Л.2 Следующая теорема представляет собой «внешнюю» характеризацию полных групп.

Теорема 1.4.2. *Абелева группа A является полной тогда и только тогда, когда она выделяется прямым слагаемым во всякой содержащей её абелевой группе. Если абелева группа G содержит полную подгруппу A и тривиально пересекающуюся с ней подгруппу H, то в G найдётся подгруппа B, содержащая H и такая, что $G = A \oplus B$.*

Доказательство. Пусть абелева группа G содержит полную подгруппу A и тривиально пересекающуюся с ней подгруппу H. Из леммы Цорна следует, что в G имеется максимальная (по включению) подгруппа B, содержащая H и тривиально пересекающаяся с A (так как объединение цепочки вложенных друг в друга подгрупп, тривиально пересекающихся с A, также является подгруппой, тривиально пересекающейся с A). Покажем, что $G = A \oplus B$. Действительно, равенство $A \cap B = \{0\}$ означает, что $A + B = A \oplus B$. Покажем, что $A + B = G$. Предположив противное, возьмём $g \in G \setminus (A + B)$. В силу максимальности B найдётся такое натуральное число n, что $ng = a + b \in A + B$ (так как иначе $B + \langle g \rangle$ пересекалась бы с A тривиально). Заменяя если надо, g на его степень, можно считать, что число n простое. В силу полноты группы A найдётся такой элемент $a' \in A$, что $na' = a$. Следовательно, $n(g - a') = b \in B$, а $g - a' \notin A + B$. Но это означает, что $(B + \langle g - a' \rangle) \cap A = \{0\}$ (проверьте!), что противоречит максимальности B.

Докажем теперь, что всякая абелева группа A, выделяющаяся прямым слагаемым в каждой абелевой группе её содержащей, является полной. Действительно, такая группа, в частности, выделяется прямым слагаемым в полной группе её содержащей (которая существует по теореме 1.2). А прямое слагаемое полной группы полно. Теорема доказана.

Теперь мы можем доказать и существование пополнений.

Теорема 1.4.3. *У каждой абелевой группы G есть пополнение $\widehat{G}$. Всякая полная абелева группа H, содержащая G, содержит $\widehat{G}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную полную группу H, содержащую G. Пусть A — максимальная полная подгруппа группы H, тривиально пересекающаяся с G (она существует по лемме Цорна (проверьте!)). По теореме 1.4.2 $H = A \oplus B$ и $G \subseteq B$. Группа B является полной, как прямое слагаемое полной группы. Если B содержит полную подгруппу C, содержащую G, то $B = D \oplus C$ (поскольку полная подгруппа обязана выделяться прямым слагаемым) и $H = A \oplus D \oplus C$. Но подгруппа D должна быть тривиальной в силу максимальности A. Следовательно $C = B$ и B является пополнением группы G. Теорема доказана.

Пример. Пополнением группы $\mathbb{Z}$ служит группа $\mathbb{Q}$, а пополнением группы $\mathbb{Z}_p$, где число p простое, служит группа $\mathbb{Z}_{p^\infty} \overset{\text{опр}}{=} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^i}$ (мы считаем, что $\mathbb{Z}_{p^i}$ вложена в $\mathbb{Z}_{p^{i+1}}$ посредством отображения $x \mapsto px$). По-другому группу $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ можно описать как группу всех комплексных корней из единицы p-примарных степеней:

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} \simeq \left\{ z \in \mathbb{C} \; ; \; \exists k \in \mathbb{N} \; z^{p^k} = 1 \right\}.$$

В том, что $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Q}$ и $\widehat{\mathbb{Z}}_p = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ легко убедиться, если заметить, что каждая нетривиальная циклическая подгруппа группы $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Z}_{p^\infty}$) нетривиально пересекается с $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}_p$).

1.5. Строение полных абелевых групп. Универсальная счётная абелева группа. Подгруппы в $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Назовём группы $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *элементарными полными* группами. Оказывается, что всякая полная абелева группа строится из таких элементарных групп.

Теорема 1.5.1. *Всякая полная абелева группа G изоморфна прямой сумме элементарных полных групп.*

Доказательство. По лемме Цорна в G существует максимальное семейство $\{C_i\}$ элементарных полных подгрупп таких, что $\sum C_i = \bigoplus C_i$. Покажем, что $\sum C_i = G$. Действительно, по теореме 1.4.2 $G = A \oplus (\bigoplus C_i)$. Если группа A нетривиальна, то она содержит элемент x, порядок которого либо бесконечен, либо прост. Но тогда в силу полноты группы A по теореме 1.4.3 A содержит элементарную полную подгруппу (пополнение группы $\langle x \rangle$), что противоречит максимальности семейства $\{C_i\}$. Теорема доказана.

Следствие 1.5. *Существует универсальная счётная абелева группа, то есть счётная абелева группа U, содержащая в качестве подгрупп изоморфные копии всех счётных абелевых групп.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 1.2 видно, что пополнение счётной группы счётно. Значит всякая счётная абелева группа вкладывается в не более чем счётную прямую сумму элементарных полных групп. Следовательно, в качестве группы U можно взять прямую сумму счётного числа копий группы $\mathbb{Q}$ и счётного числа копий групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для каждого простого p:

$$U = (\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \ldots) \oplus (\mathbb{Z}_{2^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{2^\infty} \oplus \ldots) \oplus (\mathbb{Z}_{3^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{3^\infty} \oplus \ldots) \oplus (\mathbb{Z}_{5^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{5^\infty} \oplus \ldots) \oplus \ldots.$$

Вообще, про группу G из некоторого класса групп $\mathcal{K}$ говорят, что она *универсальна* в классе $\mathcal{K}$, если каждая группа из класса $\mathcal{K}$ вкладывается в G. Нетрудно доказать существование универсальной группы в классе абелевых групп любой фиксированной бесконечной мощности. Позже мы увидим, что для неабелевых групп аналог следствия 1.5 уже неверен.

Задачу описания всех абелевых групп мы свели к задаче описания подгрупп в прямых суммах элементарных полных групп. Рассмотрим «одномерный» случай.

Утверждение 1.5. *Для каждого $i = 0, 1, \ldots$ группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ содержит ровно одну циклическую подгруппу порядка p^i; других собственных подгрупп в $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ нет.**) *Группа $\mathbb{Q}$ содержит континуум неизоморфных между собой подгрупп.*

Доказательство. Если $x \in \mathbb{Z}_{p^i} \setminus \mathbb{Z}_{p^{i-1}}$, то $\langle x \rangle = \mathbb{Z}_{p^i}$. Значит, всякая подгруппа в $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ либо содержится внутри $\mathbb{Z}_{p^i}$, либо содержит $\mathbb{Z}_{p^i}$. Отсюда всё следует.

Предъявим континуум попарно неизоморфных подгрупп в $\mathbb{Q}$. Для каждого множества простых чисел π рассмотрим подгруппу

$$G_\pi = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; \textit{все простые делители } b \textit{ лежат в } \pi \right\}.$$

Эти подгруппы попарно неизоморфны, так как $(pG_\pi = G_\pi) \iff (p \in \pi)$. Утверждение доказано.

В книге [Куро67] можно найти явное описание всех групп, вложимых в $\mathbb{Q}$; такие группы называются *группами ранга один* (точнее *абелевыми группами без кручения ранга один*).

Следующее простое утверждение часто используется при изучении абелевых групп. Группа называется *редуцированной*, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп.

Теорема 1.5.2. *Всякая абелева группа раскладывается в прямую сумму полной и редуцированной группы. Это разложение единственно в следующем смысле: если $G = A_1 \oplus B_1 = A_2 \oplus B_2$, где A_i — полные, а B_i — редуцированные подгруппы группы G, то $A_1 = A_2$, а $B_1 \simeq B_2$.*

Доказательство. В произвольной абелевой группе G существует единственная максимальная полная подгруппа A — сумма всех полных подгрупп группы G (проверьте!). По теореме 1.4.2 $G = A \oplus B$. Группа B является редуцированной, так как всякая её полная подгруппа C даёт большую чем A полную подгруппу $A + C$.

Докажем теперь единственность разложения. Пусть $G = A_1 \oplus B_1 = A_2 \oplus B_2$, где A_i — полные, а B_i — редуцированные подгруппы группы G. Тогда всякая полная подгруппа группы G обязана содержаться в A_1, поскольку её проекция на B_1 обязана быть тривиальной (как полная подгруппа редуцированной группы). Это означает, что $A_2 \subseteq A_1$. Аналогичным образом устанавливается обратное включение. Мы видим, что подгруппы A_1 и A_2 совпадают, а значит $B_1 \simeq G/A_1 = G/A_2 \simeq B_2$.

*) За это свойство группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ называют *квазициклическими*. Вообще, если $\mathcal{P}$ — это некоторое свойство групп, то про группу, не обладающую свойством $\mathcal{P}$, все собственные подгруппы которой свойством $\mathcal{P}$ обладают, называют *квази-$\mathcal{P}$*-группой. Можно показать, что группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — это единственные квазициклические бесконечные абелевы группы. Впрочем, часто под квазициклическими группами понимают именно группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.