Л.20

2.10. Формула Шрайера

Эйлеровой характеристикой $e(X)$ конечного графа X называют разность числа его вершин и числа его рёбер.

Если $f\colon X \to Y$ — накрытие, то у каждой вершины и у каждого ребра графа Y имеется ровно $\deg f$ прообразов. Следовательно,

$$e(X) = (\deg f)\cdot e(Y). \qquad (*)$$

Утверждение 2.10. *Для любого конечного графа X справедливо равенство*

$$e(X) = 1 - \operatorname{rank}\pi(X). \qquad (**)$$

Доказательство. Если граф X представляет собой букет n окружностей (рис. 14), то его фундаментальная группа имеет ранг n и равенство $(**)$ очевидно: $e(X) = 1-n = 1-\operatorname{rank}\pi(X)$. Произвольный конечный связный граф X может быть превращён в букет окружностей конечным числом стягиваний рёбер (рис. 13). Осталось заметить, что при стягивании ребра и число вершин, и число рёбер уменьшаются на единицу; следовательно эйлерова характеристика остаётся неизменной. С другой стороны, как мы знаем, ранг фундаментальной группы также не изменяется при этом преобразовании, что и доказывает формулу $(**)$ в общем случае.

Формула Шрайера. *Если H — подгруппа конечного индекса конечно порождённой свободной группы F, то*

$$\operatorname{rank} H - 1 = |F:H|(\operatorname{rank} F - 1).$$

Доказательство. Реализуем группу F как фундаментальную группу некоторого конечного связного графа Y (например, букета окружностей). В соответствии с теоремой 2.9.1 и утверждением 2.9.1 группа H изоморфна фундаментальной группе некоторого графа X, накрывающего Y, причём степень накрытия $f\colon X \to Y$ равна индексу подгруппы H в F (по утверждению 2.9.2). Формула Шрайера вытекает теперь из формул $(*)$ и $(**)$.

2.11. Теорем Хаусона и гипотеза Ханны Нейман

Теорема Хаусона. *Пересечение двух конечно порождённых подгрупп свободной группы также является конечно порождённой группой. Более того, для любых двух подгрупп H и K свободной группы имеет место оценка* (доказанная впервые Х. Нейман)

$$\operatorname{rank}(H\cap K) - 1 \leqslant 2(\operatorname{rank} H - 1)(\operatorname{rank} K - 1). \qquad (*)$$

Попробуем перевести это утверждение на геометрический язык. Словосочетание «свободная группа» переводится как *фундаментальная группа некоторого графа*. Подгруппа свободной группы есть *фундаментальная группа некоторого накрытия этого графа*. А как трактовать слова «конечно порождённая подгруппа»?

Назовём *головой* $H(X)$ связного графа X его подграф, состоящий из всех рёбер, лежащих на несократимых циклах в графе X, и вершин, являющихся концами этих рёбер. Подграф $T(X)$, состоящий из оставшихся рёбер и их концов, мы будем называть *хвостами* графа X. Другими словами, ребро e графа X лежит в его хвосте, если удаление этого ребра делит граф X на две компоненты связности, одна из которых является деревом. На рисунке 17 слева сплошными линиями изображены рёбра головы графа, а пунктирными — рёбра хвостов.

Утверждение 2.11.1. *Фундаментальная группа связного графа конечно порождена тогда и только тогда, когда голова этого графа конечна.*

Доказательство. Поскольку ранг фундаментальной группы $\pi(X,x)$ связного графа X не зависит от выбора отмеченной вершины x (см. утверждение 2.7.1), без ограничения общности можно считать, что отмеченная вершина лежит в голове графа X.* Значит, все несократимые пути, начинающиеся и кончающиеся в x, лежат в голове $H(X)$ графа X, и $\pi(X,x) = \pi(H(X),x)$. Поэтому конечная порождённость фундаментальной группы «конечноголового» графа вытекает из того очевидного факта, что фундаментальная группа конечного графа имеет конечный ранг. Наоборот, если $\pi(X,x) = \langle p_1,\dots,p_n\rangle$, то голова графа X содержит только рёбра, лежащие на путях $p_1,\dots,p_n$; стало быть, эта голова является конечной при конечном n.

Для завершения перевода теоремы Хаусона на геометрический язык нам осталось понять, что такое накрытие, отвечающее пересечению двух подгрупп.

Пусть $(X,x_0)\xrightarrow{f}(Y,y_0)\xleftarrow{g}(Z,z_0)$ — накрытия, сохраняющие отмеченные точки. Построим новый граф Γ. Множество вершин и рёбер определим так:

$$V(\Gamma) \overset{\text{опр}}{=} \{(u,v) \mid u\in V(X),\ v\in V(Z),\ f(u)=g(v)\} \subseteq V(X)\times V(Z),$$
$$E(\Gamma) \overset{\text{опр}}{=} \{(d,e) \mid d\in E(X),\ e\in E(Z),\ f(d)=g(e)\} \subseteq E(X)\times E(Z).$$

* Граф с пустой головой является деревом! Поэтому в этом случае доказывать нечего.

Функции $\alpha, \omega\colon E(\Gamma) \to V(\Gamma)$ (начало и конец ребра) определим естественным образом:

$$\alpha(d,e) \overset{\text{опр}}{=} (\alpha(d), \alpha(e)), \quad \omega(d,e) \overset{\text{опр}}{=} (\omega(d), \omega(e)).$$

Назовём отмеченной вершиной графа Γ вершину (x_0, y_0). Обозначим буквой Δ связную компоненту графа Γ, содержащую отмеченную вершину $\delta_0 = (x_0, y_0)$.

Отображение $h\colon \Delta \to Y$ определяется так: $h(x,z) \overset{\text{опр}}{=} f(x) = g(z)$, где x и z — это либо вершины, либо рёбра графов X и Z. Нетрудно показать, что это отображение h является накрытием.

Утверждение 2.11.2. *Построенное накрытие $h\colon \Delta \to Y$ отвечает пересечению подгрупп группы $\pi(Y, y_0)$, соответствующих накрытиям $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xleftarrow{g} (Z, z_0)$, то есть $\operatorname{Im} h_* = \operatorname{Im} f_* \cap \operatorname{Im} g_*$.*

Доказательство. Из определения накрытия h видно, что $h = f \circ \mathrm{pr}_X = g \circ \mathrm{pr}_Z$, где $\mathrm{pr}_X\colon \Delta \to X$ и $\mathrm{pr}_Z\colon \Delta \to Y$ — проекции графа Δ на X и Z: $\mathrm{pr}_X(x,z) = x$ и $\mathrm{pr}_Z(x,z) = z$. Эти проекции также являются накрытиями, и $h_* = f_* \circ (\mathrm{pr}_X)_* = g_* \circ (\mathrm{pr}_Z)_*$. Таким образом, $\operatorname{Im} h_* \subseteq \operatorname{Im} f_* \cap \operatorname{Im} g_*$.

Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим в графе Y произвольный замкнутый несократимый путь $q \in \operatorname{Im} f_* \cap \operatorname{Im} g_*$. Его поднятие $p = d_1^{\varepsilon_1} \dots d_m^{\varepsilon_m}$ в граф X (начиная с x_0) является замкнутым путём (поскольку $q \in \operatorname{Im} f_*$). То же самое можно сказать про поднятие $r = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_m^{\varepsilon_m}$ пути q в Z. Значит, путь $w = (d_1, e_1)^{\varepsilon_1} \dots (d_m, e_m)^{\varepsilon_m}$ в графе Δ является замкнутым несократимым путём, и $h_*(w) = q$. Тем самым утверждение 2.11.2 доказано и перевод теоремы Хаусона на геометрический язык завершён. Для доказательства этой теоремы нам понадобятся две простых геометрических леммы.

Лемма 2.11.1. *Если $f\colon X \to Y$ — накрытие, то $f(H(X)) \subseteq H(Y)$.*

Доказательство. Несократимый замкнутый путь в X переходит при отображении f в несократимый замкнутый путь в Y, а такой путь обязан (по определению) лежать в голове графа Y.

Лемма 2.11.2. *Если X — конечный связный граф, все вершины которого имеют валентность 2 или 3, то эйлерова характеристика графа X равна минус половине числа его вершин валентности 3.*

Доказательство. Если все вершины имеют валентность 3, то, очевидно, $|E(X)| = \frac{3}{2}|V(X)|$ и $e(X) = |V(X)| - |E(X)| = -\frac{1}{2}|V(X)|$. В общем случае лемма доказывается индукцией по числу вершин валентности 2. Стирая вершину валентности 2 и объединяя два смежных с ней ребра (рис. 16), мы получаем граф с меньшим числом вершин и той же эйлеровой характеристикой.

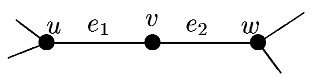

Рис. 16

Доказательство теоремы Хаусона. Разумеется, можно считать, что свободная группа F, содержащая H и K, является конечно порождённой, так как в любом случае $H, K \subseteq \langle H, K \rangle$. Можно даже считать, что группа F имеет ранг два, поскольку, как мы знаем, любая конечно порождённая свободная группа является подгруппой свободной группы ранга два (утверждение 2.5). Реализуем такую группу F как фундаментальную группу графа Y, изображённого на рисунке 17 справа. Подгруппы H и K реализуются тогда некоторыми накрытиями $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xleftarrow{g} (Z, z_0)$. Одно из таких возможных накрытий изображено на рисунке 17 (надо только хвосты продолжить до бесконечности).

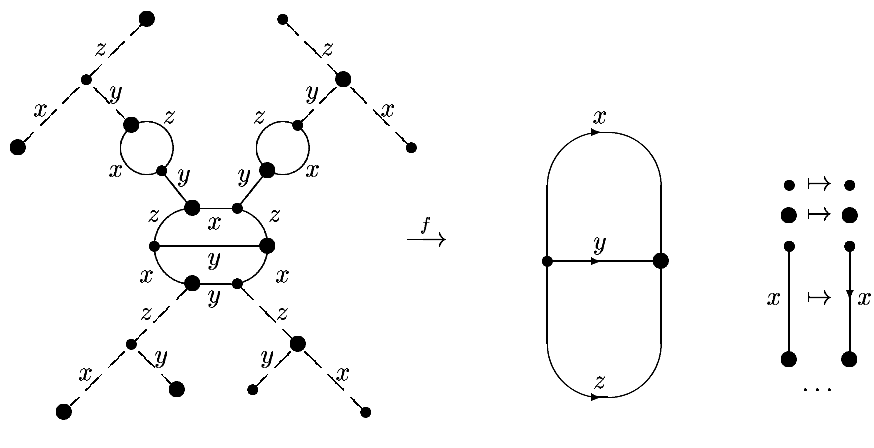

Рис. 17

Подгруппа $H \cap K$ реализуется накрытием $h\colon \Delta \to Y$, о котором идёт речь в утверждении 2.11.2. Все вершины графов X, Y, Z и Δ имеют валентность 3. Рассмотрим головы X', $Y' = Y$, Z' и Δ' этих графов. По лемме 2.11.1 между этими графами имеются отображения f', g', pr'_X, pr'_Z и $h' = f' \circ \mathrm{pr}'_X = g' \circ \mathrm{pr}'_Z$, являющиеся ограничениями соответствующих отображений f, g, pr_X, pr_Z и $h = f \circ \mathrm{pr}_X = g \circ \mathrm{pr}_Z$. Эти морфизмы $f', g', \ldots$ не будут, вообще говоря, накрытиями, но будут, конечно, локально инъективными отображениями, поэтому $V_3(\Delta') \subseteq V_3(X') \times V_3(Z')$; следовательно, $|V_3(\Delta')| \leqslant |V_3(X')| \cdot |V_3(Z')|$, где V_3 обозначает число вершин валентности 3. Значит, по лемме 2.11.2 мы имеем

$$-e(\Delta') = \frac{1}{2}|V_3(\Delta')| \leqslant \frac{1}{2}|V_3(X')| \cdot |V_3(Z')| = \frac{1}{2}(-2e(X'))(-2e(Z')) = 2(-e(X'))(-e(Z')),$$

что и означает справедливость оценки $(*)$ в силу утверждения 2.10. Теорема доказана.

Гипотеза Ханны Нейман утверждает, что двойку в неравенстве $(*)$ можно убрать, то есть *для любых двух подгрупп H и K свободной группы имеет место оценка*

$$\operatorname{rank}(H \cap K) - 1 \leqslant (\operatorname{rank} H - 1)(\operatorname{rank} K - 1). \qquad (**)$$

Эта гипотеза уже много лет остаётся недоказанной (и не опровергнутой), несмотря на усилия многих математиков. Не удаётся даже хоть сколько нибудь уменьшить константу в неравенстве $(*)$. Известно лишь, что гипотеза Х. Нейман справедлива для подгрупп, удовлетворяющих некоторым дополнительным предположениям. Например, оценка $(**)$ верна в случае, когда H и K являются подгруппами конечного индекса (докажите!). Из результатов В. Дика и Е. Форманека следует, что гипотеза Х. Нейман верна в случае, когда ранг хотя бы одной из пересекаемых подгрупп не превосходит трёх.