Л.14

1.3. Метрические пространства

Напомним, что *метрическим пространством* называется множество X с определённой на нём функцией $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$, обладающей следующими свойствами:

1) $\rho(x,y) \geqslant 0$;
2) $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
3) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
4) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Значение функции $\rho(x,y)$ называют *расстоянием* между точками x и y. Множество точек, находящихся на расстоянии меньшем ε от данной точки x или подмножества Y метрического пространства X, называют *ε-окрестностью* этой точки или подмножества и обозначают $O_\varepsilon(x)$ ($O_\varepsilon(Y)$).

Геометрической реализацией графа называют множество $Geo(\Gamma) = V(\Gamma) \coprod (E(\Gamma) \times (0;1))$, рассматриваемое как метрическое пространство со следующей метрикой:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \text{определённое выше расстояние между вершинами } x \text{ и } y, & \text{если } x, y \in V(\Gamma); \\ \min(\rho(x, \alpha(e_y)) + t_y, \rho(x, \omega(e_y)) + 1 - t_y), & \text{если } x \in V(\Gamma),\ y = (e_y, t_y) \in E(\Gamma) \times (0;1); \\ \rho(y,x), & \text{если } y \in V(\Gamma),\ x \in E(\Gamma) \times (0;1); \\ \min(\rho(\alpha(e_x), y) + t_x, \rho(\omega(e_x), y) + 1 - t_x), & \text{если } x, y \in E(\Gamma) \times (0;1),\ x = (e_x, t_x). \end{cases}$$

Говоря по-простому, геометрическая реализация графа — это тот рисунок, который мы рисуем, изображая граф. Точки геометрической реализации — это либо вершины графа, либо внутренние точки рёбер. Расстояние между любыми двумя точками есть длина кратчайшего пути в графе, соединяющего эти точки, длина каждого ребра при этом считается единицей. В дальнейшем мы будем отождествлять граф с его геометрической реализацией во всех случаях, когда это не вызывает путаницы.

1.4. Геометрические свойства подгрупп

Метрическое пространство X назовём *ε-связным*, если для любых двух точек $x, y \in X$ найдётся такое натуральное n и такая последовательность точек $x_0, \ldots, x_n \in X$, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и $\rho(x_i, x_{i+1}) \leqslant \varepsilon$.

Понятие ε-связности является «приближением», или «дискретизацией», известного понятия линейной связности. Выражаясь неформально, можно сказать, что в ε-связном пространстве мы можем из любой точки допрыгать в любую другую точку, совершая прыжки не больше чем на ε.

Утверждение 1.4.1. *Пусть G — конечно порождённая группа, H — её подгруппа и Γ — граф Кэли группы G относительно некоторого конечного множества порождающих. Тогда подгруппа H конечно порождена в том и только том случае, если H, рассматриваемая как подпространство метрического пространства Γ, является ε-связной для некоторого числа ε.*

Доказательство.
Если X — конечное порождающее множество для подгруппы H, то положим $\varepsilon = \max\{\|x\|\ ;\ x \in X\}$. Пусть h — произвольный элемент группы h. Выразим его через образующие:

$$h = \prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{где } x_i \in X^{\pm 1}.$$

Тогда расстояния между соседними элементами последовательности

$$1,\ x_1,\ x_1x_2,\ x_1x_2x_3,\ \ldots,\ x_1x_2\ldots x_n = h$$

не превосходят ε, из чего очевидным образом и вытекает ε-связность подгруппы H.

Предположим теперь, что подгруппа H ε-связна. Рассмотрим конечное множество $X = O_\varepsilon(1) \cap H = \{x \in H\ ;\ \|x\| < \varepsilon\}$. Покажем, что $H = \langle X \rangle$. Действительно, для каждого $h \in H$ найдётся такая последовательность $h_0, \ldots, h_n \in H$, что $h_0 = 1$, $h_n = h$ и $\rho(h_i, h_{i+1}) < \varepsilon$, то есть $h_i^{-1}h_{i+1} \in X$. Но тогда $h = (h_0^{-1}h_1)(h_1^{-1}h_2)\ldots(h_{n-1}^{-1}h_n) \in \langle X \rangle$, что и требовалось доказать.

Назовём подмножество Y метрического пространства X *ε-большим*, если $\rho(x, Y) < \varepsilon$ для любой точки $x \in X$.

Утверждение 1.4.2. *Пусть G — конечно порождённая группа, H — её подгруппа и Γ — граф Кэли группы G относительно некоторого конечного множества порождающих. Тогда подгруппа H имеет конечный индекс в G в том и только том случае, если H, рассматриваемая как подпространство метрического пространства Γ, является ε-большой для некоторого числа ε.*

Доказательство. Если индекс H в G конечен, то есть $G = Hg_1 \cup \ldots \cup Hg_n$, то для каждого $g \in G$ мы имеем $g = hg_i$ и $\rho(g, H) = \rho(g_i, H)$. Поэтому H является ε-большим множеством для $\varepsilon = 1 + \max(\|g_i\|)$.

Предположим теперь, что H является ε-большим множеством. Тогда для каждого $g \in G$ мы будем иметь $\rho(g, H) < \varepsilon$; значит $h^{-1}g \in O_\varepsilon(1)$ для некоторого $h \in H$, то есть $g \in H(O_\varepsilon(1) \cap G)$. Таким образом, конечное множество $O_\varepsilon(1) \cap G = \{x \in G \; ; \; \|g\| < \varepsilon\}$ пересекает каждый правый смежный класс G по H, то есть подгруппа H имеет конечный индекс в G.

Заметим, что каждое ε-большое подмножество Y δ-связного метрического пространства X является $(2\varepsilon + \delta)$-связным (рис.4),

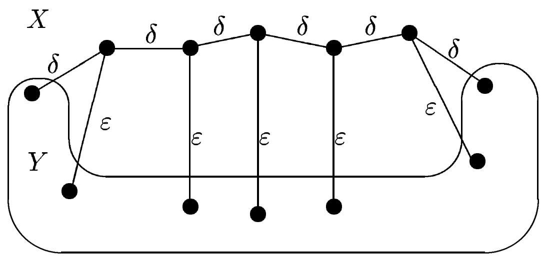

Рис. 4

поэтому из утверждений 1.4.1 и 1.4.2 очевидным образом вытекает утверждение 3.7.2 осеннего семестра: *каждая подгруппа конечного индекса конечно порождённой группы конечно порождена.*

1.5. Квазиизометричность и геометрические свойства групп

Один из недостатков изучения групп с помощью графов Кэли состоит в том, что эти графы строятся по группе не каноническим образом, а зависят от выбора системы порождающих. Например, если мы в качестве системы образующих возьмём все элементы группы, то граф Кэли окажется просто полным графом (любая пара вершин будет соединена ребром), и вся информация о структуре группы будет содержаться в раскраске рёбер. К счастью, оказывается, что если мы ограничимся изучением конечно порождённых групп и будем рассматривать только графы Кэли, отвечающие конечным системам образующих, то два графа Кэли одной и той же группы окажутся в некотором смысле «похожими». Например, на рисунке 5 мы изобразили граф Кэли бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ относительно системы образующих $\{3, 2\}$.

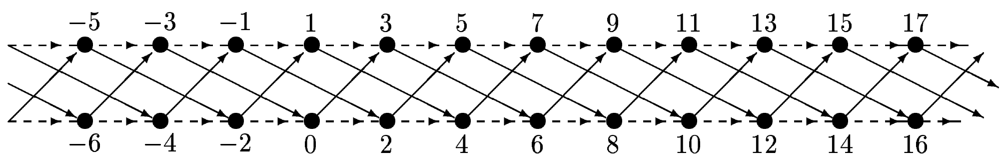

Рис. 5

Этот граф, конечно, не изоморфен прямой, то есть графу $\mathbf{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$ (см. рис. 1), но он «похож» на прямую (особенно если смотреть издалека). Обратите внимание, что другие графы, изображённые на рисунке 1, вы не перепутаете с прямой, даже если будете смотреть издалека.

Перейдём теперь к точным формулировкам. Напомним, что отображение $f \colon X \to Y$ из одного метрического пространства в другое называют *изометричным*, если оно сохраняет расстояние между точками, то есть $\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2))$ для всех $x_1, x_2 \in X$. Изометричное отображение f называют *изометрией*, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

а) f сюръективно;

б) существует изометричное отображение $g \colon Y \to X$, обратное к f, то есть такое, что $f(g(y)) = y$ и $g(f(x)) = x$ для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$.

Два метрических пространства называют *изометричными*, если между ними существует изометрия. Изометричные пространства устроены одинаково.

В геометрической теории групп часто используется более общее понятие квазиизометрии, которое представляет собой формализацию интуитивного понятия «похожести», о котором мы говорили выше.

Отображение $f \colon X \to Y$ из одного метрического пространства в другое называют *квазиизометричным*, если оно почти сохраняет расстояние между точками в том смысле, что найдутся вещественные положительные константы C_1, C_2, C_3, C_4 такие, что $C_1\rho(x_1, x_2) - C_2 \leqslant \rho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C_3\rho(x_1, x_2) + C_4$ для всех $x_1, x_2 \in X$. Квазиизометричное отображение f называют *квазиизометрией*, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

а) f почти сюръективно в том смысле, что найдётся такая константа ε, что всякая точка пространства Y лежит на расстоянии не более ε от некоторой точки образа отображения f; другими словами образ отображения f является ε-большим в Y;

б) существует квазиизометричное отображение $g: Y \to X$, почти обратное к f, то есть такое, что $\rho(f(g(y)), y) \leqslant D_1$ и $\rho(g(f(x)), x) \leqslant D_2$ для некоторых констант D_1, D_2 и для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$.

Метрические пространства, между которыми существует квазиизометрия, называют *квазиизометричными.*

Пример 1.5.1. Любые два непустых *ограниченных* метрических пространства квазиизометричны.

Пример 1.5.2. Множества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$, рассматриваемые как метрические пространства с обычной метрикой (модуль разности), квазиизометричны, но не изометричны.

Пример 1.5.3. Более общо, всякое метрическое пространство квазиизометрично каждому своему ε-большому подпространству. В частности, каждый граф квазиизометричен множеству своих вершин, и всякая группа G со словарной метрикой, соответствующей системе образующих X, квазиизометрична графу Кэли $\mathbf{Cay}(G, X)$.

Утверждение 1.5.1. *Если X и Y — два конечных порождающих множества группы G, то графы Кэли $\mathbf{Cay}(G, X)$ и $\mathbf{Cay}(G, Y)$ квазиизометричны.*

Доказательство. Достаточно доказать, что метрическое пространство (G, ρ_X), где ρ_X — словарная метрика, соответствующая системе образующих X, квазиизометрична метрическому пространству (G, ρ_Y), где ρ_Y — словарная метрика, соответствующая системе образующих Y. Но для двух словарных метрик на группе мы имеем

$$\rho_X(g,h) = \|g^{-1}h\|_X \overset{\text{опр}}{=} \min(n \mid g^{-1}h = x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n}, \text{ где } x_i \in X,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}) \leqslant$$
$$\leqslant M \cdot \min(m \mid g^{-1}h = y_1^{\delta_1} \ldots y_m^{\delta_m}, \text{ где } y_i \in Y,\ \delta_i \in \{\pm 1\}) = M\rho_Y(g,h),$$

где $M = \max(\|y\|_X \ ; \ y \in Y)$. Обратное неравенство $\rho_Y(g,h) \leqslant N\rho_X(g,h)$, где $N = \max(\|x\|_Y \ ; \ x \in X)$, доказывается аналогичным образом.

Утверждение 1.5.1 показывает, что каждой конечно порождённой группе отвечает метрическое пространство (граф Кэли или сама группа со словарной метрикой), определённое однозначно с точностью до квазиизометрии. С другой стороны, графы Кэли неизоморфных групп могут оказаться квазиизометричными. Например, в силу утверждения 1.4.2 граф конечно порождённой группы квазиизометричен графу каждой её подгруппы конечного индекса. В частности, все конечные группы квазиизометричны. В связи с этим возникает вопрос: какие свойства конечно порождённых групп инвариантны относительно квазиизометричности? Грубо говоря, какие свойства группы мы можем разглядеть, рассматривая граф Кэли издалека? Такие свойства конечно порождённых групп иногда называют *геометрическими.* Например, почти разрешимость не является геометрическим свойством, а почти коммутативность и почти нильпотентность являются таковыми, но доказать это непросто. Мы покажем, что почти цикличность представляет собой геометрическое свойство.

Утверждение 1.5.2. *Конечно порождённая группа G квазиизометрична прямой (с обычной метрикой) тогда и только тогда, когда G содержит бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса.*

Докажем сперва две леммы.

Лемма 1.5.1. *Квазиизометричное отображение прямой в себя является квазиизометрией (то есть образ такого отображения является ε-большим для некоторой константы ε).*

Доказательство. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — квазиизометричное отображение, то есть найдутся такие положительные константы C_1, C_2, C_3, C_4, что

$$C_1|x_1 - x_2| - C_2 \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C_3|x_1 - x_2| + C_4 \qquad (*)$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Из правого неравенства вытекает, что при $\varepsilon > C_3 + C_4$ мы имеем

$$f(x) \in O_\varepsilon(f([x])) \cap O_\varepsilon(f([x]+1)),$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа x. Значит, $O_\varepsilon(f(\mathbb{R}))$ является непустым связным открытым подмножеством прямой. Хорошо известно, что такое подмножество может быть либо интервалом (a, b), либо лучом $(-\infty, b)$, либо лучом $(a, +\infty)$, либо всей прямой $\mathbb{R}$. Нам надо показать, что никакие случаи, кроме последнего, невозможны. Заметим, что образ не может быть ограничен в силу левого неравенства $(*)$.

Допустим, что $O_\varepsilon(f(\mathbb{R})) = (-\infty, b)$. Рассмотрим ε-окрестность $O_\varepsilon(f((-\infty, 0)))$ образа множества отрицательных чисел. Это множество (по аналогичным причинам) является непустым открытым связным неограниченным подмножеством луча $O_\varepsilon(f(\mathbb{R})) = (-\infty, b)$. Значит, $O_\varepsilon(f((-\infty, 0))) = (-\infty, c)$. Аналогичным образом ε-окрестность $O_\varepsilon(f((0, +\infty)))$ образа множества положительных чисел является некоторым лучом $(-\infty, d)$. Но это означает, что образ сколь угодно большого положительного числа находится в (2ε)-окрестности образа некоторого отрицательного числа, что противоречит левому неравенству $(*)$.

Полученное противоречие показывает, что $O_\varepsilon(f(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$, и завершает доказательство леммы.