Л.15 *Геодезической прямой* в метрическом пространстве M называют изометричное отображение прямой (с обычной метрикой) в пространство M. Образ такого отображения мы также иногда будем называть геодезической прямой. Аналогичным образом определяются понятия *геодезического отрезка длины* t и *геодезического луча*.

Лемма 1.5.2. *Если X — конечное порождающее множество бесконечной группы G, то граф $\Gamma = \mathbf{Cay}(G, X)$ содержит бесконечную геодезическую прямую.*

Доказательство. Заметим сперва, что граф Γ содержит геодезический отрезок сколь угодно большой длины. Действительно, число элементов группы G длины n для каждого n конечно, а общее число элементов группы G бесконечно. Следовательно, группа G содержит элемент g сколь угодно большой длины m. Отрезок длины m, соединяющий элементы 1 и g, и будет нужным нам геодезическим отрезком.

Теперь заметим, что в силу однородности графа Γ в нём найдётся геодезический отрезок сколь угодно большой длины $2m$, середина которого находится в вершине 1.

Итак, через вершину 1 проходит бесконечно много геодезических отрезков, для которых эта вершина является серединой. Рассмотрим множество Ω всех таких отрезков и множество

$$\Sigma = \{\sigma \in \Omega\ ;\ \sigma \text{ содержится в бесконечном числе отрезков } \omega \in \Omega\}$$

отрезков, имеющих бесконечное число продолжений.

Множество Σ непусто (поскольку оно содержит, например, отрезок длины 0) и упорядочено по включению. Покажем, что в семействе Σ нет максимальных элементов. Действительно, каждый отрезок $\sigma \in \Sigma$ имеет бесконечно много продолжений, но рёбер, смежных с его концами, имеется лишь конечное число. Следовательно, один из отрезков $\sigma' = e_1\sigma e_2$, где ребро e_1 смежно с началом отрезка σ, а ребро e_2 смежно с концом, также является геодезическим отрезком с серединой в единице и допускает бесконечное число продолжений, то есть $\sigma \subset \sigma' \in \Sigma$.

В соответствии с леммой Цорна в семействе Σ найдётся неограниченная цепь $\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \ldots$. Объединение $\bigcup \sigma_i$ является, очевидно, геодезической прямой.

Доказательство утверждения 1.5.2. Если группа G содержит бесконечную циклическую подгруппу $\langle a\rangle_\infty$ конечного индекса, то G квазиизометрична этой подгруппе (по утверждению 1.4.2), которая, в свою очередь, квазиизометрична прямой.

Предположим теперь, что группа G квазиизометрична прямой и $f\colon G \to \mathbb{R}$ — квазиизометрия. Пусть X — конечное порождающее множество группы G, $\Gamma = \mathbf{Cay}(G, X)$ — соответствующий граф Кэли, и $l \subseteq \Gamma$ — геодезическая прямая, существование которой утверждается в лемме 1.5.2.

По лемме 1.5.1 $f(l)$ является δ-большим подмножеством прямой $\mathbb{R}$. Следовательно, сама прямая l является ε-большим подмножеством в Γ. Для каждой точки $\gamma \in \Gamma$ выберем такую точку $\overline{\gamma} \in l$, что $\rho(\gamma, \overline{\gamma}) \leqslant \varepsilon$.

Допустим теперь, что в группе G найдётся такой элемент g, что

$$\|g\| \geqslant 100\varepsilon \leqslant \|g^2\|. \qquad (*)$$

Положим $M = \|g\|$, $N = \|g^2\|$ и $x_k = \overline{(g^k)}$ (рис. 6).

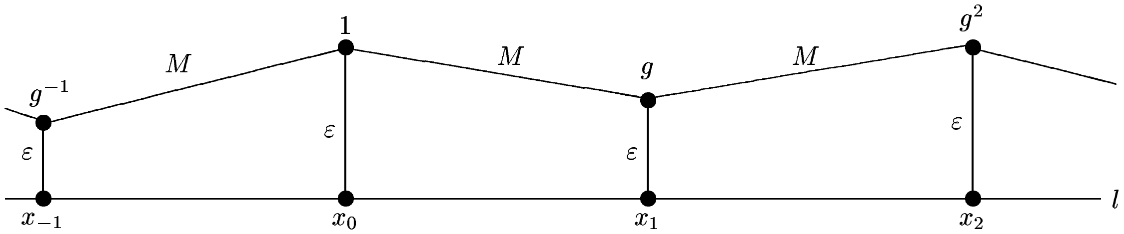

Рис. 6

Тогда $\rho(g^k, g^{k+1}) = M$ и $\rho(g^k, g^{k+2}) = N$ для всех целых k. Следовательно,

$$|\rho(x_k, x_{k+1}) - M| \leqslant 2\varepsilon \geqslant |\rho(x_k, x_{k+2}) - N|. \qquad (**)$$

Лемма 1.5.3. *Если последовательность $\{x_k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$ точек прямой (с обычной метрикой) удовлетворяет неравенствам $(**)$ и $M \geqslant 100\varepsilon \leqslant N$, то каждая точка этой прямой находится на расстоянии не более M от одной из точек последовательности $\{x_k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.*

Доказательство этой элементарной леммы мы оставляем читателю в качестве лёгкого упражнения.

Из леммы 1.5.3 немедленно вытекает, что для каждой точки γ графа Γ мы имеем

$$\rho(\gamma, \langle g\rangle) \leqslant \rho(\gamma, \{x_k\}) + \varepsilon \leqslant \rho(\overline{\gamma}, \{x_k\}) + 2\varepsilon \leqslant M + 2\varepsilon.$$

Таким образом, циклическая группа $\langle g\rangle$ является $(M+2\varepsilon)$-большой подгруппой в G. Следовательно, индекс этой циклической подгруппы конечен (по утверждению 1.4.2), что и требовалось доказать.

Осталось объяснить, почему в группе G найдётся элемент g, удовлетворяющий неравенствам $(*)$ (то есть большой элемент с большим квадратом). Допустим противное; тогда для каждого $g \in G$ мы будем иметь $\|g^2\| \leqslant 200\varepsilon$. Значит, группа G содержит лишь конечное число квадратов и, следовательно, является конечной в силу следующей леммы.

Лемма 1.5.4. *Пусть G — конечно порождённая группа и множество $\{g^2\ ;\ g \in G\}$ конечно. Тогда группа G конечна.*

Доказательство. Пусть X — конечное порождающее множество группы G. Без ограничения общности мы можем считать, что $x^{-1} \in X$ для любого $x \in X$ и $g^2 \in X$ для любого $g \in G$.

Для каждого элемента $g \in G$ рассмотрим его минимальное выражение в виде $g = x_1 \dots x_k$, где $x_i \in X$ (такое выражение существует, поскольку $X^{-1} = X$). Заметим, что все x_i в таком минимальном выражении обязаны быть разными. Действительно, если $x_i = x_j$ при $i < j$, то в выражении для элемента g фрагмент $x_i x_{i+1} \dots x_j$ можно заменить на равный ему фрагмент меньшей длины:

$$x_i x_{i+1} \dots x_j = x x'_{j-1} x'_{j-2} \dots x'_{i+1}, \qquad \text{где } x = (x_i x_{i+1} \dots x_{j-1})^2 \in X \text{ и } x'_s = x_s^{-1} \in X\ .$$

Но слов без повторяющихся букв в конечном алфавите X имеется лишь конечное число. Значит, группа G содержит лишь конечное число элементов. Это завершает доказательство леммы 1.5.4 и утверждения 1.5.2.

2. СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ

2.1. Общее определение свободных групп и их простейшие свойства

Пусть G — группа и X — её подмножество. Группу G называют *свободной группой* (или *абсолютно свободной группой*) с базисом X, если для любой группы H любое отображение $X \to H$ продолжается единственным образом до гомоморфизма $G \to H$. Свободную группу с базисом X мы будем обозначать $F(X)$. Мощность базиса называют *рангом* свободной группы.

В следующем утверждении мы собрали те свойства свободных групп, которые следуют из «общих соображений», то есть доказательство которых не использует явного определения свободной группы через несократимые слова.

Утверждение 2.1. *Пусть $F(X)$ — свободная группа с базисом X и Y — подмножество базиса X. Тогда*

1) *свободная группа порождается своим базисом:* $\langle X\rangle = F(X)$ (в частности, наше определение свободной группы эквивалентно определению из главы 4 осеннего семестра)*;*
2) *каждая n-порождённая группа изоморфна некоторой факторгруппе свободной группы ранга n;*
3) *свободная группа $F(X)$ не порождается никаким своим подмножеством мощности меньшей $|X|$* (в частности, ранг свободной группы определён корректно)*;*
4) *две свободные группы изоморфны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают;*
5) *свободная группа ранга 0 тривиальна, а свободная группа ранга 1 является бесконечной циклической группой;*
6) $\langle Y\rangle = F(Y)$*;*
7) *факторгруппа $F(X)/\langle\langle Y\rangle\rangle$ является свободной группой с базисом $\{x\langle\langle Y\rangle\rangle\ ;\ x \in X \setminus Y\}$;*
8) *факторгруппа свободной группы по коммутанту $F(X)/F(X)'$ является свободной абелевой группой с базисом $\{xF(X)'\ ;\ x \in X\}$.*

Доказательство.

1) Тождественное отображение $X \to X$ обязано продолжаться до некоторого гомоморфизма $\varphi\colon F(X) \to \langle X\rangle$. С другой стороны, тождественное отображение $X \to X$ продолжается до тождественного гомоморфизма $F(X) \to F(X)$. В силу единственности продолжения тождественный гомоморфизм $F(X) \to F(X)$ обязан совпадать с композицией гомоморфизма φ и естественного вложения $\langle X\rangle \to F(X)$.
2) Если $G = \langle Z\rangle$ и множество X равномощно множеству Z, то биекция $X \to Z$ продолжается до гомоморфизма $\varphi\colon F(X) \to G$. Очевидно, этот гомоморфизм сюръективен, поэтому $G \simeq F(X)/\ker\varphi$.
3) Если бы свободная группа ранга 100 порождалась 99-ю своими элементами, то, в силу пункта 2), всякая 100-порождённая группа порождалась бы 99-ю своими элементами, что явно неверно: группа $\mathbb{Z}_2^{100}$ является простейшим контрпримером.

4) Свободные группы разных рангов неизоморфны в силу пункта 3). Покажем, что свободные группы одинаковых рангов изоморфны. Пусть имеются две свободные группы $F(X)$ и $F(Z)$ и множества X и Z равномощны. Взаимнообратные биекции между этими множествами продолжаются до некоторых гомоморфизмов $\varphi: F(X) \to F(Z)$ и $\psi: F(Z) \to F(X)$. Их композиция $\psi\varphi: F(X) \to F(X)$ является гомоморфизмом, продолжающим тождественное отображение базиса X в себя. Следовательно, $\psi\varphi$ есть тождественное отображение (в силу единственности продолжения). По аналогичным причинам $\varphi\psi: F(Z) \to F(Z)$ представляет собой тождественное отображение. Таким образом, мы имеем дело со взаимнообратными изоморфизмами.
5) Свободная группа ранга 0 является тривиальной, поскольку она порождается пустым множеством (по пункту 1)). Свободная группа ранга 1 является циклической по пункту 1). Если бы она была конечной, то бесконечная циклическая группа не могла бы быть её гомоморфным образом, что противоречит пункту 2).
6) Надо показать, что всякое отображение $f: Y \to G$ продолжается до гомоморфизма $\varphi: \langle Y\rangle \to G$. Продолжим отображение f произвольным образом до отображения $f_1: X \to G$. Отображение f_1 продолжается до гомоморфизма $\varphi_1: F(X) \to G$. Ограничение этого гомоморфизма на $\langle Y\rangle$ будет искомым гомоморфизмом φ. Единственность продолжения следует из того, что два гомоморфизма, совпадающие на порождающем множестве, обязаны совпадать всюду.

7) и 8) Доказательство этих утверждений мы оставляем в качестве упражнения.

2.2. Примеры свободных групп

Из главы 4 осеннего семестра мы знаем, что свободные группы существуют. Чтобы получить свободную группу ранга n, надо взять множество X мощности n и рассмотреть множество всех слов в алфавите $X \cup X^{-1}$, которые являются несократимыми, то есть не содержат подслов вида xx^{-1} и $x^{-1}x$, где $x \in X$. На этом множестве несократимых слов вводится операция умножения: чтобы умножить слово u на слово v, надо приписать слово v к слову u справа, после чего последовательно вычеркнуть все возникающие подслова вида xx^{-1} и $x^{-1}x$.

Возникает вопрос: встречаются ли свободные группы в «реальной жизни», или это чисто абстрактное понятие? На самом деле свободные группы окружают нас со всех сторон. Разглядеть их часто помогает следующая простая лемма.

Лемма о пинг-понге (для свободных групп ранга 2). *Пусть группа G порождается двумя элементами x и y и действует на некотором множестве M, содержащем два непересекающихся непустых подмножества X и Y, причём $x^nY \subseteq X$ и $y^nX \subseteq Y$ для всех $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$* (рис. 9). *Тогда G — свободная группа с базисом $\{x, y\}$.*

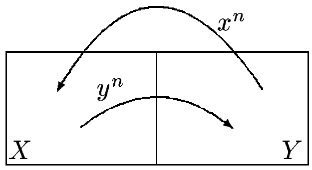

Рис. 9

Доказательство. Рассмотрим свободную группу $F(x, y)$ с базисом $\{x, y\}$ и гомоморфизм $f: F(x, y) \to G$, переводящий x в x и y в y. Такой гомоморфизм существует, единственен и сюръективен. Осталось доказать инъективность этого гомоморфизма. Рассмотрим непустое слово u, лежащее в ядре отображения f. Без ограничения общности можно считать, что слово u начинается и кончается на $x^{\pm 1}$ (если это не так, то вместо слова u надо рассмотреть подходящее сопряжённое к нему слово):

$$u = x^{n_1}y^{m_1}\dots x^{n_k}y^{m_k}x^{n_{k+1}}, \quad \text{где } n_i, m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\ .$$

Действуя элементом $f(u)$ на точки множества Y, мы получаем

$$f(u)Y = x^{n_1}y^{m_1}\dots x^{n_k}y^{m_k}x^{n_{k+1}}Y \subseteq x^{n_1}y^{m_1}\dots x^{n_k}y^{m_k}X \subseteq x^{n_1}y^{m_1}\dots x^{n_k}Y \subseteq \dots \subseteq x^{n_1}y^{m_1}X \subseteq x^{n_1}Y \subseteq X,$$

что противоречит равенству $f(u) = 1$.

Пример (представление Санова). Две матрицы

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

свободно порождают свободную подгруппу в $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z})$. Действительно, группа $G = \langle x, y\rangle$ действует на $\mathbb{R}^2$. Непосредственно проверяется, что условия леммы о пинг-понге окажутся выполненными, если в качестве множества X взять векторы, у которых первая координата больше второй по абсолютной величине, а в качестве множества Y взять векторы, у которых вторая координата больше первой по абсолютной величине.