Л.5 Многие свойства абелевых групп переносятся на произвольные нильпотентные группы. Всё, что мы будем доказывать в ближайшее время, можно рассматривать как подтверждение этого тезиса.

Хорошо известно, что подгруппа конечно порождённой абелевой группы сама является конечно порождённой. Вскоре мы увидим, что для произвольных групп это не так.

Теорема 2.2. *Подгруппа конечно порождённой нильпотентной группы сама является конечно порождённой.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа конечно порождённой группы G. Будем доказывать теорему индукцией по ступени нильпотентности группы G. Поскольку коммутант G' группы G имеет меньшую ступень нильпотентности, мы можем считать, что группа $H \cap G'$ конечно порождена, скажем, $H \cap G' = \langle h'_1, \dots, h'_n \rangle$. Но группа $H/(H \cap G')$, будучи подгруппой конечно порождённой абелевой группы G/G', сама является конечно порождённой. Пусть $H/(H \cap G') = \langle h_1(H \cap G'), \dots, h_m(H \cap G') \rangle$. Но тогда $H = \langle h_1, \dots, h_m \rangle (H \cap G') = \langle h_1, \dots, h_m, h'_1, \dots, h'_n \rangle$. Теорема доказана.

Следующую лемму можно рассматривать как обобщение того очевидного факта, что произведение n-х степеней элементов в абелевой группе само является n-й степенью некоторого элемента.

Лемма 2.2. *Пусть* $G^n \overset{\text{опр}}{=} \{x^n \mid x \in G\}$. *Тогда* $\left\langle G^{n^s} \right\rangle \subseteq G^n$, *если* G — *нильпотентная группа ступени* s.

Доказательство. Индукция по s. Группа $\langle G^n \rangle / \gamma_s(\langle G^n \rangle)$ является нильпотентной группой ступени не выше $s-1$. Значит, в силу предположения индукции, для каждого $x \in \left\langle \langle G^n \rangle^{n^{s-1}} \right\rangle$ (в частности, для каждого $x \in \left\langle G^{n^s} \right\rangle$) найдутся такие элементы $y \in \langle G^n \rangle$ и $z \in \gamma_s(\langle G^n \rangle)$, что $x = y^n z$. Но элемент z может быть записан в виде $z = \prod [t_i, g_i^n]$, где $t_i \in \gamma_{s-1}(\langle G^n \rangle)$ и $g_i \in G$. В силу дистрибутивности коммутатора выражение для z можно переписать в виде $z = \prod [t_i, g_i^n] = \prod [t_i, g_i]^n$ (это точное равенство, поскольку $\gamma_{s+1} = \{1\}$). Таким образом,

$$x = y^n z = y^n \prod [t_i, g_i]^n = (y \prod [t_i, g_i])^n.$$

Последнее равенство имеет место в силу того, что коммутаторы $[t_i, g_i]$ лежат в центре группы G. Мы доказали, что каждый элемент $x \in \left\langle G^{n^s} \right\rangle$ является n-й степенью некоторого элемента группы G, что и требовалось.

2.3. Факторгруппа нильпотентной группы по коммутанту

Следующая теорема показывает, что нильпотентная группа во многом похожа на свою факторгруппу по коммутанту.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Тогда *π-числом* мы назовём целое число, все простые делители которого лежат в множестве π; а *π-группой* мы называем периодическую группу, порядки всех элементов которой являются π-числами. В случае, когда множество π состоит из одного числа p, понятие π-группы превращается в понятие p-группы.

Теорема 2.3. *Пусть группа G нильпотентна. Тогда*

1) $G = \langle X \rangle$, если $G = \langle X \rangle G'$; в частности, G конечно порождена, если G/G' конечно порождена;
2) группа G является π-группой, если этим свойством обладает группа G/G'; в частности, G периодична, если G/G' периодична; G — p-группа, если G/G' — p-группа;
3) G конечна, если G/G' конечна;
4) G полна, если G/G' полна.

Доказательство. Утверждение 1) немедленно следует из леммы 2.1.4. Для доказательства утверждения 2), достаточно показать, что все факторы нижнего центрального ряда γ_i/γ_{i+1} обладают нужным свойством, то есть для всякого $x \in \gamma_i$ найдётся π-число n такое, что $x^n \in \gamma_{i+1}$. Для $i = 1$ это верно по условию. Но $x \in \gamma_i$ представляется в виде $x = \prod [y_j, g_j]$, где $y_j \in \gamma_{i-1}$, а $g_j \in G$, откуда $x^n = (\prod [y_j, g_j])^n = \prod [y_j, g_j]^n = \prod [y_j, g_j^n]$ по модулю γ_{i+1}. Осталось вспомнить, что каждый g_j в некоторой степени n_j попадает в коммутант и взять в качестве n произведение всех n_j; в таком случае правая часть полученного выражения для x^n окажется лежащей в γ_{i+1}, что и требовалось.

Утверждение 3) следует из того, что факторы γ_i/γ_{i+1} оказываются конечно порождёнными (по утверждению 1)) и периодическими (по утверждению 2)) абелевыми группами; значит, эти факторы конечны, а следовательно, и вся группа конечна.

Утверждение 4) вытекает из леммы 2.2 и утверждения 1) (G^{n^s} порождает факторгруппу по коммутанту, а значит и всю группу; следовательно, всякий элемент группы G является n-й степенью.)

Отметим одно простое следствие.

Следствие. *Конечно порождённая периодическая нильпотентная группа конечна.**)

Доказательство. Для абелевых групп, утверждение очевидно. Остаётся сослаться на пункт 3) теоремы 2.3.

*) Вопрос о том, верно ли аналогичное утверждение для ненильпотентных групп, известен как *проблема Бернсайда.* Ответ на этот вопрос отрицательный, и мы ещё поговорим об этом.

2.4. Периодическая часть и примарные компоненты нильпотентной группы

Теорема 2.4.1. *Пусть G — нильпотентная группа. Тогда*

1) *множество $T(G)$ всех элементов конечного порядка группы G является нормальной подгруппой (называемой периодической частью группы G), факторгруппа $G/T(G)$ не имеет кручения;*
2) *для каждого простого числа p множество G_p всех элементов порядков p^k, $k = 0, 1, \dots$ группы G является нормальной подгруппой (называемой p-компонентой группы G), факторгруппа G/G_p не имеет p-кручения;*
3) *периодическая часть группы G является прямым произведением своих p-компонент.*

Доказательство.

1) Пусть H — подгруппа, порождённая всеми элементами конечных порядков. Очевидно, H нормальна в G. Абелева факторгруппа H/H' является, очевидно, периодической; следовательно, по теореме 2.3, группа H является периодической, и значит $H = T(G)$ состоит из всех элементов конечного порядка.
2) Доказательство полностью аналогично.
3) То, что $T(G) = \prod G_p$, вытекает из того, что конечная циклическая группа раскладывается в произведение примарных циклических. То, что $G_p \cap \prod\limits_{q\neq p} G_q = \{1\}$, следует из того, что $\prod\limits_{q\neq p} G_q$ не содержит элементов порядка p (по теореме 2.3).

Следствие. *Конечная группа является нильпотентной тогда и только тогда, когда она есть прямое произведение своих силовских подгрупп.*

Доказательство. То, что конечные p-группы и их конечные прямые произведения нильпотентны, мы уже обсуждали. А обратная импликация непосредственно вытекает утверждения 3) теоремы.

Таким образом, изучение конечных нильпотентных групп сводится к изучению конечных p-групп. Однако сами конечные p-группы могут быть устроены весьма непросто.

Отметим, что периодическая часть не обязана выделяться прямым слагаемым, даже в конечно порождённой нильпотентной группе. Однако следующая теорема показывает, что всё не так плохо.

Говорят, что группа *почти* обладает некоторым свойством, если она содержит подгруппу конечного индекса, обладающую этим свойством.*)

Теорема 2.4.2. *Конечно порождённая нильпотентная группа почти не имеет кручения.*

Доказательство. Периодическая часть конечно порождённой нильпотентной группы G является конечной. Рассмотрим подгруппу

$$H = \left\langle G^{|T(G)|^{\text{ступень нильпотентности}}} \right\rangle \subseteq G^{|T(G)|} \text{ (по лемме 2.2).}$$

Ясно, что подгруппа H не имеет кручения (поскольку $T(G) \cap G^{|T(G)|} = \{1\}$) и является нормальной в G. Факторгруппа G/H является периодической конечно порождённой нильпотентной группой. Следовательно, группа G/H конечна, то есть подгруппа H имеет конечный индекс.

Пример. Рассмотрим факторгруппу $G = \Gamma / \langle c^3 \rangle$ группы Гейзенберга Γ по центральной подгруппе $\langle c^3 \rangle$. Можно считать, что группа G состоит из формальных выражений $a^k b^l c^m$, где $k, l \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{Z}_3$. Умножаются элементы группы G по следующим правилам: $ac = ca$, $bc = cb$ и $ab = bac$. Периодическая часть группы G является группой порядка 3: $T(G) = G' = \langle c \rangle_3$. Факторгруппа $G/T(G)$ является свободной абелевой группой ранга 2, порождённой образами элементов a и b. Это означает, что периодическая часть не выделяется прямым сомножителем: $G \not\simeq T(G) \times G/T(G)$ (поскольку группа G неабелева). Посмотрим, как выглядит подгруппа без кручения H, имеющая конечный индекс в G. Группа H из доказательства теоремы 2.4.2 порождается девятыми степенями всех элементов группы G, то есть элементами

$$(a^k b^l c^m)^9 = a^{9k} b^{9l} c^{9m-(kl+2kl+\ldots+7kl+8kl)} = a^{9k} b^{9l} c^{9m-kl(1+2+\ldots+7+8)} = a^{9k} b^{9l}.$$

Мы видим, что $H = \langle a^9, b^9 \rangle$ является свободной абелевой группой. А факторгруппа

$$G/H = \{a^k b^l c^m \ ; \ k, l \in \mathbb{Z}_9, \ m \in \mathbb{Z}_3\}$$

имеет порядок 3^5.

*) Например, про каждую конечную группу можно сказать, что она почти тривиальна.