Л.6

2.5. Центр и верхний центральный ряд

Положим $Z_0(G) = \{1\}$, $Z_1(G) = Z(G)$ — центр группы G и далее $Z_i(G)$ есть полный прообраз центра группы G/Z_{i-1} при естественном гомоморфизме $G \to G/Z_{i-1}$. Ряд подгрупп

$$\{1\} = Z_0(G) \triangleleft Z_1(G) \triangleleft \dots$$

называется *верхним центральным рядом* группы G.

Утверждение 2.5. *Группа G является нильпотентной ступени s (то есть $\gamma_{s+1}(G) = \{1\}$) тогда и только тогда, когда $Z_s(G) = G$. Если группа G нильпотентна ступени s, то $\gamma_i(G) \subseteq Z_{s-i+1}(G)$.*

Доказательство. Если группа нильпотентна ступени s, то $[\gamma_s, G] = \gamma_{s+1} = \{1\}$, то есть $\gamma_s \subseteq Z(G) = Z_1$. Допустим, уже доказано, что $\gamma_{i+1} \subseteq Z_{s-i}$. Тогда γ_i коммутирует со всеми элементами группы G по модулю γ_{i+1} и тем более по модулю Z_{s-i}, то есть $\gamma_i \subseteq Z_{s-i+1}$.

Пусть $Z_s = G = \gamma_1$. Допустим, уже доказано, что $\gamma_{i-1} \subseteq Z_{s-i+2}$, то есть элементы γ_{i-1} коммутируют со всеми элементами группы по модулю Z_{s-i+1}. Тогда $\gamma_i = [\gamma_{i-1}, G] \subseteq Z_{s-i+1}$, что и требовалось.

Вообще ряд нормальных подгрупп $\{1\} \triangleleft \dots \triangleleft G_i \triangleleft G_{i+1} \triangleleft G_{i+2} \triangleleft \dots \triangleleft G$ называется *центральным*, если $[G_i, G] \subseteq G_{i-1}$. Нетрудно показать, что существование конечного центрального ряда, начинающегося с тривиальной подгруппы и заканчивающегося группой G, эквивалентно нильпотентности группы G. Причём длина центрального ряда не может быть меньше ступени нильпотентности и любой центральный ряд $\{G_i\}$ минимальной длины зажат между нижним и верхним:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\{1\} & = & Z_0 & \triangleleft & \dots & \triangleleft & Z_i & \triangleleft & Z_{i+1} & \triangleleft & Z_{i+2} & \triangleleft & \dots & \triangleleft & Z_s & = & G \\
 & & \triangledown & & & & \triangledown & & \triangledown & & \triangledown & & & & \triangledown & & \\
\{1\} & = & G_0 & \triangleleft & \dots & \triangleleft & G_i & \triangleleft & G_{i+1} & \triangleleft & G_{i+2} & \triangleleft & \dots & \triangleleft & G_s & = & G \\
 & & \triangledown & & & & \triangledown & & \triangledown & & \triangledown & & & & \triangledown & & \\
\{1\} & = & \gamma_{s+1} & \triangleleft & \dots & \triangleleft & \gamma_{s-i+1} & \triangleleft & \gamma_{s-i} & \triangleleft & \gamma_{s-i-1} & \triangleleft & \dots & \triangleleft & \gamma_1 & = & G.
\end{array}$$

Следующая теорема показывает, что нильпотентная группа наследует некоторые свойства своего центра.

Теорема 2.5.1. *Пусть группа G нильпотентна. Тогда*
1) *каждая нетривиальная нормальная подгруппа группы G нетривиально пересекается с центром группы G;*
2) *если центр группы G не имеет кручения, то и вся группа не имеет кручения; если центр группы G не имеет p-кручения, то и вся группа не имеет p-кручения;*
3) *группа G конечна, если она конечно порождена и её центр конечен.*

Доказательство.
1) Допустим, что нетривиальная нормальная подгруппа N тривиально пересекается с центром. Выберем минимальное i такое, что $N \cap Z_i \neq \{1\}$, и нетривиальный элемент $x \in N \cap Z_i$. Элемент x коммутирует со всеми элементами группы G по модулю Z_{i-1}, то есть $[x, g] \in Z_{i-1} \cap N = \{1\}$. Стало быть, элемент x лежит в центре группы G, что противоречит предположению о тривиальности пересечения подгруппы N и центра.
2) Эти утверждения немедленно вытекают из пункта 1). Достаточно в качестве подгруппы N взять периодическую часть или p-компоненту группы G.
3) В утверждении пункта 1) выберем в качестве N подгруппу H из доказательства теоремы 2.4.2 или любую другую нормальную подгруппу конечного индекса, не имеющую кручения.

Отметим, что понятия центра и факторгруппы по коммутанту в некотором смысле двойственны друг другу. Например, первые утверждения теорем 2.3 и 2.5.1 можно переформулировать так:

Пусть G — нильпотентная группа, $\pi: G \to G/G'$ — естественное отображение группы G на её факторгруппу по коммутанту, $\iota: Z(G) \to G$ — естественное вложение центра в группу G, а $\varphi: H \to G$ и $\psi: G \to H$ — некоторые гомоморфизмы. Тогда отображение φ сюръективно, если композиция $\pi\varphi$ сюръективна, и отображение ψ инъективно, если композиция $\psi\iota$ инъективна.

Сопоставление теорем 2.3 и 2.5.1 показывает, в частности, что для конечно порождённой нильпотентной группы конечность центра эквивалентна конечности индекса коммутанта. Этот факт интересно сравнить со следующей теоремой Шура, справедливой для л ю б ы х конечно порождённых групп.

Теорема 2.5.2. *Следующие условия эквивалентны для* любой *конечно порождённой группы:*
(1) *индекс центра конечен;*
(2) *коммутант конечен;*
(3) *число коммутаторов конечно.*

Доказательство. Импликация (2) $\Longrightarrow$ (3) в доказательстве не нуждается. Условие (3) влечёт конечность индексов централизаторов элементов и, следовательно, конечность индекса центра (поскольку он является пересечением централизаторов образующих), то есть условие (1).

Осталось доказать импликацию (1) $\Longrightarrow$ (2). Допустим, что центр Z конечно порождённой группы G имеет конечный индекс. Поскольку подгруппа конечного индекса конечно порождённой группы конечно порождена,*) конечно порождённая абелева группа Z является прямым произведением конечного числа циклических групп. Если $|Z\cap G'|<\infty$, то доказывать нечего. Пусть $z\in Z\cap G'$ — элемент бесконечного порядка. В силу известных свойств конечно порождённых абелевых групп $z\in\langle y\rangle$ и $Z=\langle y\rangle\times\widetilde{Z}$ для некоторого элемента $y\in Z$ и некоторой подгруппы $\widetilde{Z}\subset Z$. Переходя от группы G к факторгруппе $\widetilde{G}=G/\widetilde{Z}$, мы получаем группу, в которой некоторый нетривиальный элемент коммутанта z лежит в бесконечной циклической центральной подгруппе $\langle y\rangle$, имеющей конечный индекс в $\widetilde{G}$. Разложим группу $\widetilde{G}$ в объединение смежных классов: $\widetilde{G}=c_1\langle y\rangle\amalg\ldots\amalg c_k\langle y\rangle$. Пусть $\overline{g}\in\{c_1,\ldots,c_k\}$ обозначает представителя смежного класса $g\langle y\rangle$. Рассмотрим отображение $\varphi\colon\widetilde{G}\to\langle y\rangle$, определённое формулой $\varphi(g)=\prod gc_i(\overline{gc_i})^{-1}$. Непосредственно проверяется, что φ является гомоморфизмом и $\varphi(y)=y^k\neq 1$. Это противоречит тому, что $z=y^l$ должен лежать в ядре отображения φ, поскольку $z\in\widetilde{G}'$. Теорема доказана.

2.6. Финитная аппроксимируемость

Группу G называют *финитно аппроксимируемой*, если для любого нетривиального элемента $g\in G$ найдутся конечная группа K и гомоморфизм $\varphi\colon G\to K$ такие, что $\varphi(g)\neq 1$.

Утверждение 2.6. *Следующие свойства группы G эквивалентны финитной аппроксимируемости:*
1) *для любого конечного подмножества F группы G найдётся гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, ограничение которого на F инъективно;*
2) *пересечение всех подгрупп конечного индекса группы G тривиально;*
3) *группа G является подгруппой декартова произведения конечных групп.*

Доказательство. Из свойства 1) финитная аппроксимируемость следует очевидным образом. Обратно, пусть $F=\{g_1,\ldots,g_n\}$ и $\varphi_{ij}\colon G\to K_{ij}$ — гомоморфизмы на конечные группы такие, что $\varphi_{ij}(g_ig_j^{-1})\neq 1$ при $i\neq j$. Гомоморфизм φ из группы G на прямое произведение групп K_{ij}, совпадающий с φ_{ij} на ij-й координате, является инъективным на F.

Если группа G финитно аппроксимируема, то каждый нетривиальный элемент не лежит в ядре некоторого гомоморфизма на конечную группу, то есть пересечение подгрупп конечного индекса тривиально. Обратно, если каждый нетривиальный элемент g не лежит в некоторой подгруппе H конечного индекса, то он не лежит и в нормальной подгруппе $N\subseteq H$ конечного индекса (поскольку всякая подгруппа конечного индекса n содержит нормальную подгруппу конечного индекса, не превосходящего $n!$). Следовательно, g переходит не в единицу при каноническом гомоморфизме $G\to G/N$.

Подгруппа декартова произведения конечных групп является финитно аппроксимируемой: в качестве гомоморфизмов на конечные группы достаточно рассмотреть проекции на сомножители. Обратно, пусть группа G является финитно аппроксимируемой, то есть для каждого $g\in G\setminus\{1\}$ существует гомоморфизм $\varphi_g\colon G\to K_g$ на конечную группу K_g и $\varphi_g(g)\neq 1$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon G\to\prod K_g$ в прямое произведение групп K_g, совпадающий с φ_g на координате с номером g. Ясно, что φ является вложением.

Отметим, что класс финитно аппроксимируемых групп замкнут относительно перехода к подгруппам и декартовым произведениям. Кроме того, почти финитно аппроксимируемые группы являются финитно аппроксимируемыми (это видно из утверждения 2.6(2)).

Группа G называется *хопфовой*, если она не изоморфна никакой своей истинной факторгруппе, то есть $G/N\simeq G\implies N=\{1\}$, или, другими словами, всякий сюръективный эндоморфизм группы G является автоморфизмом.

Теорема 2.6.1. *Каждая конечно порождённая финитно аппроксимируемая группа является хопфовой.*

Доказательство. Рассмотрим финитно аппроксимируемую группу G, конечную группу K, множество Ψ всех гомоморфизмов $G\to K$ и сюръективный эндоморфизм φ группы G. Эндоморфизм φ задаёт естественное отображение $\alpha\colon\Psi\to\Psi$ по формуле $\alpha\colon\psi\to\psi\varphi$. Это отображение α является инъективным в силу сюръективности φ. Следовательно, отображение α является сюръективным, поскольку Ψ — конечное множество. Таким образом, ядро эндоморфизма φ содержится в пересечении всех ядер гомоморфизмов группы G на конечные группы, что влечёт тривиальность $\ker\varphi$ в силу финитной аппроксимируемости группы G. Теорема доказана.

*) Доказательство этого факта мы оставляем в качестве упражнения. Впрочем, внимательный читатель может заметить, что вскорости мы всё же докажем это утверждение.