5. ДИАГРАММЫ

5.1. Геометрия определяющих соотношений

Теория групп выгодным образом отличается от теории колец или других алгебраических систем наличием геометрической интерпретации вывода следствий из соотношений. Эта особенность теории групп позволяет задействовать геометрическую интуицию при решении чисто алгебраических задач.

Начнём с примера. На рисунке 1 слева нарисован четырёхугольник, рёбра которого ориентированы (то есть на них имеются стрелки) и помечены буквами x и y. На границе этого четырёхугольника написан коммутатор $[x,y]$, то есть мы прочитаем слово $x^{-1}y^{-1}xy$, если будем обходить границу этого четырёхугольника против часовой стрелки (начав с правой верхней вершины) и читать метки рёбер, причём вместо букв x и y читать x^{-1} и y^{-1}, соответственно, в тех случаях, когда мы проходим соответствующее ребро против стрелки. Если мы склеим четыре таких четырёхугольника, как показано на рисунке 19 справа, то получим диаграмму, на границе которой написан коммутатор $[x^2,y^2]$, то есть $x^{-2}y^{-2}x^2y^2$. Этот рисунок, как мы увидим, может служить доказательством того, что в группе $\langle x,y \mid [x,y]=1\rangle$ выполнено соотношение $[x^2,y^2]=1$. Другими словами, соотношение $[x^2,y^2]=1$ является следствием соотношения $[x,y]=1$. Более того, у любого следствия любого набора соотношений существует такое геометрическое доказательство.

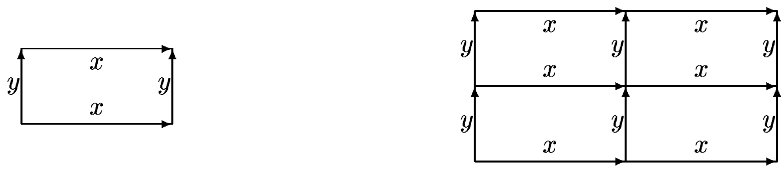


Рис. 19

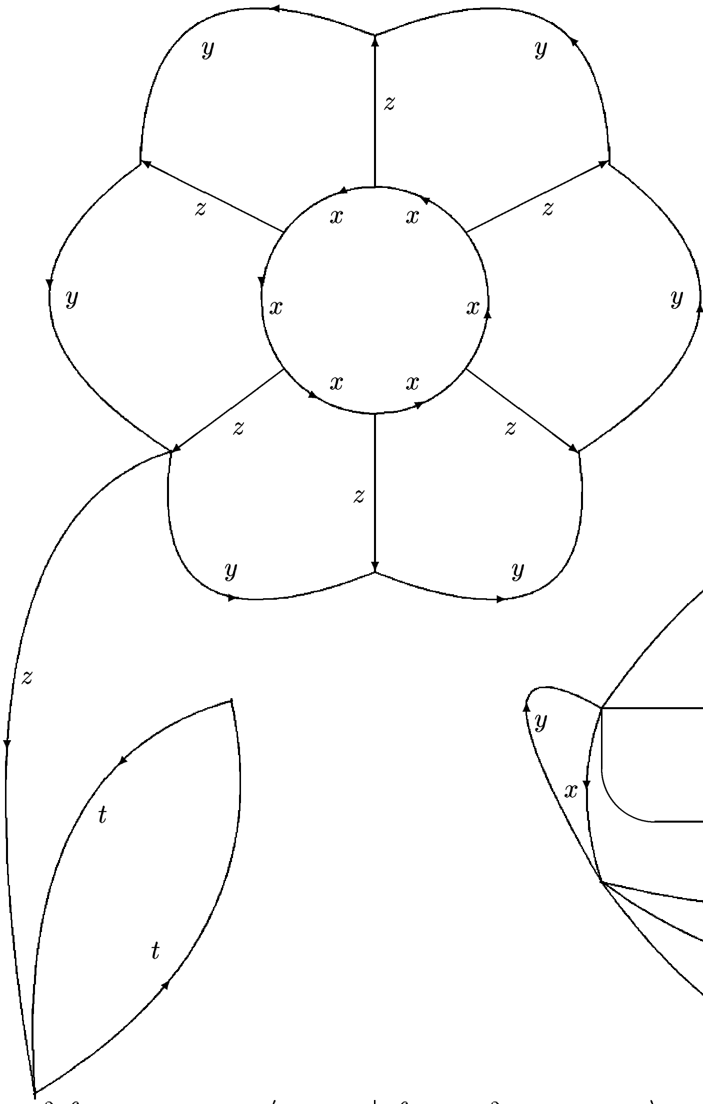
Необходимые определения выглядят следующим образом. *Картой* мы будем называть конечный связный плоский (то есть нарисованный на плоскости) граф. Такой граф делит плоскость на конечное число областей, называемых *клетками*, ровно одна из которых неограничена. Неограниченную клетку называют *внешней*, остальные клетки называют *внутренними*. Границу внешней клетки называют также *границей карты*. Под *длиной* пути (составленного из рёбер) между двумя вершинами в графе понимается число рёбер на этом пути.

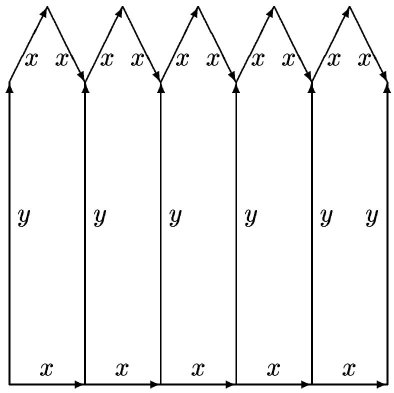
Пусть X — некоторый алфавит и R — некоторый набор слов (соотношений) в алфавите $X^{\pm 1}$. Допустим, что у нас имеется карта, рёбра которой ориентированы (то есть на них нарисованы стрелки) и помечены буквами алфавита X. Под *меткой клетки* мы понимаем слово в алфавите $X^{\pm 1}$, которое читается при обходе границы этой клетки против часовой стрелки (при этом буквы, отвечающие рёбрам, которые проходятся против направления ребра, следует заменять на обратные). Метка клетки определена с точностью до циклического сдвига.

Такая размеченная карта называется *диаграммой ван Кампена* над копредставлением $\langle X \mid R\rangle$, если метка каждой внутренней клетки является либо одним из соотношений набора R, либо формально обратным к соотношению из R.

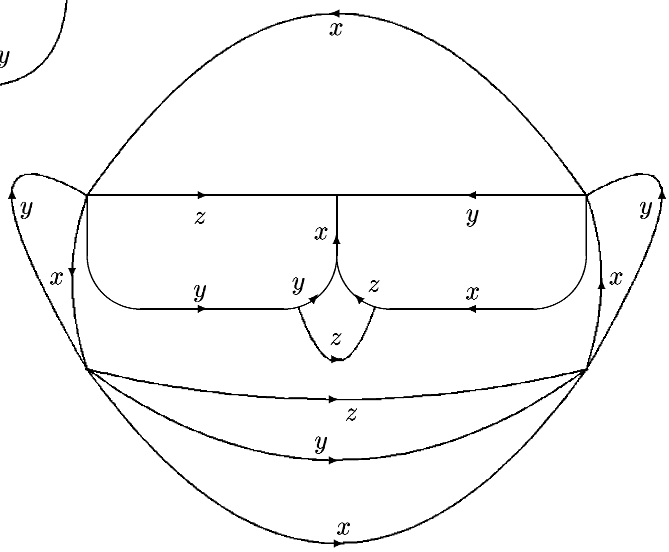
Лемма ван Кампена. *Слово $w \in F(X)$ равно единице в группе $\langle X \mid R\rangle$ тогда и только тогда, когда существует диаграмма ван Кампена над этим копредставлением, метка контура которой есть w.*

На рисунке 20 изображено несколько примеров геометрического выводов следствий из определяющих соотношений. Что нарисовано справа внизу, догадайтесь сами.





$y^{-1}x^5y = x^{10}$ в группе $\langle x, y \,|\, x^y = x^2 \rangle$



$? = ?$ в группе $\langle ? \,|\, ? \rangle$

$t^2y^{6z} = 1$ в группе $\langle x, y, z, t \,|\, x^6 = 1,\ t^2 = 1,\ x^z = y \rangle$

Рис. 20

Мы проиллюстрируем идею доказательства леммы ван Кампена на примере. Нетрудно сообразить, что группа $\langle x, y \,|\, x^2 = 1, y^2 = 1, (xy)^2 = 1 \rangle$ изоморфна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и, в частности, в ней выполняется соотношение $[x, y] = 1$. Это означает, что в свободной группе слово $[x, y]$ представляется в виде произведения слов, сопряжённых к $x^{\pm 2}$, $y^{\pm 2}$ и $(xy)^{\pm 2}$. Такое представление нетрудно найти: $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-2}y^{-2x^{-1}}(xy)^2$. На рисунке 21 слева показана диаграмма, состоящая из отдельных клеток с хвостиками, на границе которой написано слово $x^{-2}y^{-2x^{-1}}(xy)^2$, фигурирующее в правой части этой формулы.

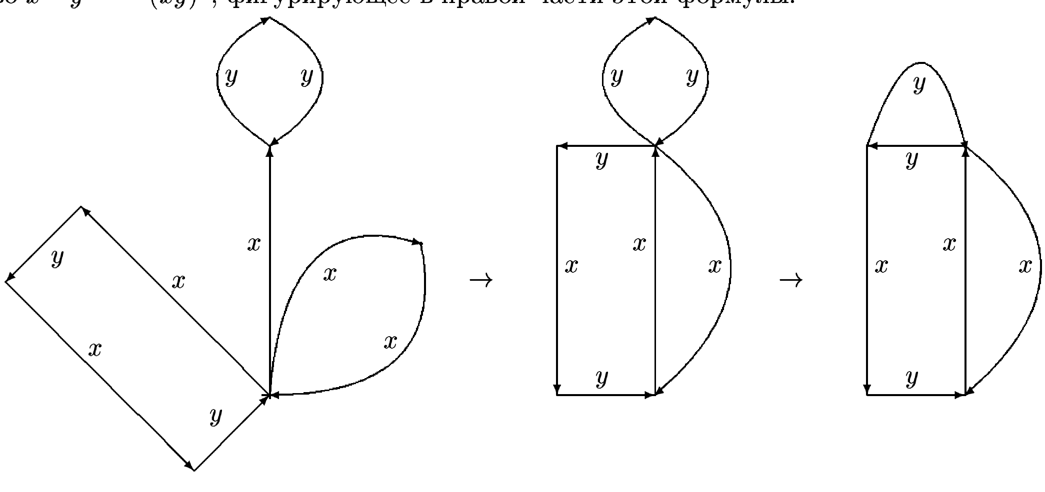


Рис. 21

Произведя «схлопывания» (рис. 22), мы получим диаграмму, изображённую на рисунке 21 справа, на контуре которой написан коммутатор $[x, y]$. Тем самым мы построили диаграмму, о которой идёт речь в лемме ван Кампена.

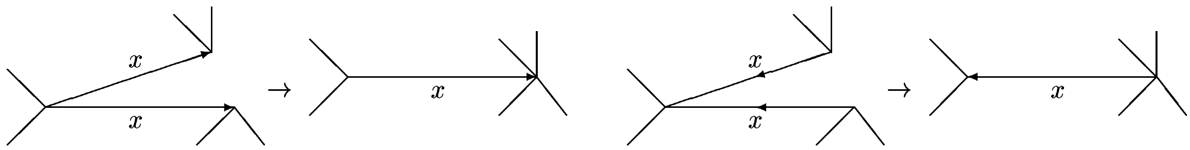


Рис. 22

Если мы хотим, наоборот, показать, что метка контура каждой диаграммы ван Кампена равна единице в группе, заданной соответствующим копредставлением, мы должны «расчленить» данную диаграмму на отдельные клетки с хвостиками. На рисунке 23 показано, как расчленяется диаграмма, изображённая на рисунке 19.

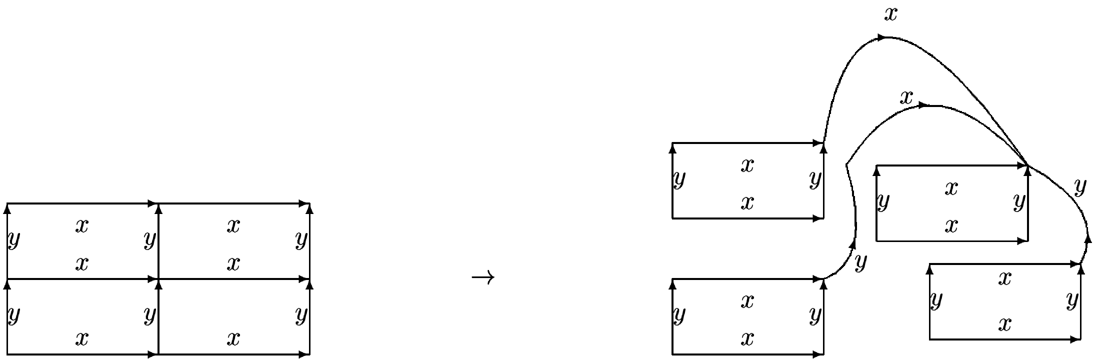


Рис. 23

Расчленённая диаграмма даёт следующее выражение коммутатора $[x^2, y^2]$ через сопряжённые к простым коммутаторам:

$$[x^2, y^2] = \left(x^{-1}[x,y]x\right) \cdot \left((yx)^{-1}[x,y](yx)\right) \cdot [x,y] \cdot \left(y^{-1}[x,y]y\right).$$

5.2. Условия малого сокращения

Доказать, что некоторое равенство выполняется в группе, заданной копредставлением, обычно бывает нетрудно. Диаграммы могут помочь здесь, но не в этом их главная прелесть. Мы знаем, что гораздо труднее бывает доказать, что что-то некоторое равенство НЕ выполняется в группе, заданной копредставлением.

Геометрическая интерпретация вывода следствий из соотношений может сильно помочь в доказательстве неравенств. Самым известным инструментом здесь является *теория малых сокращений*, простейший вариант которой мы рассмотрим в этом параграфе.

Рассмотрим копредставление $\langle X \mid R\rangle$. В дальнейшем мы будем предполагать, что все соотношения несократимы и набор R является *симметризованным*, то есть вместе с каждым соотношением $v \in R$ набор R содержит формально обратное соотношение v^{-1} и все циклические перестановки соотношения v. Это предположение не ограничивает общности, поскольку и формально обратное соотношение, и циклические перестановки соотношения являются очевидными следствиями исходного соотношения.

Скажем, что симметризованный набор слов (соотношений) R удовлетворяет *условию малого сокращения* $C'(\lambda)$, где λ — некоторое положительное вещественное число, если для любых двух различных слов v_1 и v_2 из набора R длина их общего начала строго меньше, чем $\lambda \cdot |v_1|$.

Рассмотрим, например, набор соотношений

$$\begin{array}{llll} x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xy = 1, & y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1} = 1, & xyx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1} = 1, & yx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x = 1, \\ y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}yx = 1, & x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}yxy^{-1} = 1, & yxy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-1} = 1, & xy^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y = 1, \end{array}$$

получающийся симметризацией из копредставления $\langle x, y \mid [x,y]^2 = 1\rangle$. Каждое из слов этого набора имеет длину 8, а общее начало двух слов этого набора состоит не более чем из одной буквы. Таким образом, этот набор удовлетворяет условию $C'(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\lambda > \frac{1}{8}$.

Следующий результат представляет собой простейший (и важнейший) частный случай известной *леммы Гриндлингера*.*)

*) Мартин Давидович Гриндлингер (Martin Greendlinger) родился в Нью-Йорке в 1932 году. После защиты диссертации переехал в СССР, долгое время работал в Тульском и Ивановском педагогических институтах; потом вернулся в США. Много информации о его жизни можно найти в рассекреченных архивах ФБР.

Теорема 5.2.1. *Если симметризованное копредставление $\langle X \mid R\rangle$ удовлетворяет условию $C'(\frac{1}{6})$ и непустое несократимое слово $w \in F(X)$ равно единице в группе, заданной этим копредставлением, то некоторая циклическая перестановка слова w имеет с одним из слов $v \in R$ общее начало u, длина которого больше, чем половина длины слова v:*

$$|u| > \frac{|v|}{2}.$$

Например, из этой теоремы следует, что $[x^{1000}, y^{1000}]^{1000} \neq 1$ в группе $\langle x, y \mid [x, y]^2 = 1\rangle$. Действительно, набор соотношений, получающийся из соотношения $[x, y]^2 = 1$ симметризацией удовлетворяет, как мы видели, условию $C'(\frac{1}{6})$; следовательно, согласно теореме 5.2.1 у каждого следствия есть циклическая перестановка, несократимая форма которого обладает с одним из соотношений этого симметризованного набора общим подсловом длины большей, чем $\frac{8}{2} = 4$. Но максимальные общие подслова циклических перестановок слова $[x^{1000}, y^{1000}]^{1000}$ и слов этого набора имеют длину два (это слова $x^{-1}y^{-1}$, $y^{-1}x$, xy и yx^{-1}). Таким образом, мы получаем следующий факт.

Следствие. *Существует группа G, в которой для некоторых двух элементов $a, b \in G$*

$$[a, b]^2 = 1, \quad \text{но} \quad [a^{1000}, b^{1000}]^{1000} \neq 1.$$

Подобных следствий, разумеется, мы можем получить сколько угодно. На самом деле, можно сказать даже больше:
если конечное копредставление $\langle x, y \mid [x, y]^2 = 1\rangle$ удовлетворяет условию $C'(\frac{1}{6})$, то для любого слова w мы можем быстро определить, равно ли оно единице в соответствующей группе.

Действительно, посмотрим на все циклические перестановки слова w. Если ни одна из них не имеет ни с одним из слов v набора R общего начала длины большей, чем $|v|/2$, то, в силу теоремы 5.2.1, мы заключаем, что $w \neq 1$ в этой группе.

Рассмотрим теперь случай, когда слово w (или какая-то его циклическая перестановка) имеет длинное общее начало u с одним из соотношений $v \in R$:

$$w \equiv uf, \quad R \ni v \equiv ug, \quad |u| > |g|.$$

В этом случае соотношение $v = 1$ может быть переписано в виде $u = g^{-1}$, и $w = 1$ (то есть $uf = 1$) в данной группе тогда и только тогда, когда $g^{-1}f = 1$. Но слово $g^{-1}f$ короче чем исходное, поэтому, заменив слово w на слово $g^{-1}f$ и повторив эту процедуру несколько раз, в конце концов мы получим ответ. Мы либо придём к пустому слову и таким образом установим, что $w = 1$, либо получим слово, не имеющее длинных общих подслов со словами набора R и заключим, что $w \neq 1$. Этот простой метод решения проблемы равенства называется *алгоритмом Дэна.*

Для доказательства теоремы 5.2.1 нам понадобится одно общее наблюдение, касающееся диаграмм ван Кампена. Если в диаграмме есть две клетки, имеющие общее ребро и «зеркально симметричные» относительно этого ребра (рис. 24, слева), то такую пару клеток называют *сократимой парой.* Дело в том, что сократимую пару всегда можно сократить, как показано на рисунке 24. Поэтому диаграммы, о которых идёт речь в определении геометрического следствия, можно считать *приведёнными*, то есть не содержащими сократимых пар.

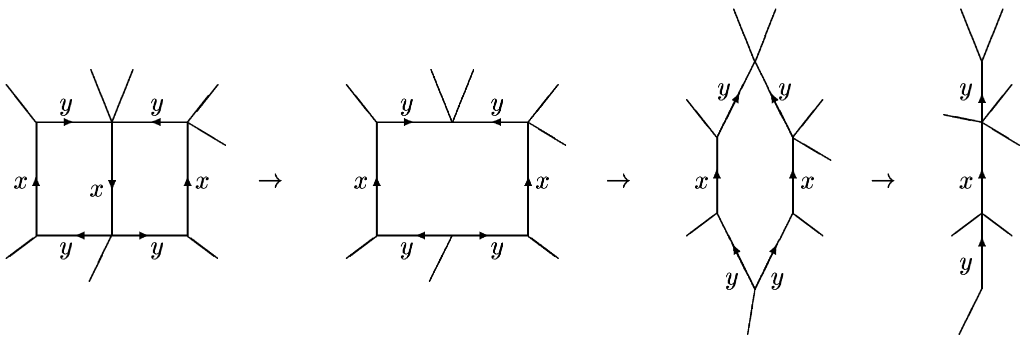


Рис. 24

В приведённой диаграмме ван Кампена над набором соотношений, удовлетворяющим условию $C'(\frac{1}{6})$, никакие две внутренние клетки не могут иметь общего участка границы, длина которого больше или равна $\frac{1}{6}$ периметра одной из этих клеток. Это замечание подсказывает следующее определение.

Если некоторая карта не имеет вершин степени один (то есть каждая вершина лежит по крайней мере на двух рёбрах) и каждый связный общий участок границы любых двух внутренних клеток карты имеет длину (в смысле количества рёбер) меньше, чем $\frac{1}{6}$ от периметра каждой из этих клеток, то про такую карту говорят, что она *удовлетворяет условию* $C'(\frac{1}{6})$.

С учётом сделанного выше замечания основная теорема сводится к следующему простому, чисто геометрическому факту.

Теорема 5.2.2. *Пусть имеется карта, удовлетворяющая условию $C'(\frac{1}{6})$. Тогда найдётся клетка, граница которой имеет общий связный участок с границей всей карты, длина которого больше, чем половина периметра этой клетки.*

На рисунке 25 мы изобразили некоторую карту. Эта карта удовлетворяет условию $C'(\frac{1}{6})$, поскольку каждая клетка имеет периметр либо 7, либо 8, а любые две клетки имеют не более одного общего ребра. На каждой клетке написано, какой частью периметра клетка выходит на границу карты. Как мы видим, среди этих чисел есть такие, которые больше $\frac{1}{2}$. Если мы попытаемся дорисовать эту карту и «прикрыть» сильно выступающие клетки, то возникнут новые сильно выступающие клетки, и ничего у нас не получится. Проделав такие эксперименты, читатель непременно заметит, что карты с условием $C'(\frac{1}{6})$ трудно рисовать на листе бумаги. Геометрия таких карт похожа на геометрию плоскости Лобачевского.

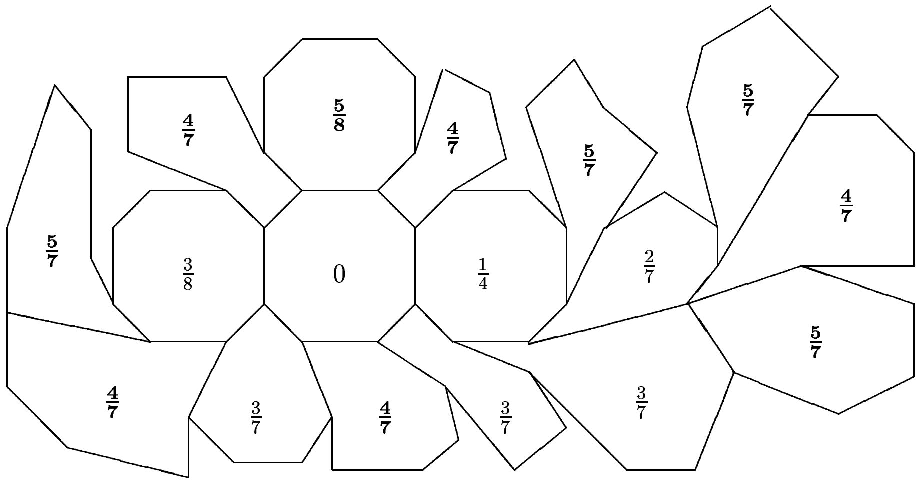


Рис. 25

Константу $\frac{1}{6}$ в утверждении 2 нельзя уменьшить. На рисунке 26 слева изображена карта, в которой общий участок границы любых двух клеток составляет не более $\frac{1}{6}$ от периметра каждой из них, но ни одна клетка не выходит на границу карты более чем половиной своего периметра. Совсем безнадёжная ситуация изображена на рисунке 26 справа. Общий участок границы двух клеток составляет не более $\frac{1}{5}$ от периметра каждой из них, но на границу карты клетки выходят совсем маленькими частями своих периметров.

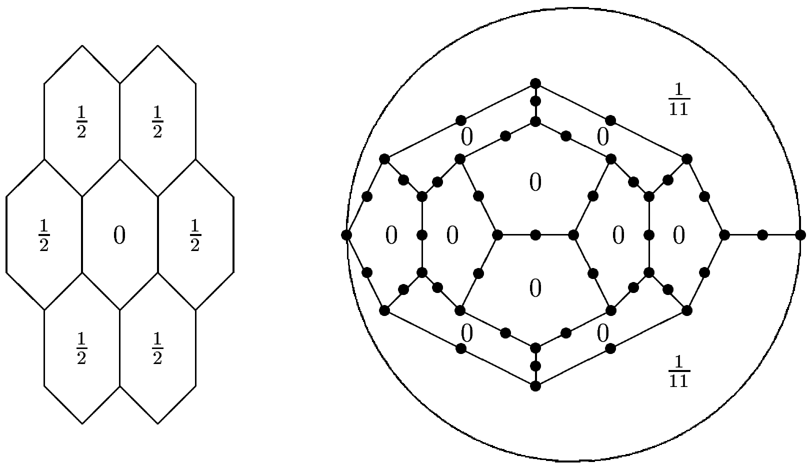


Рис. 26

5.3 Углы, кривизны и доказательство теоремы 5.2.2

Рассмотрим некоторую клетку D карты и вершину v, лежащую на границе этой клетки. Такую пару α мы будем называть *углом клетки D при вершине v*. Число углов при каждой вершине совпадает со степенью этой вершины (то есть с числом рёбер, исходящих из неё), а число углов клетки совпадает с периметром этой клетки.

Следующее простое, но полезное утверждение называют иногда *весовым тестом.*

Лемма. *Если каждому углу α каждой клетки некоторой карты поставлено в соответствие число $\nu(\alpha)$* (которое мы будем называть *величиной угла α*), *то*

$$\sum_v K(v) + \sum_D K(D) = 4. \qquad (*)$$

*Здесь суммирования распространяются на все вершины v и все клетки D рассматриваемой карты, а величины $K(v)$ и $K(D)$, называемые **кривизнами** соответствующей вершины и клетки, определяются так:*

$$K(v) \overset{\text{опр}}{=} 2 - \sum_\alpha \nu(\alpha), \qquad K(D) \overset{\text{опр}}{=} 2 - \sum_\alpha (1 - \nu(\alpha)),$$

где первая сумма распространяется на все углы при вершине v, а вторая — на все углы клетки D.

Доказательство. Заметим, что результат суммирования $(*)$ не зависит от величин углов. Действительно, если α — угол клетки D при вершине v, то величина $\nu(\alpha)$ входит в сумму $(*)$ два раза: один раз со знаком минус, когда мы считаем кривизну вершины v, а другой раз со знаком плюс, когда мы считаем кривизну клетки D.

Таким образом, равенство $(*)$ достаточно доказать для случая, когда все величины углов равны единице. В этом случае наше равенство принимает вид

$$2 \cdot (\textit{число вершин}) - (\textit{сумма степеней всех вершин}) + 2 \cdot (\textit{число клеток}) = 4.$$

Сумма степеней всех вершин совпадает с удвоенным числом рёбер карты. Поэтому доказываемое равенство сводится к формуле Эйлера

$$(\textit{число вершин}) - (\textit{число рёбер}) + (\textit{число клеток}) = 2,$$

которая легко доказывается по индукции.

Величины $\nu(\alpha)$ можно представлять себе как обычные величины углов, измеренные в радианах, умноженных на π. Нулевая кривизна будет тогда соответствовать обычной евклидовой геометрии (например, сумма всех углов треугольника будет равна единице); отрицательная кривизна делает ситуацию похожей на геометрию Лобачевского, а положительная кривизна — на сферическую геометрию.

Приступим теперь к доказательству теоремы 5.2.2. Пусть у нас имеется карта, удовлетворяющая условию $C'(\frac{1}{6})$. Припишем углам величины по следующим правилам:
а) всем углам внешней клетки припишем величину 1;
б) углу внутренней клетки, находящемуся при вершине степени $d = k + l$, при которой имеется k углов внешней клетки и l углов внутренних клеток, припишем величину $\frac{2-k}{l}$.
Из этих правил вытекает, что
- каждая вершина имеет нулевую кривизну;
- внешняя клетка имеет кривизну 2.
Согласно лемме это означает, что должна найтись внутренняя клетка с положительной кривизной.

Внутренняя клетка, не граничащая с внешней, будет иметь отрицательную кривизну, поскольку из условия $C'(\frac{1}{6})$ следует, что у такой клетки будет по крайней мере 7 соседних клеток и, следовательно, по крайней мере 7 её углов имеют величину $\leqslant \frac{2}{3}$, а величины остальных углов не превосходят единицу (рисунок 27, слева). Вообще, несложно заметить, что кривизна внутренней клетки D может быть положительной лишь в случае, когда эта клетка имеет ровно один связный участок общей границы с внешней клеткой и граничит ещё не более чем с тремя внутренними клетками. Из условия $C'(\frac{1}{6})$ следует, что в таком случае клетка D выходит на границу всей карты более чем половиной своего периметра, что и доказывает теорему 5.2.2, а вместе с ней и теорему 5.2.1.

На рисунке 27 представлены некоторые из возможных вариантов расположения внутренней клетки относительно внешней. В центре клетки написана её кривизна.

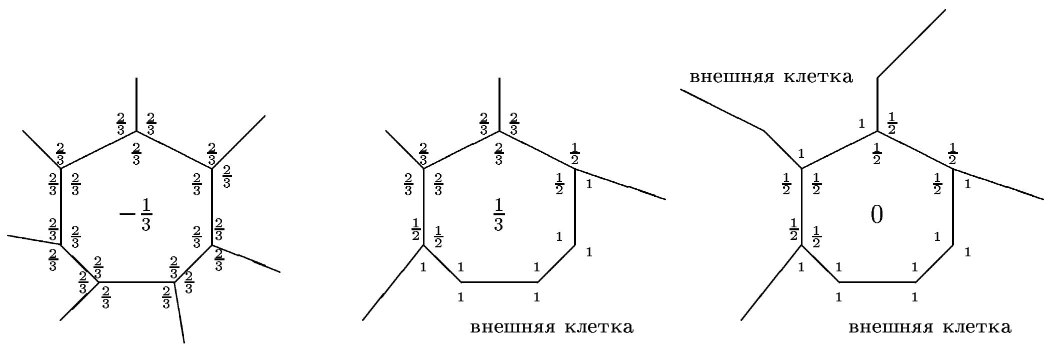


Рис. 27

Познакомиться поближе с теорией малых сокращений, её обобщениями и применением других геометрических соображений в комбинаторной теории групп можно по книгам [ЛиШу80] и [Ольш89].