Л.19

2.9. Накрытия графов

Напомним (см. раздел 1.1), что *морфизмом* из графа X в граф Y называется пара отображений $f = (f_V\colon V(X) \to V(Y),\ f_E\colon E(X) \to E(Y))$ такая, что $f_V(\alpha(e)) = \alpha(f_E(e))$ и $f_V(\omega(e)) = \omega(f_E(e))$. Морфизм f естественным образом сопоставляет каждому пути $p\colon I \to X$ в графе X путь $f \circ p\colon I \to Y$ в графе Y. Этот путь $f \circ p$ мы называем образом пути p при морфизме f. Образы замкнутых путей с началом и концом в точке $x \in X$ являются замкнутыми путями в графе Y с началом и концом в точке $f(x) = y \in Y$. Нетрудно сообразить, что отображение

$$f_*\colon \pi(X, x) \to \pi(Y, f(x)), \quad p \mapsto \overline{f \circ p}$$

является гомоморфизмом фундаментальных групп. В дальнейшем мы будем рассматривать графы с отмеченными точками. Под морфизмом $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ из графа X с отмеченной точкой x_0 в граф Y с отмеченной точкой y_0 мы понимаем морфизм $f\colon X \to Y$ такой, что $f(x_0) = y_0$.

Морфизм $f\colon X \to Y$ называется *накрытием графа* Y, если

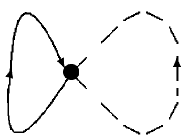
1) оба графа X и Y являются связными;
2) для каждой вершины $x \in X$ отображение f_E задаёт биекцию между множествами

$$\mathrm{A}(x) = \{e \in E(X)\ ;\ \alpha(e) = x\} \quad \text{и} \quad \mathrm{A}(f(x)) = \{e \in E(Y)\ ;\ \alpha(e) = f(x)\};$$

3) для каждой вершины $x \in X$ отображение f_E задаёт биекцию между множествами

$$\Omega(x) = \{e \in E(X)\ ;\ \omega(e) = x\} \quad \text{и} \quad \Omega(f(x)) = \{e \in E(Y)\ ;\ \omega(e) = f(x)\}.$$

Накрытия графа Y можно рисовать следующим образом: раскрасим все вершины и все рёбра графа Y в разные цвета и покрасим каждую вершину и каждое ребро накрывающего графа X в тот цвет, который имеет его образ. Условия 2) и 3) определения накрытия означают, что локально раскраска графа X такая же, как у графа Y. Наоборот, всякий раскрашенный таким образом граф X задаёт некоторое накрытие $X \to Y$. Например, раскрашенные графы, изображённые на рисунке 1, являются накрытиями «восьмёрки».



Утверждение 2.9.1. *Если $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ накрытие, то гомоморфизм фундаментальных групп $f_*\colon \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$ является инъективным.*

Доказательство. Из определения накрытия следует, что образ $f \circ p$ несократимого пути p является несократимым путём. Поэтому каждый путь в графе X, лежащий в ядре гомоморфизма f_*, обязан быть тривиальным путём, что и доказывает утверждение.

Лемма о поднятии пути. *Если $f\colon X \to Y$ — накрытие, p — путь в графе Y с началом в вершине y и x — один из прообразов вершины y при отображении f, то существует единственный путь q (**поднятие пути** p) в графе X с началом в точке x, образ которого есть p. Если путь p несократим, то и путь q несократим.*

Доказательство. Будем доказывать существование поднятия индукцией по длине пути p. Если p — путь нулевой длины, то утверждение очевидно. Пусть путь p имеет вид $p = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_n^{\varepsilon_n}$, где e_i — некоторые рёбра графа X, а $\varepsilon_i = \pm 1$. Допустим для определённости, что $\varepsilon_1 = 1$. Тогда ребро e_1 начинается в вершине y. По определению накрытия существует единственное ребро e_1' графа Y, начинающееся в вершине x и такое, что $f(e_1') = e_1$. Рассмотрим путь $p_1 = e_2^{\varepsilon_2} \dots e_n^{\varepsilon_n}$. По предположению индукции у этого пути имеется поднятие $q_1 = (e_2')^{\varepsilon_2} \dots (e_n')^{\varepsilon_n}$, начинающееся в вершине $\omega(e_1')$. Путь $q = (e_1')^{\varepsilon_1}(e_2')^{\varepsilon_2} \dots (e_n')^{\varepsilon_n}$ будет искомым поднятием пути p. Доказательство единственности и несократимости поднятия мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Два накрытия $f_1\colon X_1 \to Y$ и $f_2\colon X_2 \to Y$ графа Y мы называем *изоморфными*, если существует изоморфизм $g\colon X_1 \to X_2$ графов X_1 и X_2 такой, что $f_2 g = f_1$:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Если X_1, X_2 и Y были графами с отмеченными точками и накрытия f_1 и f_2 переводили отмеченные точки в отмеченные точки, то мы требуем дополнительно, чтобы изоморфизм g переводил отмеченную точку в отмеченную.

Теорема 2.9.1. *Пусть Y — произвольный связный граф с отмеченной точкой y_0. Тогда существует естественное взаимно однозначное соответствие между накрытиями графа (Y, y_0) и подгруппами фундаментальной группы $\pi(Y, y_0)$. Это соответствие Φ ставит в соответствие накрытию $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ подгруппу $\operatorname{Im} f_*$ фундаментальной группы $\pi(Y, y_0)$.*

Доказательство. Докажем инъективность отображения Φ. Пусть имеется два накрытия $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ и $g\colon (Z, z_0) \to (Y, y_0)$, причём подгруппы $\operatorname{Im} f_*$ и $\operatorname{Im} g_*$ группы $\pi(Y, y_0)$ совпадают. Надо показать, что накрытия f и g изоморфны.

На вершинах графа X определим изоморфизм $h\colon (X, x_0) \to (Z, z_0)$ следующим образом: для каждой вершины x графа X рассмотрим путь p, соединяющий x_0 и x (такой путь существует в силу того, что граф X является связным, по определению накрытия); образ $f \circ p$ пути p будет путём в графе X с началом в x_0 по лемме о поднятии пути, и в графе Z найдётся единственный путь q с началом в точке z_0 такой, что $g \circ q = f \circ p$; положим

$$h(x) \stackrel{\text{опр}}{=} \omega(q).$$

Это определение отображения h корректно, поскольку если в графе X имеются два пути p и p', соединяющие вершины x_0 и x, то $p'p^{-1} \in \pi(X, x_0)$ и $(f \circ p')(f \circ p)^{-1} \in \operatorname{Im} f_*$. Значит, соответствующие поднятия q и q' кончаются в одной точке, так как $\operatorname{Im} f_* = \operatorname{Im} g_*$.

На рёбрах отображение h определяется аналогичным образом: для каждого ребра $e \in E(X)$ рассматриваем путь p в графе X с началом в точке x_0, последнее ребро которого есть e; определяем $h(e) \in E(Z)$ как последнее ребро поднятия в Z пути fp (начиная с z_0).

Простую проверку того, что такое отображение h представляет собой изоморфизм накрытий, мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Докажем теперь сюръективность соответствия Φ. Пусть H — подгруппа фундаментальной группы $\pi(Y, y_0)$. Мы хотим построить граф X с отмеченной точкой x_0 и такое накрытие $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, что $\operatorname{Im} f_* = H$.

Положим

$$V(X) = \{\text{пути в графе } Y \text{ с началом в вершине } y_0\}/\sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ определяется так: $p \sim p'$, если $\omega(p) = \omega(p')$ и петля $\overline{p'p^{-1}}$ лежит в H.

Рёбра графа X определим похожим образом:

$$E(X) = \{\text{пути положительной длины в } Y \text{ с началом в } y_0\text{, проходящие своё последнее ребро «по стрелке»}\}/\approx,$$

где отношение эквивалентности $\approx$ определяется так: $p \approx p'$, если последнее ребро пути p совпадает с последним ребром пути p' и петля $\overline{p'p^{-1}}$ лежит в H. При этом мы считаем, что начало и конец ребра e графа X определены так:

$$\alpha(e) = (\text{начало последнего ребра пути } e) \quad \text{и} \quad \omega(e) = (\text{конец пути } e).$$

Отмеченной вершиной $x_0 \in V(X)$ графа X мы считаем тривиальный путь в графе Y (точнее, его класс эквивалентности $\sim$, который состоит из всех путей, лежащих в H). Накрытие $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ определяем так:

$$f_V(x) = (\text{конец пути } x) \quad \text{и} \quad f_E(e) = (\text{последнее ребро пути } e).$$

Непосредственная проверка показывает, что отображение f является накрытием, $f(x_0) = y_0$ и $\operatorname{Im} f_* = H$. Теорема 2.9.1 доказана.

Взаимнооднозначное соответствие между подгруппами фундаментальной группы и накрытиями позволяет переводить алгебраические свойства подгрупп на геометрический язык накрытий и наоборот.

Если $f\colon X \to Y$ — накрытие, то из леммы о поднятии пути легко следует, что все точки $y \in Y$ имеют одинаковое число прообразов $f^{-1}(y) \subseteq X$. Это число $\deg f = |f^{-1}(y)|$ называют *степенью* накрытия f. Следующее утверждение представляет собой перевод этого геометрического понятия на алгебраический язык: степень накрытия, отвечающего подгруппе, есть индекс этой подгруппы.

Утверждение 2.9.2. *Если $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ — накрытие, то $\deg f = |\pi(Y, y_0) : \operatorname{Im} f_*|$.*

Доказательство. Пусть $f^{-1}(y_0) = \{x_0, \ldots, x_{d-1}\}$, где $d = \deg f$. Для каждого $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ рассмотрим путь p_i в графе X, соединяющий точку x_0 с точкой x_i. Покажем, что пути $q_i = f \circ p_i \in \pi(Y, y_0) = G$ являются системой представителей правых смежных классов группы G по подгруппе $H = \operatorname{Im} f_*$. Действительно, для каждого пути $q \in G$ рассмотрим его поднятие p в граф X такое, что $\alpha(p) = x_0$. Тогда $\omega(p) = x_i$ для некоторого $i \in \{0, \ldots, d-1\}$. Значит, путь pp_i^{-1} является замкнутым путём в X, начинающимся и кончающимся в вершине x_0, то есть $\overline{qq_i^{-1}} \in H$ и $q \in Hq_i$. Аналогичным образом доказывается, что пути q_i лежат в разных правых смежных классах G по H.