Л.17

2.5. Подгруппы свободных групп. Основные факты

Основным фактом, который надо знать о подгруппах свободных групп является следующая теорема.

Теорема Нильсена–Шрайера. *Каждая подгруппа свободной группы сама является свободной.*

Следует, однако, иметь в виду, что ранг подгруппы может быть больше, чем ранг всей группы.

Утверждение 2.5. *Свободная группа F_2 ранга 2 содержит в качестве подгруппы свободную группу F_∞ бесконечного (счётного) ранга.*

Для доказательства нам понадобится лемма о пинг-понге для свободных групп произвольного ранга.

Лемма (о пинг-понге для свободных групп произвольного ранга). *Пусть группа G, порождённая множеством X, действует на множестве M, содержащем непустые попарно непересекающиеся подмножества M_x, где $x \in X$, причём $x^n M_y \subseteq M_x$ для любых различных $x, y \in X$ и $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тогда G — свободная группа с базисом X.*

Доказательство этой леммы почти дословно повторяет доказательство леммы о пинг-понге для свободных групп ранга два (раздел 2.2).

Доказательство утверждения 2.5.

В свободной группе $F(a,b)$ рассмотрим в подгруппу $G = \left\langle a, a^b, a^{b^2}, a^{b^3}, \ldots \right\rangle$. Покажем, что группа G свободно порождается указанными образующими. Группа G действует умножением слева на множестве $M = F(a,b)$. При этом подмножества

$$M_i = \{\text{слова вида } b^{-i}a^{\pm 1}\ldots\} \subset M = F(A,B)$$

удовлетворяют условию леммы о пинг-понге. Действительно, при $i \neq j$ мы имеем

$$a^{nb^j} M_i = \{\text{слова вида } b^{-j}a^n b^{j-i}a^{\pm 1}\ldots\} \subset M_j.$$

Значит, $G = F(a, a^b, a^{b^2}, a^{b^3}, \ldots)$, что и требовалось.

Утверждение 2.5, возможно, покажется читателю неприятным фактом. Однако и из него можно извлечь пользу. Например, теперь мы видим, что все конечно порождённые группы линейны, финитно аппроксимируемы и хопфовы (утверждение 2.3.1). Действительно, для свободных групп ранга 2 утверждение 2.3.1 доказано, свободные группы всех конечных рангов вкладываются в F_2 в силу утверждения 2.5. Осталось заметить, что подгруппы линейных групп сами, очевидно, линейны.

2.6. Группы, свободно действующие на деревьях, и доказательство теоремы Нильсена–Шрайера

Свободная группа, как мы знаем, свободно действует на дереве (например, на своём графе Кэли). Значит, каждая подгруппа G свободной группы F также способна свободно действовать на некотором дереве (например, на графе Кэли свободной группы F). Поэтому теорема Нильсена–Шрайера немедленно вытекает из следующей геометрической характеризации свободных групп.

Теорема 2.6. *Группа является свободной тогда и только тогда, когда она свободно действует на некотором дереве.*

Доказательство. В одну сторону эта теорема справедлива, поскольку, как мы уже неоднократно упоминали, свободная группа свободно действует на своём графе Кэли, который является деревом.

Осталось доказать, что группа G, свободно действующая на некотором дереве T, является свободной. Для доказательства нам понадобится одно важное понятие, связанное с действиями.

Фундаментальной областью действия группы G на связном графе Γ мы будем называть связный подграф Φ графа Γ такой, что граф Φ содержит ровно по одному представителю каждой орбиты при действие группы G на вершинах графа Γ. Другими словами,

1) $(\forall u, v \in V(\Phi), g \in G)\ (gu = v \Longrightarrow u = v)$;
2) $(\forall v \in V(\Gamma)\ \exists g \in G)\ gv \in V(\Phi)$.

Утверждение 2.6. *При любом действии любой группы G на любом связном непустом графе Γ фундаментальная область существует.*

Доказательство. Рассмотрим все связные подграфы Φ графа Γ, удовлетворяющие условию 1) из определения фундаментальной области (то есть связные подграфы, вершины которых лежат в разных орбитах). Множество таких подграфов непусто (поскольку оно содержит подграф, состоящий из одной вершины) и частично упорядоченно по включению. Из леммы Цорна легко следует, что найдётся максимальный связный граф Φ, удовлетворяющий условию 1) (то есть не содержащийся ни в каком большем связном подграфе, удовлетворяющем условию 1)).

Покажем, что этот максимальный граф Φ автоматически удовлетворяет условию 2), то есть является фундаментальной областью. Допустим противное. Пусть v — ближайшая к Φ вершина графа Γ такая, что $Gv \cap \Phi = \varnothing$. Тогда для одной из соседних с v вершин u мы будем иметь

$$\rho(\Phi, u) = \rho(\Phi, v) - 1 < \rho(\Phi, v).$$

Следовательно, в силу выбора v, $gu \in \Phi$ для некоторого $g \in G$. Значит, вершины gu и gv являются соседними, и граф

$$\Phi' = \Phi \cup \{gv\} \cup \{e\},$$

где e — ребро, соединяющее gu и gv, является связным графом, удовлетворяющим условию 1) и строго содержащим граф Φ, что противоречит максимальности Φ и доказывает утверждение.

Продолжим доказательство теоремы 2.6. Пусть Φ — фундаментальная область свободного действия группы G на дереве T. Тогда для каждой вершины v дерева T найдётся элемент $g_v \in G$ такой, что $g_v v \in \Phi$, причём такой элемент g_v будет единственным в силу свободности действия. Рассмотрим подмножество

$$X = \{g_v \ ; \ \rho(\Phi, v) = 1\}$$

группы G.

Лемма 2.6.
1) $X = X^{-1}$;
2) *инвариантная прямая l_x элемента $x \in X$ пересекает фундаментальную область Φ;*
3) *если $X = Y \amalg Y^{-1}$, то $G = F(Y)$.*

Доказательство. Пусть $\rho(v, \Phi) = 1$ и u — вершина графа Φ, находящаяся на расстоянии 1 от v. Тогда $g_v u \neq u$ в силу свободности действия. Следовательно $g_v u \notin \Phi$ по определению фундаментальной области. Значит, вершина $g_v u$ находится на единичном расстоянии от Φ, поскольку $\rho(g_v u, g_v v) = \rho(u, v) = 1$. Стало быть, $g_v^{-1} = g_{g_v u}$ и первое утверждение леммы доказано.

Если $\rho(\Phi, l_x) \geqslant 1$, то

$$\rho(\Phi, x\Phi) \geqslant \rho(\Phi, l_x) + \rho(l_x, x\Phi) = 2\rho(\Phi, l_x) \geqslant 2.$$

Но для $x \in X$ мы должны иметь $\rho(\Phi, x\Phi) = 1$. Полученное противоречие доказывает второе утверждение леммы.

Рассмотрим инвариантную прямую l_y элемента $y = g_v = g_w^{-1} \in Y$. Пусть e_v и e_w — рёбра, соединяющие Φ и вершины v и w, соответственно. Заметим, что $e_v, e_w \subset l_y$. При удалении пары рёбер e_v и e_w дерево T распадается на три компоненты связности. Одна из этих компонент содержит Φ. Объединение двух других компонент обозначим M_y. Непосредственно проверяется, что $y^n M_z \subset M_y$, если y и z — два различных элемента множества Y (см. рис. 11). Поэтому, по лемме о пинг-понге, $\langle Y \rangle = F(Y)$.

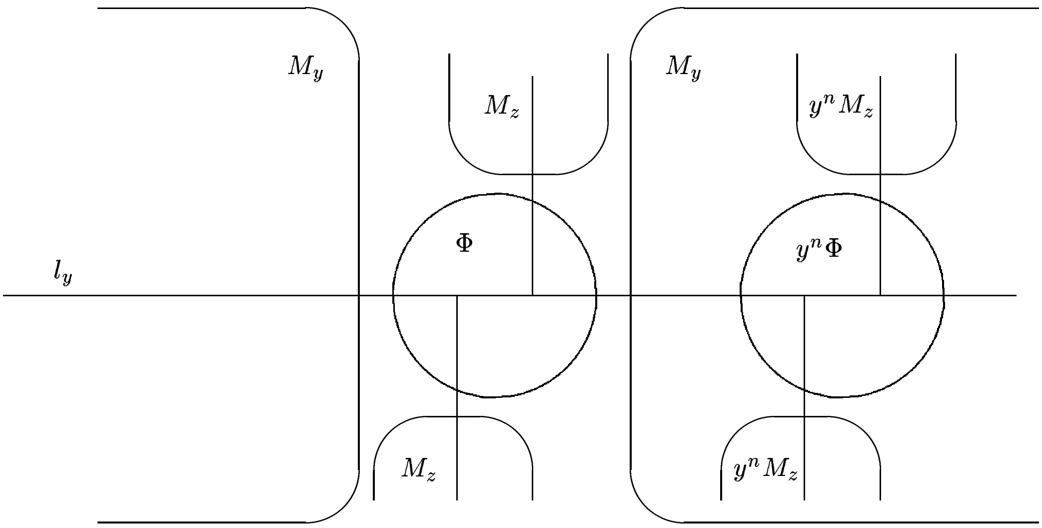

Рис. 11

Осталось доказать, что $\langle Y \rangle = G$. В силу свободности действия достаточно показать, что для каждой вершины v дерева T найдётся элемент $h \in H \overset{\text{опр}}{=} \langle Y \rangle = \langle X \rangle$ такой, что $hv \in \Phi$. Пусть v — ближайшая к Φ вершина, для которой это не так. Одна из соседних к v вершин u находится ближе к Φ. Поэтому $hu \in \Phi$ для некоторого $h \in H$. Вершина hv находится на расстоянии 1 от Φ, поэтому $xhv \in \Phi$ для некоторого $x \in X$. Осталось заметить, что $xh \in H$. Тем самым лемма 2.6, теорема 2.6 и теорема Нильсена–Шрайера доказаны.