*Л.7* Говорят, что группа $G$ *аппроксимируется классом групп* $\mathcal{K}$, если для любого нетривиального элемента $g \in G$ найдутся группа $K \in \mathcal{K}$ и эпиморфизм $\varphi: G \to K$ такие, что $\varphi(g) \neq 1$.

**Теорема 2.6.2.** *Каждая конечно порождённая нильпотентная группа $G$ является финитно аппроксимируемой. Если конечно порождённая нильпотентная группа $G$ не имеет кручения, то она аппроксимируется конечными $p$-группами для каждого простого $p$.*

**Доказательство.** Достаточно доказать второе утверждение, поскольку конечно порождённые нильпотентные группы почти не имеют кручения, а почти финитно аппроксимируемые группы финитно аппроксимируемы.

Пусть $p$ — простое число, $G$ — конечно порождённая нильпотентная группа без кручения, а $x \in G$ — её нетривиальный элемент.

Если элемент $x$ в некоторой степени $n$ попадает в центр группы $G$, то в группе $\widetilde{G} = G/\langle x^{np}\rangle$ элемент $x^n$ имеет порядок $p$ и найдётся подгруппа конечного индекса $H \lhd \widetilde{G}$, не имеющая кручения и, следовательно, не содержащая элемента $x^n$. Группа $\widetilde{G}/N$ будет конечным гомоморфным образом группы $G$, в котором элемент $x^n$ будет нетривиальным элементом силовской $p$-подгруппы. Эта силовская подгруппа выделяется прямым сомножителем и, следовательно, является искомым гомоморфным образом группы $G$.

Если элемент $x$ ни в какой степени не попадает в центр, то переходя к факторгруппе по центру, после чего факторизуя по периодической части, мы сводим ситуацию к группе меньшей ступени нильпотентности. Теорема доказана.

**Замечание.** Нетрудно показать, что на самом деле центр нильпотентной группы без кручения является *изолированной подгруппой*, то есть $x^n \in Z(G) \implies x \in Z(G)$.

### 2.7. Полные нильпотентные группы

Следующая теорема показывает, что не всякая нильпотентная группа вкладывается в полную нильпотентную группу.

**Теорема 2.7.1.** *Периодическая часть полной нильпотентной группы содержится в центре этой группы.*

**Доказательство.** Пусть $x$ — элемент конечного порядка $n$ нильпотентной группы $G$, не лежащий в её центре. Переходя к факторгруппе по подходящему члену верхнего центрального ряда, можно считать, что элемент $x$ не лежит в центре, но лежит во втором члене верхнего центрального ряда. Возьмём произвольный элемент $y \in G$. Поскольку $y = z^n$, мы имеем $[x, y] = [x, z^n] = [x^n, z] = [1, z] = 1$. Это противоречит тому, что $x$ не лежит в центре. Теорема доказана.

Следующая теорема, принадлежащая А. И. Мальцеву, показывает, что элементы конечного порядка оказываются единственным препятствием к пополняемости нильпотентной группы.

**Теорема 2.7.2.** *Всякая нильпотентная группа без кручения вложима в полную нильпотентную группу той же ступени нильпотентности.*

Докажем сначала это утверждение для конечно порождённых групп.

**Лемма 2.7.** *Конечно порождённая нильпотентная группа без кручения вложима в полную нильпотентную группу той же ступени нильпотентности.*

**Доказательство.** Конечно порождённая нильпотентная группа $G$ без кручения аппроксимируется конечными $p$-группами для каждого простого $p$. Следовательно, группа $G$ вкладывается в декартово произведение $H_p$ конечных $p$-групп. Рассмотрим декартово произведение $H$ всех групп $H_p$. Группу $G$ будем считать вложенной в $H$ таким образом, что все проекции $G \to H_p$ являются инъективными. Рассмотрим факторгруппу группы $H$ по прямому произведению $T$ групп $H_p$. Нетрудно убедиться, что группа $H/T$ является полной нильпотентной группой без кручения и $G \cap T = \{1\}$, то есть группа $G$ вкладывается в $H/T$. Лемма доказана.

Говорят, что группа $G$ *локально* обладает некоторым свойством $P$, если всякая конечно порождённая подгруппа группы $G$ обладает свойством $P$.

**Теорема 2.7.3.** *Если класс групп $\mathcal{K}$ замкнут относительно декартовых произведений и перехода к факторгруппам, то всякая группа $G$, локально вложимая в группу из класса $\mathcal{K}$, вкладывается в группу из $\mathcal{K}$.*

**Доказательство.** Для каждой конечно порождённой подгруппы $H$ группы $G$ возьмём группу $K_H \in \mathcal{K}$, содержащую $H$. Рассмотрим декартово произведение $K$ всех групп $K_H$. Пусть

$$N = \{x \in K \mid \exists \text{ к.п. подгруппа } H \subseteq G \text{ т.,ч. } x_L = 1 \text{ для всех к.п. подгрупп } L \supseteq H\}.$$

Здесь $x_L$ обозначает координату элемента $x$, соответствующую подгруппе $L$. Нетрудно заметить, что $N$ является нормальной подгруппой группы $K$. а элементы $f(g)$ с координатами

$$f(g)_H = \begin{cases} g, & \text{если } g \in H, \\ 1, & \text{если } g \notin H \end{cases}$$

образуют подгруппу изоморфную $G$ в группе $K/N$. Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 2.7.2.** В силу леммы 2.7 достаточно воспользоваться теоремой 2.7.3, взяв в качестве $\mathcal{K}$ класс всех полных нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше данной.

**Замечание.** Доказательство теоремы 2.7.3 использует замкнутость класса $\mathcal{K}$ лишь относительно факторгрупп очень специального вида. Такого рода факторгруппы декартовых произведений называют *фильтрованными произведениями*. Точное определение этой конструкции, а также её свойства и приложения, можно найти, например, в книге [Маль70].

## 3. РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

Напомним, что группа называется *разрешимой* ступени $s$, если её $s$-й коммутант тривиален. Класс разрешимых групп замкнут относительно перехода к подгруппам, факторгруппам и расширениям. Всякая нильпотентная группа является разрешимой. Мы увидим, что разрешимые группы, в отличие от нильпотентных, могут быть очень непохожи на абелевы. Чтобы в этом убедиться, нам понадобятся некоторые конструкции, которые имеют много применений и за пределами разрешимых групп.

### 3.1. Полупрямые произведения

Пусть $B$ — некоторая группа. Символом $\operatorname{Aut} B$ мы будем обозначать группу автоморфизмов группы $B$, то есть множество всех изоморфизмов $\alpha\colon B \to B$, $b \mapsto b^\alpha$, с умножением, определённым правилом $b^{\alpha\beta} = (b^\alpha)^\beta$. Пусть имеется ещё одна группа $A$ и гомоморфизм $\varphi\colon A \to \operatorname{Aut} B$. *Полупрямым произведением* групп $A$ и $B$ относительно гомоморфизма $\varphi$ мы будем называть группу $A \underset{\varphi}{\leftthreetimes} B$, состоящую из формальных произведений вида $ab$, где $a \in A$ и $b \in B$, которые умножаются по правилу

$$a_1b_1 \cdot a_2b_2 = (a_1a_2)(b_1^{\varphi(a_2)}b_2), \text{ то есть } b^a = b^{\varphi(a)} \text{ или } ba = ab^{\varphi(a)}.$$

Нетрудно проверить, что $A \underset{\varphi}{\leftthreetimes} B$ является группой относительно этого умножения. Группа $B$ нормальна в полупрямом произведении, а группа $A \simeq (A \underset{\varphi}{\leftthreetimes} B)/B$ действует на $B$ автоморфизмами. Полупрямое произведение $A \underset{\varphi}{\leftthreetimes} B$ называют также *расщепляющимся расширением* группы $B$ при помощи группы $A$*) и обозначают $B \underset{\varphi}{\rightthreetimes} A$, $A \underset{\varphi}{\ltimes} B$ или $B \underset{\varphi}{\rtimes} A$.

**Теорема 3.1** (внутреннее определение полупрямого произведения). *Группа $G$ изоморфна полупрямому произведению групп $A$ и $B$ тогда и только тогда, когда она содержит такие подгруппы $A_1$ и $B_1$, что*
1) $A_1 \simeq A$, $B_1 \simeq B$;
2) $B_1 \triangleleft G$;
3) $A_1 \cap B_1 = \{1\}$;
4) $G = A_1B_1$.

**Доказательство** этого утверждения мы оставляем в качестве упражнения.

**Примеры:**
1) Прямое произведение двух групп можно рассматривать как полупрямое произведение относительно тождественного автоморфизма.
2) Симметрическая группа является полупрямым произведением знакопеременной группы и группы порядка 2 (порождённой транспозицией): $S_n \simeq \mathbb{Z}_2 \leftthreetimes A_n$.
3) Диэдральная группа $D_n$ является полупрямым произведением циклической группы порядка $n$ (группы поворотов) и циклической группы порядка 2 (порождённой отражением): $D_n \simeq \mathbb{Z}_2 \underset{\varphi}{\leftthreetimes} \mathbb{Z}_n$, где $k^{\varphi(l)} = (-1)^l k$ при $k \in \mathbb{Z}_n$ и $l \in \mathbb{Z}_2$.
4) Третий пример подсказывает, что *бесконечную диэдральную группу* следует определить так: $D_\infty = \mathbb{Z}_2 \underset{\varphi}{\leftthreetimes} \mathbb{Z}$, где $k^{\varphi(l)} = (-1)^l k$, при $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}_2$. В явном виде в мультипликативной записи группа $D_\infty$ состоит из формальных произведений $a^\varepsilon b^n$ (где $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2$ и $n \in \mathbb{Z}$) с умножением, определённым правилом $b^{na} = b^{-n}$. Отметим, что полупрямое произведение разрешимых групп является разрешимой группой. Поэтому бесконечная диэдральная группа может служить примером разрешимой (ступени 2) группы, в которой элементы конечного порядка не образуют подгруппу. Действительно, элементы $a$ и $ab$ имеют порядок 2 в $D_\infty$ (проверьте!), а их произведение $a \cdot ab = b$ имеет бесконечный порядок. Напомним, что в нильпотентных группах такого не бывает.

*) Некоторые говорят наоборот: полупрямое произведение $A \leftthreetimes B$ есть расщепляющееся расширение группы $A$ при помощи группы $B$.