Л.4

2. НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

2.1. Сопряжённость, коммутаторы, нижний центральный ряд

Мы переходим на мультипликативную систему обозначений: групповую операцию мы будем называть умножением, нейтральный элемент будем называть единицей (и обозначать символом 1), прямые и декартовы суммы групп будут теперь называться *прямыми* и *декартовыми произведениями.* (Заметим в скобках, что декартово произведение сохраняет свой категорный смысл, то есть является категорным произведением в категории всех групп, а прямое произведение уже не является копроизведением в категории всех групп). Если X — подмножество в группе G, символом $\langle X\rangle$ мы обозначаем множество всевозможных произведений элементов из X и обратных к ним:

$$\langle X\rangle=\left\{\prod_{i=1}^{n}x_i^{\varepsilon_i}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ x_i\in X,\ \varepsilon_i\in\{1,-1\}\right\}.$$

Очевидно, $\langle X\rangle$ является наименьшей подгруппой группы G, содержащей X. Мы будем говорить, что эта подгруппа *порождена* множеством X. Аналогичным образом, мы будем иногда рассматривать наименьшую нормальную подгруппу группы G, содержащую множество X; эту подгруппу мы обозначаем $\langle\!\langle X\rangle\!\rangle$ и называем *нормальным замыканием множества* X. Понятно, что в явном виде нормальное замыкание выглядит так:

$$\langle\!\langle X\rangle\!\rangle=\left\{\prod_{i=1}^{n}g_i^{-1}x_i^{\varepsilon_i}g_i\;\middle|\; n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ x_i\in X,\ \varepsilon_i\in\{1,-1\},\quad g_i\in G\right\}.$$

Мы будем использовать обозначение a^b для элемента $b^{-1}ab$, сопряжённого к элементу a при помощи элемента b. Эта «показательная» функция обладает замечательными свойствами:

$$a^{bc}=\left(a^b\right)^c,\quad (ab)^c=a^cb^c,\quad a^1=a,\quad 1^a=1,\quad (a^n)^b=\left(a^b\right)^n.$$

Здесь a, b и c — элементы группы, а $n\in\mathbb{Z}$. При этом мы будем писать a^{nb} и a^{-b} вместо $(a^n)^b$ и $\left(a^{-1}\right)^b$.

Коммутатором $[a,b]$ двух элементов a и b некоторой группы G мы будем называть элемент

$$[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab=b^{-a}b=a^{-1}a^b.$$

Операция коммутирования неассоциативна; для кратных коммутаторов мы будем использовать обозначение

$$[a,b,\dots,y,z]\overset{\text{опр}}{=}[[[\dots[a,b],\dots],y],z]$$

и называть это выражение *левонормированным коммутатором* элементов $a,b,\dots,y,z$. Во всякой группе имеют место следующие *коммутаторные тождества*:

$$\begin{aligned}&ab=ba[a,b],\\&[a,b]^{-1}=[b,a],\\&[a,bc]=[a,c][a,b][a,b,c],\\&[ab,c]=[a,c][a,c,b][b,c],\\&[a,b,c^a][c,a,b^c][b,c,a^b]=1\quad\text{(тождество Холла)},\end{aligned}$$

которые доказываются прямым вычислением (после подстановки в них явных выражений для коммутаторов всё сокращается).

Пусть A и B — нормальные подгруппы группы G (пишем $A,B\lhd G$). Мы будем рассматривать следующие операции над нормальными подгруппами: пересечение, произведение $AB=\{ab\mid a\in A,\ b\in B\}$ и *взаимный коммутант* $[A,B]=\langle[a,b]\mid a\in A,\ b\in B\rangle$. И пересечение, и произведение, и взаимный коммутант нормальных подгрупп является нормальной подгруппой, все три операции коммутативны; кроме того

$$[A,B]\subseteq A\cap B\quad\text{и}\quad[A,B,C]\subseteq[C,A,B][B,C,A].\tag{1}$$

Первое включение следует из того, что $[a,b]=a^{-1}a^b=b^{-a}b$, то есть (в силу нормальности A и B) каждый из образующих группы $[A,B]$ лежит и в A, и в B. Второе включение немедленно вытекает из тождества Холла и того факта, что тройной взаимный коммутант $[A,B,C]\overset{\text{опр}}{=}[[A,B],C]$ порождается соответствующими тройными коммутаторами:

$$[A,B,C]=\langle\{[a,b,c]\mid a\in A,\ b\in B,\ c\in C\}\rangle.$$

Этот факт является частным случаем следующей леммы.

Лемма 2.1.1. *Если* $A = \langle X \rangle \triangleleft G$ *и* $B = \langle\langle Y \rangle\rangle \triangleleft G$, *то* $[A, B] = \langle\langle \{[x, y] \mid x \in X,\ y \in Y\} \rangle\rangle$.

Доказательство. То, что правая часть доказываемого равенства содержится в левой части, очевидно. Обратное включение вытекает из того, что в факторгруппе группы G по $\langle\langle \{[x, y] \mid x \in X,\ y \in Y\} \rangle\rangle$ элементы множества X коммутируют с элементами множества Y; следовательно, все элементы группы $A = \langle X \rangle$ коммутируют с элементами множества Y, и значит элементы, сопряжённые к элементам множества Y, коммутируют с элементами группы, сопряжённой к группе A, которая совпадает с A в силу её нормальности. Но $B = \langle \{y^g \mid y \in Y, g \in G\} \rangle$, из чего вытекает, что в рассматриваемой факторгруппе каждый элемент группы A коммутирует с каждым элементом группы B, что и доказывает нужное включение.

Нижним центральным рядом группы G называют следующий набор её подгрупп:

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G].$$

Все эти подгруппы нормальны в G и вложены друг в друга:

$$G = \gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq \dots\ .$$

Второй член нижнего центрального ряда есть знакомый нам *коммутант* группы: $\gamma_2(G) = [G, G] = G'$. Когда ясно, о какой группе G идёт речь, мы будем обозначать i-й член её нижнего центрального ряда просто γ_i.

Имеет место следующий простой факт:

Лемма 2.1.2. $[\gamma_i, \gamma_j] \subseteq \gamma_{i+j}$.

Доказательство. Индукция по $\min(i, j)$. Если этот минимум (пусть это будет j) равен единице, то доказываемое включение является равенством, совпадающим с определением $(i+1)$-го члена нижнего центрального ряда. Шаг индукции выглядит так:

$$[\gamma_i, \gamma_j] = [\gamma_i, [\gamma_{j-1}, G]] = [G, \gamma_{j-1}, \gamma_i] \subseteq [\gamma_{j-1}, \gamma_i, G][\gamma_i, G, \gamma_{j-1}] = [\gamma_{j-1}, \gamma_i, G][\gamma_{i+1}, \gamma_{j-1}]$$

(включение следует из (1)); осталось применить предположение индукции и заключить, что каждый из получившихся сомножителей содержится в γ_{i+j}.

По модулю членов нижнего центрального ряда коммутаторные тождества приобретают простой и красивый вид.

Лемма 2.1.3. *Пусть* $a \in \gamma_i,\ b \in \gamma_j,\ c \in \gamma_k$; *тогда*

$$\begin{array}{ll}
ab = ba & (\operatorname{mod} \gamma_{i+j}),\\
[a, b]^{-1} = [b, a], & \\
[a, bc] = [a, b][a, c] & (\operatorname{mod} \gamma_{i+j+k}),\\
[ab, c] = [a, c][b, c] & (\operatorname{mod} \gamma_{i+j+k}),\\
[a, b, c][c, a, b][b, c, a] = 1 & (\operatorname{mod} \gamma_{i+j+k+1}).
\end{array}$$

Доказательство. Первое тождество немедленно следует из леммы 2.1.2. Второе тождество в доказательстве не нуждается. Докажем третье тождество. В группе G/γ_{i+j+k} мы имеем $[a, bc] = [a, c][a, b][a, b, c] = [a, c][a, b]$, поскольку $[a, b, c] \in \gamma_{i+j+k}$ в соответствии с леммой 2.1.2. Далее, согласно первому коммутаторному тождеству $[a, c][a, b] = [a, b][a, c]$ по модулю $\gamma_{i+j+i+k}$ и тем более по модулю γ_{i+j+k}. Аналогично доказываются остальные тождества.

Написанные тождества очень похожи на аксиомы кольца Ли. Первое тождество логично называть коммутативностью умножения, второе — кососимметричностью коммутатора, третье и четвёртое — дистрибутивностью коммутатора относительно умножения, а пятое тождество есть тождество Якоби. Заметим, что из дистрибутивности вытекает, что

$$[a^n, b] = [a, b]^n \quad (\operatorname{mod} \gamma_{2i+j}), \quad \text{если } a \in \gamma_i,\ b \in \gamma_j.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно n раз воспользоваться дистрибутивностью, если $n > 0$; а если $n < 0$, то можно написать $1 = [a^{-1}a, b] = [a^{-1}, b][a, b] \ (\operatorname{mod} \gamma_{2i+j})$, поэтому $[a^{-1}, b] = [a, b]^{-1} \ (\operatorname{mod} \gamma_{2i+j})$.

Лемма 2.1.4. *Если* $G = \langle X \rangle G'$, *то* $\gamma_i = \langle \{[x_1, \dots, x_i] \mid x_k \in X\} \rangle \gamma_{i+1}$.

Доказательство. Индукция по i. Предполагая, что γ_{i-1}/γ_i порождается левонормированными коммутаторами от образующих X, мы имеем

$$\gamma_i = [\gamma_{i-1}, G] =$$
$$\left\langle \left\{ [f \prod_j c_j, g] \;\middle|\; g \in G,\ f \in \gamma_i,\ c_j \text{— левонормированные коммутаторы длины } i-1 \text{ от элементов множества } X \right\} \right\rangle.$$

Но в силу дистрибутивности коммутатора мы можем написать

$$[f\prod c_j^{\pm 1}, g] = [f,g][\prod c_j^{\pm 1}, g] = [f,g]\prod [c_j^{\pm 1}, g] \pmod{\gamma_{i+i-1+1}}.$$

Первый из полученных коммутаторов лежит в γ_{i+1}, а в остальные мы подставим вместо элемента g его выражение через образующие $g = g'\prod\limits_k x_k^{\pm 1}$ (где $g' \in G'$) и ещё раз воспользуемся дистрибутивностью (а также тем, что $[c_j, g'] \in \gamma_{i+1}$):

$$[c_j^{\pm 1}, g] = [c_j^{\pm 1}, g'\prod_k x_k^{\pm 1}] = \prod_k [c_j^{\pm 1}, x_k^{\pm 1}] = \prod_k [c_j, x_k]^{\pm 1} \pmod{\gamma_{i-1+1+1}}.$$

Мы показали, что γ_i порождается левонормированными коммутаторами от элементов множества X по модулю γ_{i+1}, что и требовалось.

2.2. Нильпотентные группы. Простейшие свойства и примеры

Мы говорим, что группа G *нильпотентна ступени* s, если $\gamma_{s+1}(G) = \{1\} \neq \gamma_s(G)$.

Очевидно, что подгруппы, факторгруппы и декартовы произведения нильпотентных групп ступени s сами нильпотентны ступени не выше s. Отметим ещё, что в нильпотентной группе ступени s имеет место включение $\gamma_s(G) \subseteq Z(G)$; значит, центр нетривиальной нильпотентной группы нетривиален, а факторгруппа по нему имеет меньшую ступень нильпотентности. Если факторгруппа некоторой группы по центру нильпотентна, то сама группа нильпотентна на единицу большей ступени (или тривиальна).

Пример 0. Абелевы группы являются нильпотентными ступени один. Конечно, это тривиальный пример, но мы увидим, что многие свойства абелевых групп переносятся на нильпотентные группы произвольной ступени.

Пример 1. Конечные p-группы (то есть группы, порядок которых есть степень простого числа) являются нильпотентными. Действительно, как известно, центр конечной p-группы нетривиален, следовательно, факторгруппа по центру является p-группой меньшего порядка и мы можем считать, что эта факторгруппа является нильпотентной (по индукции), а значит нильпотентна и вся группа.

Пример 2. Кольцо называют *нильпотентным ступени* s, если произведение любых $s+1$ элементов этого кольца равно нулю. Если N — нильпотентное подкольцо ассоциативного кольца с единицей R, то множество $G = 1 + N$ является нильпотентной группой относительно умножения в R. Действительно, равенство $(1+n)(1+n') = 1 + (n + n' + nn')$ показывает, что множество G замкнуто относительно умножения, а равенство $(1+n)(1 - n + n^2 - n^3 + \ldots + (-1)^s n^s) = 1$ показывает, что каждый элемент из G обратим и $(1+n)^{-1} = (1 - n + n^2 - n^3 + \ldots + (-1)^s n^s) \in G$. Покажем, что группа G нильпотентна. Рассмотрим идеал N^i кольца N, состоящий из всевозможных сумм всевозможных произведений i элементов кольца N. Прямое вычисление коммутатора показывает, что

$$[1-n, 1-n'] = (1 + n + n^2 + \ldots)(1 + n' + n'^2 + \ldots)(1-n)(1-n') \in 1 + nN + Nn + NnN.$$

Таким образом, по индукции мы будем иметь включение $\gamma_i(G) \subseteq 1 + N^i$ и, следовательно, $\gamma_{s+1}(G) \subseteq 1 + N^{s+1} = \{1\}$.

Этот пример частично объясняет, почему нильпотентные группы называются нильпотентными. Следующий пример является важнейшим частным случаем примера 2.

Пример 3. Группа унитреугольных матриц $UT_n(A)$ (то есть верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали) над любым ассоциативным кольцом A с единицей является нильпотентной ступени $n-1$. Этот пример является частным случаем предыдущего, поскольку кольцо нильтреугольных матриц (верхнетреугольных матриц с нулевой диагональю) является нильпотентным подкольцом в кольце всех матриц.

Пример 4. *Группой Гейзенберга* (дискретной) называют множество формальных выражений вида $a^l b^m c^n$, где $l, m, n \in \mathbb{Z}$, которые умножаются по правилам:

$$ca = ac, \quad cb = bc, \quad ab = bac.$$

Легко видеть, что коммутант этой группы есть $\langle c \rangle$, а $\gamma_3 = \{1\}$, то есть группа Гейзенберга нильпотентна ступени 2. Впрочем, этот пример также является частным случаем предыдущего, поскольку группа Гейзенберга изоморфна $UT_3(\mathbb{Z})$. Изоморфизм имеет вид

$$a^l b^m c^n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & l & n \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$