Л.3

1.6. Язык теории категорий. Двойственность

Давайте представим себе, что мы беседуем с неким странным человеком, назовём его К. (Категорщик).

К. Расскажите мне что-нибудь о группах. Например скажите, что вы называете тривиальной группой?

Мы. Тривиальная группа — это группа, состоящая из одного элемента.

К. А что такое элемент группы?

Мы. Гм... А что вы вообще знаете?

К. Я знаю, что такое группы, я предпочитаю называть их объектами. Но для меня объекты — это неопределяемые понятия и они ни из чего не состоят (как для вас элементы). Я знаю, что такое гомоморфизмы, я называю их морфизмами из одного объекта в другой. Морфизм — это тоже неопределяемое понятие, но я знаю, что такое композиция морфизмов и тождественный морфизм id_A каждого объекта A. Мне известно, что композиция морфизмов ассоциативна, кроме того, $\varphi \circ \mathrm{id}_A = \varphi$ и $\mathrm{id}_A \circ \psi = \psi$ для всех морфизмов φ из объекта A куда угодно и всех морфизмов ψ откуда угодно в объект A. Больше я ничего не знаю.

Мы. Хорошо... Тривиальной мы называем группу, из которой в любую группу существует ровно один гомоморфизм.

К. Понятно. Это я называю *начальный объект.* Значит, в категории групп существует начальный объект?

Мы. Существует и единственный (с точностью до изоморфизма).

К. Что единственный, я и сам понимаю. Действительно, если есть два начальных объекта e и e', то имеются единственные морфизмы $\varphi : e \to e'$ и $\varphi' : e' \to e$. Но их композиция должна быть единственным морфизмом $e \to e$, то есть она должна совпадать с тождественным морфизмом: $\varphi'\varphi = \mathrm{id}_e$. Аналогично, $\varphi\varphi' = \mathrm{id}_{e'}$. Это означает, что морфизмы φ и φ' взаимно обратны, то есть являются изоморфизмами.

Многое ли мы сможем объяснить категорщику? Оказывается, что довольно многое (особенно, если вести речь не о всех, а только об абелевых группах). Давайте перейдём к строгим определениям.

Категорией называют набор $\mathcal{C} = (\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}, \alpha, \omega, \circ)$, где $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ — некоторые классы, элементы которых называют *объектами* категории $\mathcal{C}$ и *морфизмами* категории $\mathcal{C}$, соответственно; α и ω суть отображения $\alpha, \omega\colon \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, при этом говорят, что φ есть морфизм *из* объекта $\alpha(\varphi)$ *в* объект $\omega(\varphi)$ и пишут $\varphi\colon \alpha(\varphi) \to \omega(\varphi)$; множество всех морфизмов из объекта A в объект B обозначают $\mathrm{Mor}\,(A, B)$; наконец, отображение $\circ$ представляет собой отображение (точнее, набор отображений) $\circ\colon \mathrm{Mor}\,(B, C) \times \mathrm{Mor}\,(A, B) \to \mathrm{Mor}\,(A, C)$, называемое *композицией.* Композицию морфизмов $\varphi\colon B \to C$ и $\psi\colon A \to B$ обозначают $\varphi \circ \psi$ или просто $\varphi\psi$. При этом предполагается, что

1) композиция ассоциативна;
2) в каждом из множеств $\mathrm{Mor}\,(A, A)$ имеется такой элемент id_A, называемый *тождественным* морфизмом, что $\varphi \circ \mathrm{id}_A = \varphi$ и $\mathrm{id}_A \circ \psi = \psi$ для всех морфизмов φ из объекта A и всех морфизмов ψ в объект A.

Примеры категорий. Категория множеств — объектами служат всевозможные множества, морфизмами — всевозможные отображения. Категория абелевых групп — объектами служат всевозможные абелевы группы, морфизмами — гомоморфизмы групп. Аналогичным образом определяются категории всех групп, колец, векторных пространств, алгебр над данным полем и т.п. Примером категории неалгебраического происхождения может служить категория топологических пространств, объекты которой суть всевозможные топологические пространства, а морфизмы — непрерывные отображения. Можно рассматривать и искусственные примеры категорий: например, можно взять в качестве класса объектов (любое) трёхэлементное множество $\{A, B, C\}$, а в качестве класса морфизмов — (любое) множество из шести элементов $\varphi, \psi, \sigma, \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_C$, считая, что $\varphi\colon B \to C$, $\psi\colon A \to B$, а $\sigma\colon A \to C$ есть композиция φ и ψ.

Объект A называется *начальным*, или *инициальным*, если для любого объекта X существует единственный морфизм $A \to X$. В категории абелевых групп имеется единственный начальный объект — тривиальная группа.

Если, наоборот, для любого объекта X существует и единственный морфизм $X \to A$, то объект A называется *терминальным.*[*)] В категории абелевых групп имеется единственный терминальный объект — тривиальная группа.

Морфизм $f\colon A \to B$ называется *изоморфизмом*, если у него есть обратный морфизм, то есть такой морфизм $g\colon B \to A$, что $fg = \mathrm{id}_B$ и $gf = \mathrm{id}_A$.

Морфизм $f\colon A \to B$ называется *мономорфизмом*, или *категорно инъективным* морфизмом, если на него можно сокращать справа, то есть из равенства $\varphi f = \psi f$ следует $\varphi = \psi$ для любых морфизмов из B куда угодно. В категории абелевых групп категорная инъективность совпадает с обычной.

Морфизм $f\colon A \to B$ называется *эпиморфизмом*, или *категорно сюръективным* морфизмом, если на него можно сокращать слева, то есть из равенства $f\varphi = f\psi$ следует $\varphi = \psi$ для любых морфизмов из чего угодно в A. В категории абелевых групп категорная сюръективность совпадает с обычной.

[*)] Термин *конечный объект* в русском языке не используется. Иначе нам пришлось бы говорить, что существует единственная конечная группа.

Объект A называется *вложимым* в объект B, или представимым как подобъект объекта B, если существует мономорфизм $A \to B$. Объект A называется *факторобъектом* объекта B (точнее, A представим как факторобъект объекта B), если существует эпиморфизм $B \to A$.

Объект A вместе с морфизмами $\pi_i\colon A \to A_i$ называется (категорным) *произведением* объектов A_i с проекциями π_i, если для любого набора морфизмов $f_i\colon X \to A_i$ существует единственный морфизм $f\colon X \to A$ такой, что $f_i = \pi_i f$. В категории абелевых групп понятие категорного произведения превращается в понятие декартовой суммы.

Объект A вместе с морфизмами $\alpha_i\colon A_i \to A$ называется *копроизведением* объектов A_i относительно морфизмов α_i, если для любого набора морфизмов $f_i\colon A_i \to X$ существует единственный морфизм $f\colon A \to X$ такой, что $f_i = f\alpha_i$. В категории абелевых групп понятие копроизведения превращается в понятие прямой суммы. В других категориях произведений и копроизведений может и не быть. Однако, если в какой-либо категории произведение (копроизведение) некоторого семейства объектов существует, то оно единственно с точностью до изоморфизма.

Одно из преимуществ категорного языка состоит в возможности давать короткие (но не всегда понятные) определения. Например, читателю, не знакомому с понятием *свободного произведения* групп, мы можем сказать, что так называют копроизведение в категории всех групп. А *тензорное произведение* коммутативных колец с единицей — это просто копроизведение в категории коммутативных колец с единицей.

Для каждой категории $\mathcal{C}$ можно рассмотреть *двойственную категорию* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, которая получается из исходной категории $\mathcal{C}$ изменением направлений всех стрелок. Говоря более формально, двойственная категория имеет те же объекты и морфизмы, что исходная категория, но морфизм исходной категории из объекта A в объект B считается морфизмом из B в A в двойственной категории; соответственно, композицией fg морфизмов f и g двойственной категории называется их композиция gf в исходной категории.

У каждого категорного понятия или утверждения возникает двойственное понятие или утверждение. Например, двойственны следующие понятия: начального и терминального объекта, мономорфизма и эпиморфизма, подобъекта и факторобъекта, произведения и копроизведения.

Понятие полной абелевой группы можно определить на категорном языке так: абелева группа G называется полной, если она выделяется прямым слагаемым во всякой содержащей её абелевой группе.

Если изменить направление всех стрелок в этом определении, то мы получим следующее: абелева группа G называется ..., если она выделяется прямым слагаемым во всякой абелевой группе, факторгруппой которой она является (то есть всякая группа A с сюръективным гомоморфизмом $f\colon A \to G$ раскладывается в декартову сумму $A \simeq G \oplus B$, и при этом изоморфизме эпиморфизм f становится проекцией).

Нетрудно сообразить, что этому определению удовлетворяют в точности свободные абелевы группы. Таким образом, полные и свободные абелевы группы оказываются двойственными друг другу.

Посмотрим, во что превращаются при этой двойственности известные нам факты.

Факторгруппа полной группы полна.	$\longleftrightarrow$	Подгруппа свободной группы свободна. (Докажите.)
Всякая группа вкладывается в полную.	$\longleftrightarrow$	Всякая группа представляется как факторгруппа свободной.
Декартова сумма полных групп полна.	$\longleftrightarrow$	Прямая сумма свободных групп свободна. (Докажите.)
Прямая сумма полных групп полна.	$\longleftrightarrow$	Декартова сумма свободных групп свободна. (ЭТО НЕВЕРНО!)

В книге [Куро67] можно найти доказательство того, что декартова сумма бесконечного числа бесконечных циклических групп не является свободной абелевой группой. Мы видим, что категория абелевых групп не эквивалентна своей двойственной категории (но похожа на неё).

Можно показать, что категория конечных абелевых групп эквивалентна своей двойственной; этот факт есть очень частный случай *двойственности Понтрягина*. Об этой замечательной двойственности можно прочитать в книгах [Понт54] или [ХьРо75]. Приведём один пример.

Утверждение 1.6. *В каждой конечной абелевой группе число подгрупп порядка k совпадает с числом подгрупп индекса k.*

Схема доказательства. Если G — конечная абелева группа, то двойственная ей группа $\widetilde{G}$ определяется как множество всех гомоморфизмов $G \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с операцией поточечного сложения. Гомоморфизму $\varphi\colon G_1 \to G_2$ соответствует гомоморфизм $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{G}_2 \to \widetilde{G}_1$, задаваемый формулой $\widetilde{\varphi}\colon f \mapsto f \circ \varphi$. Это и есть двойственность: дважды двойственная группа канонически изоморфна исходной, сюръективным гомоморфизмам соответствуют инъективные и т. д. В частности, число вложений $A \to G$ совпадает с числом эпиморфизмов $\widetilde{G} \to \widetilde{A}$ и, следовательно, число подгрупп порядка k группы G равно числу факторгрупп порядка k группы $\widetilde{G}$. Осталось заметить, что $\widetilde{G} \simeq G$ (этот изоморфизм не канонический, но он легко усматривается из разложения группы G в прямую сумму циклических).

Подробнее о теории категорий можно прочитать, например, в [Макл04]. В частности, в этой книге объясняется термин *эквивалентность категорий.*

1.7. Периодические абелевы группы

Утверждение 1.7. *Множество $T(A)$ элементов конечных порядков произвольной абелевой группы A является подгруппой, называемой периодической частью группы A. Факторгруппа $A/T(A)$ не имеет кручения (то есть нетривиальных элементов конечного порядка).*

Доказательство. Очевидно.

Таким образом, произвольной абелевой группе соответствует однозначно определённая (с точностью до изоморфизма) пара — периодическая абелева группа и абелева группа без кручения. Обратное, к сожалению, неверно: не всякая абелева группа однозначно восстанавливается по своей периодической части и факторгруппе по ней.

Теорема 1.7.1. *Существует абелева группа, в которой периодическая часть не выделяется прямым слагаемым.*

Доказательство. В качестве такой группы A можно взять декартову сумму групп $\mathbb{Z}_p$ по всем простым p. Нетрудно заметить, что периодической частью группы A является соответствующая прямая сумма групп $\mathbb{Z}_p$. Факторгруппа $A/T(A)$ является полной, поскольку на каждое фиксированное число n делится почти каждая координата (то есть каждая кроме конечного числа) каждого элемента группы A. Но сама группа A не содержит нетривиальных полных подгрупп, так как для каждого ненулевого элемента найдётся простое число p, на которое он не делится (в качестве такого p можно взять номер любой ненулевой координаты данного элемента). Мы видим, что $A/T(A)$ не вкладывается в A, что и доказывает теорему.

Теорема 1.7.2. *Совокупность G_p элементов абелевой группы G, порядки которых являются степенями данного простого числа p, является подгруппой, называемой p-компонентой группы G. Факторгруппа G/G_p не имеет p-кручения (то есть элементов порядка p). Периодическая абелева группа раскладывается в прямую сумму своих p-компонент.*

Доказательство. Для доказательства разложимости в прямую сумму достаточно показать, что
1) всякий элемент конечного порядка раскладывается в сумму элементов из p-компонент;
2) $G_p \cap \sum\limits_{q \neq p} G_q = \{0\}$.

Первый факт вытекает из того, что конечная циклическая группа раскладывается в прямую сумму примарных циклических. Второй факт очевиден, поскольку в $\sum\limits_{q \neq p} G_q$ нет p-кручения. Теорема доказана.

Эта теорема показывает, что для изучения периодических абелевых групп (как правило) достаточно изучить p-группы.

Если мы «немного» усилим определение периодической группы, написав

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall g \in G\ ng = 0 \quad \text{вместо} \quad \forall g \in G\ \exists n \in \mathbb{N}\ ng = 0,$$

мы получим определение группы *ограниченного периода* (или *ограниченной экспоненты*, или *ограниченного показателя*). Наименьшее число n, для которого $nG = \{0\}$, называется при этом *периодом* группы G. Абелевы группы ограниченного периода устроены просто.

Первая теорема Прюфера. *Всякая абелева группа ограниченного периода раскладывается в прямую сумму примарных циклических.*

Доказательство. В силу теоремы 1.7.2 утверждение достаточно доказать для p-группы. Пусть G — p-группа ограниченного периода, то есть $p^k G = \{0\}$. Будем доказывать индукцией по k. По предположению индукции можно считать, что $pG = \bigoplus \langle x_i \rangle$ и $x_i \neq 0$. Поскольку x_i лежат в pG, мы имеем $x_i = py_i$ для некоторых $y_i \in G$. Заметим, что $\sum \langle y_i \rangle = \bigoplus \langle y_i \rangle$. Действительно,

$$\sum k_i y_i = 0 \implies \sum k_i x_i = 0 \implies \text{все } k_i \text{ делятся на } p \implies \sum \tfrac{k_i}{p} x_i = \sum k_i y_i = 0 \implies$$
$$\tfrac{k_i}{p} \text{ делятся на } |\langle x_i \rangle| \implies k_i \text{ делятся на } |\langle y_i \rangle|.$$

Пусть $Y = \bigoplus \langle y_i \rangle$ и H — максимальная подгруппа группы G, тривиально пересекающаяся с Y. Поскольку $pH \subseteq H \cap pG = \{0\}$, H является векторным пространством над $\mathbb{Z}_p$ и (так как векторное пространство имеет базис) является прямой суммой циклических групп порядка p. Остаётся показать, что $G = H + Y$. Возьмём произвольный элемент $g \in G$. Поскольку $pg \in pG \subseteq Y$, по построению Y найдётся такой $y \in Y$, что $pg = py$. Но тогда $p(g - y) = 0$. Отсюда следует, что $g - y \in H$, поскольку в противном случае $\langle g - y \rangle + H$ была бы большей чем H подгруппой, тривиально пересекающейся с Y. Мы доказали, что $g \in H + Y$, что и требовалось.