, из чего вытекает (в силу связности), что все вершины и все рёбра являются неподвижными.

Свойство 3. *Граф Кэли является однородным*
в том смысле, что группа его автоморфизмов (как раскрашенного ориентированного графа) действует транзитивно на его вершинах, то есть для любых вершин a и b найдётся автоморфизм этого раскрашенного ориентированного графа, переводящий вершину a в вершину b.

Достаточно доказать, что для всякого $g \in G$ найдётся автоморфизм φ_g графа $\mathbf{Cay}(G, X)$, переводящий вершину 1 в вершину g. В качестве такого автоморфизма φ_g мы можем взять умножение слева на элемент g. Более точно, автоморфизм φ_g действует на вершинах так: $\varphi_g(h) = gh$, а на рёбрах так:

$$\varphi_g(\text{ребро цвета } x\text{, соединяющее } h \text{ и } hx) = \text{ребро цвета } x\text{, соединяющее } gh \text{ и } ghx.$$

Раскрашенный граф называют *регулярным*, если для всякого замкнутого пути $f\colon I \to \Gamma$ любой путь $f'\colon I \to \Gamma$ также замкнут.

Абстрактный раскрашенный граф называют графом Кэли, если он изоморфен графу Кэли некоторой группы относительно некоторого множества порождающих.

Теорема 1.2.1. *Для любого раскрашенного графа* Γ *следующие условия эквивалентны:*
а) Γ *является графом Кэли;*
б) Γ *является связным, правильно раскрашенным и однородным;*
в) Γ *является связным, правильно раскрашенным и регулярным.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что всякий однородный правильно раскрашенный граф регулярен. Действительно, если мы имеем два пути $f\colon I \to \Gamma$ и $f'\colon I \to \Gamma$, то применив автоморфизм φ графа Γ, переводящий начало первого пути в начало второго пути, мы увидим, что пути $\varphi(f)$ и f' имеют общее начало и равнотипны (определены на одном и том же отрезке I); следовательно, они совпадают (по лемме 1.2.1). Значит, пути f и f' переводятся друг в друга автоморфизмами, стало быть, они замкнуты или незамкнуты одновременно.

Нам осталось доказать, что всякий связный правильно раскрашенный регулярный граф Γ изоморфен графу Кэли некоторой группы G. В качестве такой группы мы возьмём множество вершин графа Γ. Одну из вершин (произвольную) мы объявим единицей и определим умножение вершин согласно описанному выше «правилу треугольника», то есть чтобы умножить две вершины u и v, поступим так: выберем путь $f\colon I \to \Gamma$, соединяющий единицу и v, и рассмотрим путь $f'\colon I \to \Gamma$ с началом в вершине u (по лемме 1.2.1 существует единственный такой путь). Конец пути f' мы объявим произведением вершин u и v. Корректность этого правила следует из регулярности графа. Действительно, пусть $f_1\colon I_1 \to \Gamma$ — это другой путь из единицы в v, а $f_1'\colon I_1 \to \Gamma$ — однотипный ему путь с началом в точке u (рис. 3). Тогда путь ff_1^{-1} является замкнутым (он ведёт из v в v) и, в силу регулярности, путь $f'f_1'^{-1}$ также замкнут, то есть концы путей f' и f_1' совпадают, что и доказывает корректность.

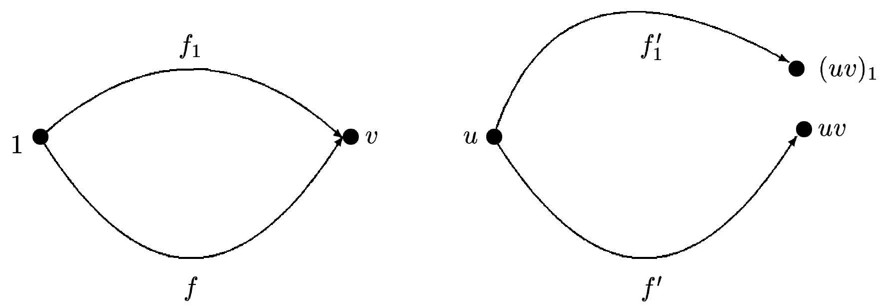

Рис. 3

Мы оставляем читателю проверку того, что введённая таким образом операция является групповой, и того, что граф получившейся группы (относительно системы порождающих, состоящей из концов рёбер, начинающихся в единице) изоморфен исходному графу Γ.*

Теорема 1.2.2. $\operatorname{Aut}\mathbf{Cay}(G, X) \simeq G$.

Доказательство. Отображение $g \mapsto \varphi_g$, определённое выше при проверке однородности графа Кэли (свойство 3), является, очевидно, гомоморфизмом из группы G в группу автоморфизмов её графа Кэли. Ясно, что ядро этого гомоморфизма тривиально. Сюръективность отображения $g \mapsto \varphi_g$ немедленно вытекает из леммы 1.2.2.

* Придирчивый читатель заметит, что здесь автор неправ. Граф Кэли получившейся группы, вообще говоря, НЕ будет изоморфен исходному графу. Следовало сказать: *Граф Кэли некоторой группы, изоморфной группе, построенной описанным способом, изоморфен исходному графу.*