Л.21

3. КОПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

3.1. Определение. Примеры. Простейшие свойства

Любая группа G является, как мы знаем, гомоморфным образом некоторой свободной группы $F = F(X)$. Зафиксируем некоторый эпиморфизм $f\colon F \to G$ и будем называть *соотношением* группы G всякий элемент группы $N = \ker f \triangleleft F$. Представим ядро N как нормальное замыкание некоторого множества соотношений $R \subseteq N$ и будем говорить, что соотношения из множества R являются *определяющими соотношениями* группы G, а все соотношения этой группы являются *следствиями* определяющих соотношений. Таким образом, соотношение w является следствием соотношений R тогда и только тогда, когда в свободной группе F имеет место равенство вида

$$w = \prod_{i=1}^{n} w_i^{\varepsilon_i u_i}, \qquad \text{где } w_i \in R,\ u_i \in F \text{ и } \varepsilon_i \in \{\pm 1\}.$$

(Напомним, что $w_i^{\pm u_i}$ мы понимаем как $u_i^{-1} w_i^{\pm 1} u_i$.) Мы будем писать $G = \langle X \mid R \rangle$ и называть правую часть этого равенства *копредставлением* группы G. Элементы множества X в таком случае называют образующими, или порождающими, группы G, а слова из R называют определяющими соотношениями группы G. Наоборот, всякая формальная запись вида $\langle X \mid R \rangle$, где X — некоторое множество (букв), а R — некоторое множество слов в алфавите $X \amalg X^{-1}$, является копредставлением некоторой группы:

$$\langle X \mid R \rangle \overset{\text{опр}}{=} F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle\,.$$

Часто вместо того чтобы говорить «слово (например) $x^2y^{-1}xy$ является соотношением некоторой группы», говорят «равенство $x^2y^{-1}xy = 1$ является соотношением данной группы». Можно также перенести что-нибудь в правую часть и назвать равенство $x^2 = x^{-y}$ соотношением данной группы.

Пример 3.1.1. Копредставление $G = \left\langle x, y \,\middle|\, x^2 = x^y, y = 1 \right\rangle$ задаёт тривиальную группу. Действительно, подставляя равенство $y = 1$ в первое соотношение, мы получаем $x^2 = x$, откуда $x = 1$. На более формальном языке то же самое рассуждение выглядит так: нормальная подгруппа $N = \left\langle\!\left\langle x^2y^{-1}x^{-1}y, y \right\rangle\!\right\rangle \triangleleft F(x,y)$ содержит y (это очевидно) и x, поскольку в свободной группе $F(x,y)$ имеет место равенство $x = (x^2y^{-1}x^{-1}y)^x(y)^{-x}(y)$; таким образом, $N = F(x,y)$ и $G = F(x,y)/N = \{1\}$.

Можно считать, что группа $\langle X \mid R \rangle$ состоит из слов в алфавите $X \amalg X^{-1}$, рассматриваемых с точностью до эквивалентности: слова u и v задают один и тот же элемент группы $\langle X \mid R \rangle$, если соотношение $u = v$ является следствием соотношений R, то есть в свободной группе $uv^{-1} \in \langle\langle R \rangle\rangle$. Следующая теорема представляет собой основное свойство копредставлений.

Теорема 3.1. *Пусть группа G задана копредставлением $G = \langle X \mid R \rangle$ и H — некоторая группа. Тогда отображение $f\colon X \to H$ продолжается до гомоморфизма $G \to H$ в том и только том случае, когда в группе H имеет место равенство $(f(x_1))^{\varepsilon_1} \ldots (f(x_n))^{\varepsilon_n} = 1$ для каждого определяющего соотношения $x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \in R$.*

Доказательство. Каждое соотношение $x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \in R$ представляет единицу в группе G, следовательно, для каждого гомоморфизма $f\colon G \to H$ элемент $(f(x_1))^{\varepsilon_1} \ldots (f(x_n))^{\varepsilon_n} \in H$ является единицей группы H.

Наоборот, пусть есть некоторое отображение $f\colon X \to H$. Это отображение продолжается до гомоморфизма свободной группы $f\colon F(X) \to H$. Если $R \subseteq \ker f$, то и $\langle\langle R \rangle\rangle \subseteq \ker f$. Значит, отображение f корректно определено на факторгруппе $G = F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle$ и задаёт гомоморфизм из этой группы в H.

Теорема 3.1 показывает, что определяющие соотношения отвечают за существование гомоморфизмов, подобно тому как образующие отвечают за единственность гомоморфизмов.

Пример 3.1.2. Копредставление

$$G = \left\langle x_1, \ldots, x_n \,\middle|\, x_i^2 = 1,\ x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1},\ x_i x_j = x_j x_i \text{ при } |i-j| > 1 \right\rangle$$

задаёт симметрическую группу S_{n+1}. Действительно, рассмотрим отображение, переводящее x_i в транспозицию $(i, i+1)$. Непосредственно проверяется, что определяющие соотношения превращаются при этом в истинные равенства в симметрической группе. По теореме 3.1.1 это отображение задаёт гомоморфизм $f\colon G \to S_{n+1}$. Чтобы доказать, что f — изоморфизм, достаточно установить, что группа G содержит не более $(n+1)!$ элементов. Покажем сначала, что каждый элемент группы G может быть записан в виде произведения $\prod x_{i_j}$, в которое буква x_n входит не более одного раза. Действительно, рассмотрим произведение $b = x_n a x_n$, где $a \in G_{n-1} \overset{\text{опр}}{=} \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle$. По индукции мы можем считать, что элемент a записывается в виде произведения букв $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и буква x_{n-1} входит в это произведение не более одного раза. Но тогда, пользуясь тем, что x_n

коммутирует со всеми буквами, кроме x_{n-1}, мы получим, что элемент b лежит либо в $G_{n-2} \overset{\text{опр}}{=} \langle x_1, \dots, x_{n-2}\rangle$, либо в $G_{n-2}x_nx_{n-1}x_nG_{n-2}$. Осталось воспользоваться тем, что $x_nx_{n-1}x_n = x_{n-1}x_nx_{n-1}$ и уменьшить количество вхождений буквы x_n в произведение b. Покажем теперь, что группа G раскладывается в объединение смежных классов

$$G = G_{n-1} \cup G_{n-1}x_n \cup G_{n-1}x_nx_{n-1} \cup \ldots \cup G_{n-1}x_nx_{n-1}\ldots x_1. \qquad (*)$$

Если элемент g группы G не лежит в G_{n-1}, то (по доказанному) он записывается в виде $g = ax_nb$, где $a, b \in G_{n-1}$. По предположению индукции можно считать, что $b = cx_{n-1}\ldots x_{n-k}$, где $c \in G_{n-2}$. Поэтому $g = acx_nx_{n-1}\ldots x_{n-k}$, что и требовалось. Из разложения $(*)$ видно, что $|G| \leqslant n|G_{n-1}|$, и следовательно (по индукции) $|G| \leqslant (n+1)!$.

3.2. Преобразования Тице

Разумеется, у группы всегда есть много разных копредставлений. Например, у тривиальной группы есть копредставление из примера 3.1.1, но есть и более простые копредставления: $\langle x \mid x = 1\rangle$ и $\langle \varnothing \mid \varnothing\rangle$. Возникает естественный вопрос: как связаны различные копредставления данной группы?

Общими преобразованиями Тице копредставления $\langle X \mid R\rangle$ называют следующие преобразования и обратные к ним:

TO_1 добавление к множеству соотношений R произвольного множества его следствий;

TO_2 добавление к множеству образующих X произвольного множества новых букв Y с одновременным добавлением соотношений вида $\{y = u_y\,;\, y \in Y\}$, где u_y — произвольные слова в алфавите $X \amalg X^{-1}$.

Теорема 3.2.1. *Группы, заданные копредставлениями $\langle X \mid R\rangle$ и $\langle Y \mid S\rangle$, изоморфны тогда и только тогда, когда копредставление $\langle Y \mid S\rangle$ получается из копредставления $\langle X \mid R\rangle$ конечным числом общих преобразований Тице.*

Доказательство. В одну сторону эта теорема очевидна — преобразования TO_1 и TO_2 не меняют группу.

Пусть группы $G = \langle X \mid R\rangle$ и $H = \langle Y \mid S\rangle$ изоморфны и $\varphi\colon G \to H$ — изоморфизм. Мы хотим построить конечную цепочку преобразований Тице, превращающую копредставление $\langle X \mid R\rangle$ в копредставление $\langle Y \mid S\rangle$.

Во-первых, отметим, что множества X и Y можно считать непересекающимися. Если это не так, то рассмотрим новое множество Y', равномощное множеству Y и такое, что $Y' \cap (X \cup Y) = \varnothing$. Пусть $y \mapsto y'$ — биекция между множествами Y и Y'; при этом мы считаем, что множество слов S переходит в множество слов S'. Сделаем следующие преобразования Тице:

$$\langle Y \mid S\rangle \underset{OT_2}{\longrightarrow} \langle Y \cup Y' \mid S \cup \{y' = y\,;\, y' \in Y'\}\rangle \underset{OT_1}{\longrightarrow} \langle Y \cup Y' \mid S \cup \{y' = y\,;\, y' \in Y'\} \cup S'\rangle \underset{OT_1^{-1}}{\longrightarrow}$$
$$\underset{OT_1^{-1}}{\longrightarrow} \langle Y \cup Y' \mid \{y' = y\,;\, y' \in Y'\} \cup S'\rangle \underset{OT_2^{-1}}{\longrightarrow} \langle Y' \mid S'\rangle\,.$$

Мы получили «новое» копредставление $\langle Y' \mid S'\rangle$ группы H такое, что $X \cap Y' = \varnothing$.

Теперь считаем, что $X \cap Y = \varnothing$. Для каждого $x \in X$ рассмотрим (некоторое) слово u_x в алфавите $Y^{\pm 1}$, представляющее элемент $\varphi(x) \in H$. Отметим, что в группе H выполнены соотношения $R(u_x)$, получающиеся из соотношений R подстановкой слов u_x вместо букв $x \in X$.

Аналогично, для каждого $y \in Y$ рассмотрим (некоторое) слово v_y в алфавите $X^{\pm 1}$, представляющее элемент $\varphi^{-1}(y) \in G$. В группе G выполнены соотношения $S(v_x)$, получающиеся из соотношений S подстановкой слов v_y вместо букв $y \in Y$. Кроме того, в группе G выполнены соотношения $x = u_x(v_y)$, где слова $u_x(v_y)$ получаются из слов u_x подстановкой v_y вместо y. Аналогично, в группе H имеют место соотношения $y = v_y(u_x)$.

Сделаем такие преобразования:

$$\langle Y \mid S\rangle \underset{OT_2}{\longrightarrow} \langle Y \cup X \mid S \cup \{x = u_x\}\rangle \underset{OT_1}{\longrightarrow} \langle Y \cup X \mid S \cup \{x = u_x\} \cup R(u_x)\rangle \underset{OT_1}{\longrightarrow}$$
$$\underset{OT_1}{\longrightarrow} \langle Y \cup X \mid S \cup \{x = u_x\} \cup R(u_x) \cup R \cup \{x = u_x(v_y)\} \cup \{y = v_y(u_x)\} \cup \{y = v_y\}\rangle\,. \qquad (*)$$

Мы получили «симметричное» копредставление $(*)$, поэтому оно может быть также получено из копредставления $\langle X \mid R\rangle$. Применяя обратные преобразования, мы получаем из копредставления $(*)$ копредставление $\langle X \mid R\rangle$ и завершаем доказательство.

В случае, когда копредставления конечны, то есть имеется лишь конечное число образующих и конечное число соотношений, можно обойтись более простыми преобразованиями.

Элементарными преобразованиями Тице копредставления $\langle X \mid R\rangle$ называют следующие преобразования и обратные к ним:

T_1 добавление к множеству соотношений R соотношения вида r_1r_2, где $r_1, r_2 \in R$;

T_2 добавление к множеству соотношений R соотношения вида r^{-1}, где $r \in R$;

T_3 добавление к множеству соотношений R соотношения вида $u^{-1}ru$, где $r \in R$, а u — произвольное слово;

T_4 добавление к множеству образующих X новой буквы y с одновременным добавлением соотношения вида $y = u$, где u — произвольное слово в алфавите $X^{\pm 1}$.

Теорема 3.2.2. *Группы, заданные конечными копредставлениями $\langle X \mid R\rangle$ и $\langle Y \mid S\rangle$, изоморфны тогда и только тогда, когда копредставление $\langle Y \mid S\rangle$ получается из копредставления $\langle X \mid R\rangle$ конечным числом элементарных преобразований Тице.*

Доказательство этой теоремы в сущности повторяет доказательство теоремы 3.2.1. Надо только заметить, что общее преобразование TO_1, состоящее в добавлении конечного числа следствий, раскладывается в композицию нескольких преобразований типа T_1, T_2, T_3 и обратных к ним.

Может показаться, что следующие *преобразования Эндрюса–Куртиса*, не меняющие числа образующих и числа соотношений, выглядят более естественно, чем элементарные преобразования Тице:

AC_1 замена одного из соотношений $r_1 \in R$ на соотношение вида r_1r_2, где $r_2 \in R$ — произвольное соотношение, не совпадающее с r_1;

AC_2 замена одного из соотношений $r \in R$ на соотношение вида r^{-1};

AC_3 замена одного из соотношений $r \in R$ на соотношение вида $u^{-1}ru$, где u — произвольное слово.

Чего можно добиться, пользуясь такими преобразованиями, неизвестно. Наибольший интерес представляет следующий вопрос, имеющий топологическое происхождение:

Проблема Эндрюса–Куртиса. *Верно ли, что всякое копредставление тривиальной группы с n образующими и n соотношениями (сбалансированное копредставление) может быть превращено в копредставление $\langle x_1, \ldots, x_n \mid x_1 = 1, \ldots, x_n = 1\rangle$ конечным числом преобразований Эндрюса–Куртиса?*

Ответ на этот вопрос неизвестен даже при $n = 2$. То есть можно сказать, что изучение копредставлений тривиальной группы является нетривиальной задачей.

3.3. Замена образующих, копредставления подгрупп и факторгрупп

Анализ доказательства теоремы 3.2.1 показывает, что справедливо следующее утверждение о замене образующих:

Теорема 3.3.1. *Пусть группа $G = \langle x_1, \ldots \mid r_1(x_1, \ldots) = 1, \ldots\rangle$ порождается элементами $\{y_j\}$ и при этом образующие связаны равенствами $y_j = u_j(x_1, \ldots)$ и $x_i = v_i(y_1, \ldots)$. Тогда в образующих $\{y_j\}$ группа G задаётся копредставлением $\langle y_1, \ldots \mid \{r_k(v_1(y_1, \ldots), \ldots) = 1\} \cup \{y_j = u_j(v_1(y_1, \ldots), \ldots)\}\rangle$.*

Следствие. *Если группа G является конечно представленной, то есть обладает конечным копредставлением, то в любой конечной системе образующих группа G может быть задана конечным числом определяющих соотношений.*

Займёмся теперь вопросом, как по копредставлению группы написать копредставление подгруппы. Рассмотрим группу G и её подгруппу H. Пусть G обладает копредставлением $\langle X \mid R\rangle$, то есть $G = F(X)/\langle\langle R\rangle\rangle$. Пусть $\widetilde{H} \subseteq F(X)$ — прообраз группы H. Если $H = \langle u_1(X), \ldots, u_k(X)\rangle$, то $\widetilde{H} = \langle u_1(X), \ldots, u_k(X)\rangle \cdot \langle\langle R\rangle\rangle \subseteq F(X)$. По теореме Нильсена–Шрайера группа $\widetilde{H}$ является свободной. При этом $H \simeq \widetilde{H}/\langle\langle R\rangle\rangle$, что позволяет написать копредставление для H. Чтобы получить «экономное» копредставление, надо заметить, что нормальное замыкание $\langle\langle R\rangle\rangle$ множества R в группе $F(X)$ совпадает с нормальным замыканием $\langle\langle R \cup R^{z_1} \cup \ldots \cup R^{z_j}\rangle\rangle_{\widetilde{H}}$ множества $R \cup R^{z_1} \cup \ldots \cup R^{z_j}$ в группе $\widetilde{H}$, где $1, z_1, \ldots, z_j$ — представители левых смежных классов $F(X)$ по $\widetilde{H}$. В частности, справедлива такая теорема:

Теорема 3.3.2. *Подгруппа конечного индекса конечно представленной группы обладает конечным копредставлением.*

С копредставлениями факторгрупп дело обстоит проще:

Теорема 3.3.3. *Пусть $G = \langle X \mid R\rangle$ и $N = \langle\langle W\rangle\rangle \triangleleft G$, где W — некоторое множество слов в алфавите $X^{\pm 1}$. Тогда факторгруппа G/N обладает копредставлением $\langle X \mid R \cup W\rangle$.*

Доказательство мы оставляем читателю в качестве лёгкого упражнения.