Л.18

2.7. Фундаментальная группа графа

Пусть имеется ориентированный граф Γ. Рассмотрим некоторый путь p в графе Γ. Путь удобно записывать как последовательность $p = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_n^{\varepsilon_n}$, где e_i — некоторые рёбра графа Γ, записанные в том порядке, в котором они встречаются пути p, а $\varepsilon_i = \pm 1$ в зависимости от того, проходятся они «по стрелке» или «против стрелки». Разумеется путь должен быть «непрерывным», то есть

$$\begin{aligned}
\omega(e_i) &= \alpha(e_{i+1}), \quad \text{если } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = 1;\\
\omega(e_i) &= \omega(e_{i+1}), \quad \text{если } \varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1} = 1;\\
\alpha(e_i) &= \alpha(e_{i+1}), \quad \text{если } \varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1} = -1;\\
\alpha(e_i) &= \omega(e_{i+1}), \quad \text{если } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = -1.
\end{aligned}$$

Путь может иметь самопересечения и может проходить одно и то же ребро несколько раз. Началом $\alpha(p)$ пути p будет начало или конец ребра e_1, в зависимости от знака ε_1, а концом $\omega(p)$ пути p будет конец или начало ребра e_n, в зависимости от знака ε_n. Путь длины ноль, то есть *тривиальный путь*, представляет собой особый случай; он задаётся пустой последовательностью рёбер, и для такого пути o мы пишем $o = x$, где вершина x — это начало (а также конец) пути o. Обратный путь p^{-1} задаётся последовательностью $e_n^{-\varepsilon_n} \dots e_1^{-\varepsilon_1}$. Если конец пути p совпадает с началом пути q, то композиция $p \circ q$ этих путей задаётся конкатенацией (приписыванием) соответствующих последовательностей.

Путь p называется *несократимым*, если соответствующая последовательность не содержит подслов вида ee^{-1} и $e^{-1}e$. Другими словами, путь p несократим, если $e_i = e_{i+1} \Longrightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$. *Несократимой формой* пути p мы называем путь $\overline{p}$, задаваемый словом, получающимся из слова $e_1^{\varepsilon_1} \dots e_n^{\varepsilon_n}$ последовательным вычёркиванием подслов вида ee^{-1} и $e^{-1}e$. Нетрудно сообразить, что несократимая форма единственна (то есть не зависит от того, в каком порядке производятся вычёркивания). Несократимая форма $\overline{p}$ пути p имеет то же начало и тот же конец, что и исходный путь p. *Произведением несократимых путей* p и q мы называем несократимую форму их композиции: $pq = \overline{p \circ q}$. Например, произведением несократимых путей $p = ab^{-1}ca^{-1}$ и $q = ac^{-1}ac^{-1}$ будет путь $pq = ab^{-1}ac^{-1}$ (рис. 12), а произведение каждого пути на свой обратный есть тривиальный путь: $rr^{-1} = \alpha(r)$.

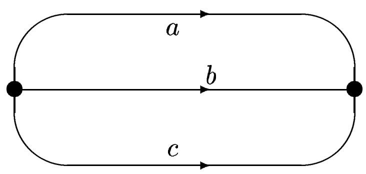

Рис. 12

Пусть x — некоторая вершина графа Γ. Рассмотрим множество $\pi(\Gamma, x)$ всех (замкнутых) несократимых путей в графе Γ с началом и концом в точке x. Это множество является группой относительно введённого выше умножения (проверьте!); нейтральным элементом является тривиальный путь x, а обратным к пути r является путь r^{-1}. Группа $\pi(\Gamma, x)$ называется *фундаментальной группой графа* Γ *с отмеченной точкой* x.

Утверждение 2.7.1. *Если граф Γ связный, то его фундаментальная группа не зависит от выбора отмеченной точки, то есть $\pi(\Gamma, x) \simeq \pi(\Gamma, y)$ для любых двух вершин x и y графа Γ.*

Доказательство. Пусть f — путь с началом в точке x и концом в точке y. Тогда каждому несократимому пути p из x в x можно сопоставить несократимый путь $\overline{f^{-1}pf}$ из y в y. Доказательство того, что это соответствие является изоморфизмом групп $\pi(\Gamma, x)$ и $\pi(\Gamma, y)$, мы оставляем читателю в качестве упражнения. Отметим только, что этот изоморфизм не является каноническим — он зависит от выбора пути, соединяющего точки x и y.

Из определения фундаментальной группы графа Γ видно, что эта группа является подгруппой свободной группы $F(E(\Gamma))$, где $E(\Gamma)$ — множество всех рёбер графа Γ. Из теоремы Нильсена–Шрайера вытекает следующий важный факт.

Утверждение 2.7.2. *Фундаментальная группа любого графа является свободной.*

Интересно, однако, доказать утверждение 2.7.2 непосредственно, не опираясь на теорему Нильсена–Шрайера. Сделать это можно, например, так. Рассмотрим некоторое ребро e графа Γ, не являющееся петлёй, то есть такое, что $\alpha(e) \neq \omega(e)$. Стянем это ребро в точку (рис 13).

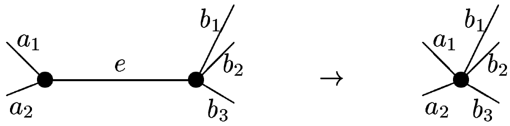

Рис. 13

Ясно, что каждому пути p в исходном графе Γ естественным образом соответствует некоторый однозначно определённый путь p' в получившимся графе Γ' (образ пути p при стягивании ребра). При этом несократимому пути соответствует несократимый путь. Нетрудно сообразить, что верно и обратное: каждый несократимый путь в Γ' является образом некоторого несократимого пути в Γ; и вообще, отображение $p \mapsto p'$ является изоморфизмом фундаментальных групп графов Γ и Γ'.

Последовательно стягивая все рёбра, не являющиеся петлями, мы (не изменяя фундаментальной группы) придём к ситуации, когда все рёбра в графе являются петлями. Для связного графа это возможно только если он имеет всего одну вершину (рис 14).

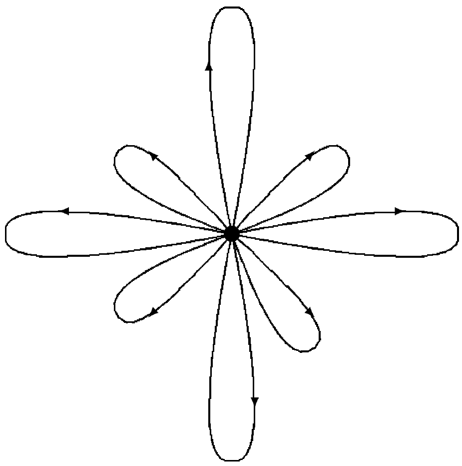

Рис. 14

Такой граф называют *букетом окружностей*, и свободность его фундаментальной группы очевидна. Это доказывает утверждение 2.7.2*) и даёт следующий простой способ вычисления свободного базиса фундаментальной группы $\pi(\Gamma, x)$ графа Γ (который мы считаем связным без ограничения общности):

1. Выберем в графе Γ максимальное поддерево T или, что то же самое, поддерево, содержащее все вершины графа Γ.**) (Стягивая мысленно рёбра дерева T, мы превращаем граф Γ в букет окружностей.)
2. Для каждого ребра e графа Γ, не лежащего в дереве T, рассмотрим замкнутый несократимый путь $p_e = q_e e r_e$, где q_e — (единственный) несократимый путь в дереве T из x в $\alpha(e)$, а r_e — (единственный) несократимый путь в дереве T из $\omega(e)$ в x. Эти пути $\{p_e\ ;\ e \in E(\Gamma) \setminus E(T)\}$ и будут свободными образующими группы $\pi(\Gamma, x)$.

Например, максимальное поддерево графа, изображённого на рисунке 13, состоит из двух вершин x и y и одного ребра b (например). Следовательно, фундаментальная группа этого графа является свободной группой ранга два с образующими ab^{-1} и cb^{-1}.

2.8. Гомотопические группы топологических пространств

Содержание этого параграфа является необязательным для понимания всего дальнейшего.

Фундаментальная группа графа является очень частным случаем понятия фундаментальной группы топологического пространства. Пусть X — произвольное топологическое пространство (кто не знает, что это такое, может считать X метрическим пространством). Зафиксируем какую-нибудь точку $x \in X$, и рассмотрим все замкнутые пути в пространстве X с началом и концом в точке x, то есть непрерывные отображения из ориентированных отрезков в X, переводящие концы отрезка в точку x. Композиция таких путей определяется

*) Строго говоря, это доказывает утверждение только для конечного графа, а в общем случае надо стягивать много рёбер одновременно.

**) Если граф Γ бесконечен, то для доказательства существования максимального поддерева придётся воспользоваться леммой Цорна.

естественным образом. Пути p и q называются гомотопными, если существует непрерывное отображение квадрата в X такое, что ограничение этого отображения на нижнее основание совпадает с путём p, ограничение на верхнее основание совпадает с q, а ограничение на боковые стороны является постоянным отображением в точку x. Другими словами, гомотопные пути можно превратить друг в друга непрерывной деформацией. Гомотопность является отношением эквивалентности

Например, если $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с обычной метрикой (модуль разности) и $x = -1$ (рис. 15), то путь q гомотопен тривиальному пути (то есть постоянному отображению отрезка в точку x), путь p не гомотопен тривиальному пути (а значит и пути q), а путь r не гомотопен ни пути p, ни тривиальному пути, но гомотопен пути p^2.

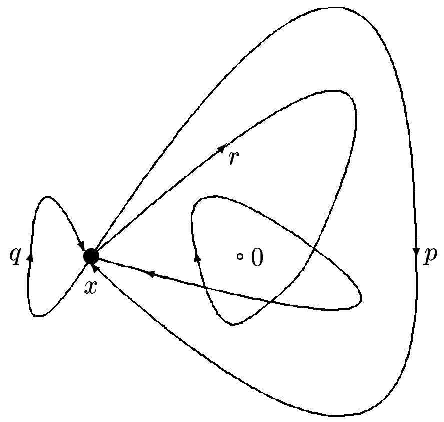

Рис. 15

Класс всех путей, гомотопных данному пути p, обозначают $[p]$. Умножение путей «уважает» гомотопии, то есть если путь p гомотопен пути p_1 и путь q гомотопен пути q_1, то пути pq и p_1q_1 также гомотопны. Таким образом, формула $[p][q] \overset{\text{опр}}{=} [pq]$ корректно определяет умножение классов гомотопных путей. Множество всех классов гомотопных путей, начинающихся и кончающихся в точке x, образует группу относительно такого умножения. Эту группу называют *фундаментальной,* или *первой гомотопической, группой пространства* X *с отмеченной точкой* x и обозначают $\pi(X, x)$ или $\pi_1(X, x)$. Например, нетрудно показать, что $\pi(\mathbb{C} \setminus \{0\}, -1) \simeq \mathbb{Z}$ и порождается классом пути p (рис. 15).

Можно показать, что фундаментальная группа графа в смысле определения из предыдущего параграфа канонически изоморфна фундаментальной группе (в смысле последнего определения) геометрической реализации этого графа. Многие утверждения о фундаментальной группе графа, которые мы будем рассматривать, в той или иной мере переносятся на произвольные топологические пространства. Основное отличие случая графов от общего случая состоит в том, что фундаментальная группа графа всегда свободна, а фундаментальная группа топологического пространства может быть любой.

Например, фундаментальная группа тора (поверхности бублика) изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, а фундаментальная группа проективной плоскости изоморфна $\mathbb{Z}_2$.

Нетрудно сообразить, что непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп $f_*\colon \pi(X, x) \to \pi(Y, f(x))$. Это простое наблюдение делает фундаментальные группы полезными и важными для топологии: изучать топологические объекты (пространства и отображения между ними) можно с помощью алгебраических объектов (групп и гомоморфизмов).*) Например, как доказать, что сфера негомеоморфна тору? Один из способов состоит в том, чтобы показать, что фундаментальная группа сферы тривиальна, а фундаментальная группа тора является свободной абелевой ранга два, тогда как фундаментальные группы гомеоморфных пространств должны быть, очевидно, изоморфны.

Познакомиться подробнее с понятием фундаментальной группы пространства, а также с высшими гомотопическими группами $\pi_2, \pi_3, \ldots$ и с другими алгебраическими инвариантами топологических пространств, можно, например, по книге [ФоФу89].

*) Топологи вообще любят сводить топологические задачи к алгебраическим, а алгебраисты часто, наоборот, любят решать алгебраические задачи топологическими методами.