Л.16

2.3. Финитная аппроксимируемость и хопфовость свободных групп

Напомним (см. раздел 2.6 осеннего семестра), что группа G называется *финитно аппроксимируемой*, если для каждого неединичного элемента $g \in G$ найдутся конечная группа K и гомоморфизм $\varphi\colon G \to K$ такие, что $\varphi(g) \neq 1$. Группа G называется *хопфовой*, если она не изоморфна никакой своей собственной факторгруппе: $G/N \simeq G \Longrightarrow N = \{1\}$. Группа G называется *линейной*, если она точно представима матрицами над некоторым полем, то есть G вкладывается в $\mathbf{GL}_n(P)$ для некоторого натурального числа n и некоторого поля P.

Утверждение 2.3.1. *Все свободные группы линейны и финитно аппроксимируемы. Свободные группы конечного ранга являются хопфовыми.*

Доказательство. Линейность свободных групп ранга 2 установлена в разделе 2.2 (представление Санова). Линейность свободных групп произвольного конечного (и даже счётного) ранга будет доказана в разделе 2.5; мы увидим, что эти группы также представимы целочисленными матрицами порядка 2. Линейность свободных групп бесконечного (несчётного) ранга мы использовать нигде не будем, и оставляем доказательство в этом случае в качестве упражнения.

Теорема Мальцева (теорема 3.6.4 осеннего семестра) утверждает, что все конечно порождённые линейные группы финитно аппроксимируемы, поэтому финитная аппроксимируемость свободных групп конечного ранга вытекает из их линейности. Впрочем, использование столь мощной теоремы Мальцева в данном случае необязательно — достаточно просто заметить, что группа $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z})$ очевидным образом аппроксимируется конечными группами $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Финитная аппроксимируемость свободных групп бесконечных рангов следует из того, что они аппроксимируются свободными группами конечных рангов (докажите!).

Хопфовость свободных групп конечного ранга вытекает теперь из другой теоремы Мальцева (теорема 2.6.1 осеннего семестра): каждая конечно порождённая финитно аппроксимируемая группа является хопфовой.

Следствие 2.3.1. *Не существует нетривиального тождества, выполненного во всех конечных группах.* Другими словами, *каждое тождество, выполненное во всех конечных группах, выполняется и во всех бесконечных группах.*

Доказательство. Допустим (например), что в каждой конечной группе G выполнено тождество

$$\forall x, y, z \in G \quad [[x, yzx]^{2007}, zx^{12345}] = 1. \qquad (*)$$

Рассмотрим левую часть этого тождества (точнее, её несократимую форму) как элемент u свободной группы $F(x, y, z)$. Этот элемент u является неединичным (а если бы он был единичным, то есть если бы левая часть рассматриваемого тождества сокращалась бы до пустого слова, то, очевидно, тождество $(*)$ было бы тривиальным и выполнялось бы во всех группах). Согласно утверждению 2.3.1, найдётся конечная группа G и гомоморфизм $\varphi\colon F(x, y, z) \to G$ такой, что $\varphi(u) \neq 1$. Это означает, что в конечной группе G тождество $(*)$ не выполнено: оно нарушается на тройке элементов $(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z))$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Следующее следствие утверждения 2.3.1 является аналогом известного факта из линейной алгебры.

Следствие 2.3.2. *Если свободная группа F_n ранга n порождается элементами $u_1, \ldots, u_n$, то она свободно порождается этими элементами, то есть множество $\{u_1, \ldots, u_n\}$ является свободным базисом группы F_n.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый свободный базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$ группы F_n. По определению свободной группы существует гомоморфизм $\varphi\colon F_n \to F_n$ такой, что $\varphi(x_i) = u_i$. Этот гомоморфизм является сюръективным, поскольку по условию $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle = F_n$. Значит, $F_n \simeq F_n / \ker\varphi$. Но F_n — хопфова группа; следовательно, $\ker\varphi = \{1\}$, то есть φ является автоморфизмом и $\{u_1, \ldots, u_n\}$ является свободным базисом.

2.4. Деревья

Деревом называют связный непустой граф без нетривиальных циклов. Под графом мы будем всегда понимать ориентированный граф.

Утверждение 2.4.1. *Если $F(X)$ — свободная группа с базисом X, то граф Кэли $\Gamma = \mathbf{Cay}(F(X), X)$ является деревом.*

Доказательство. Метка цикла в графе Кэли является соотношением между образующими группы, но нетривиальных соотношений между свободными образующим свободной группы нет.

На рисунке 10 изображён фрагмент графа Кэли свободной группы ранга 2, на котором отмечены вершины, соответствующие единице (слева) и слову $yx^3y^{-2}x^{-1}$ (справа).

Как нам известно, всякая группа действует на своём графе Кэли автоморфизмами, причём это действие является *свободным*, то есть неединичные элементы не оставляют неподвижными ни одну из вершин (и следовательно, ни одно из рёбер, поскольку под действием автоморфизма начало ребра обязано переходить в начало образа этого ребра). В частности, мы получаем следующий факт:

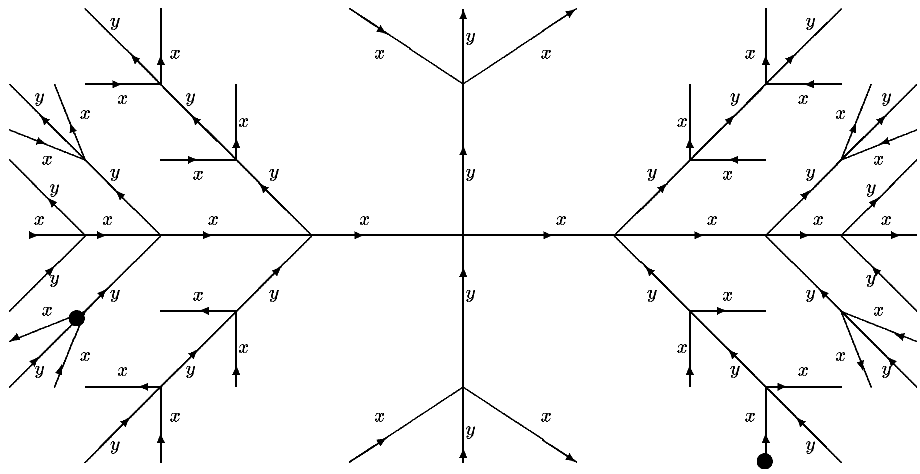

Рис. 10

Утверждение 2.4.2. *Каждая свободная группа свободно действует автоморфизмами на некотором дереве.*

Это свойство свободных групп будет для нас ключевым. Мы будем получать информацию о свободных группах, изучая автоморфизмы деревьев.

Утверждение 2.4.3. *Каждый автоморфизм дерева обладает либо неподвижной вершиной, либо инвариантной прямой. Если у автоморфизма нет неподвижных рёбер, то его неподвижная вершина или инвариантная прямая единственна.*

Доказательство. Пусть f — автоморфизм дерева T, не имеющий неподвижных точек и

$$m = \min(\rho(x, f(x))\ ;\ x \in T) \in \mathbb{N}.$$

Этот минимум достигается на некоторой точке $y \in T$, поскольку расстояние $\rho(x, f(x))$ является натуральным числом для каждого $x \in T$. Рассмотрим середину z отрезка $[y, f(y)]$. Тогда точка $f(z)$ является серединой отрезка $[f(y), f^2(y)]$ и

$$\rho(z, f(z)) \leqslant \rho(z, f(y)) + \rho(f(y), f(z)) = m.$$

Это неравенство обязано быть равенством в силу минимальности m. Но такое равенство означает, что точка $f(y)$ лежит между точками z и $f(z)$, а значит, и между точками y и $f^2(y)$. Из этого легко следует, что все точки $f^i(y)$, где $i \in \mathbb{Z}$, лежат на одной прямой, которая и будет, очевидно, инвариантной относительно f.

Докажем теперь единственность. Пусть автоморфизм f имеет (например) две инвариантные прямые a и b. Пересечение этих прямых может быть либо пустым множеством, либо точкой, либо отрезком, либо лучом. Допустим, что $a \cap b = \varnothing$. Тогда в дереве T имеется единственный отрезок c, соединяющий эти прямые. Под действием автоморфизма он должен переходить в себя, причём его концы (лежащие на инвариантных прямых) должны оставаться неподвижными. Отсюда очевидным образом вытекает, что каждое ребро отрезка c (а также каждое ребро прямых a и b) остаётся неподвижным, что и требовалось доказать. Разбор остальных случаев мы оставляем читателям в качестве упражнения.

Утверждение 2.4.4. *Два коммутирующих автоморфизма обладает либо общей неподвижной вершиной, либо общей инвариантной прямой.*

Доказательство. Если g и f — два произвольных автоморфизма дерева T и a — неподвижная точка или инвариантная прямая для автоморфизма f, то $g(a)$ является неподвижной точкой или инвариантной прямой для автоморфизма gfg^{-1}. Действительно, $gfg^{-1}(g(a)) = gf(a) = g(a)$. Поэтому в случае, когда автоморфизмы f и g коммутируют, множество M неподвижных относительно f точек будет инвариантно относительно автоморфизма g. Это множество M либо пусто, либо является деревом, поскольку каждый отрезок, соединяющий неподвижные точки, сам состоит из неподвижных точек.

Если M — дерево, то по утверждению 2.4.3 автоморфизм g, ограниченный на M, обладает неподвижной точкой или инвариантной прямой, которая и будет общей для автоморфизмов f и g. Если $M = \varnothing$, то, согласно утверждению 2.4.3, автоморфизм f имеет единственную инвариантную прямую a. Но мы видели, что прямая $g(a)$ также инвариантна относительно f. Значит, $a = g(a)$, то есть a является общей инвариантной прямой для двух наших автоморфизмов.

Утверждение 2.4.5. *Если элементы f и g свободной группы F коммутируют, то они лежат в одной циклической подгруппе.*

Доказательство. Группа F действует свободно на дереве T. Элементы f и g обладают по утверждению 2.4.4 общей инвариантной прямой $a \subseteq T$. Рассмотрим множество G всех элементов $x \in F$, для которых прямая a является инвариантной. Ясно, что G — подгруппа в F. Ясно также, что эта подгруппа G действует свободно на прямой. Осталось заметить, что группа, свободно действующая на прямой, действует на ней сдвигами и является циклической — она порождается элементом, действующим сдвигом на минимальное расстояние.*

* Под прямой мы здесь, разумеется, понимаем соответствующий граф, то есть сдвиг на нецелое расстояние не является автоморфизмом прямой.