Л.8

3.2. Сплетения

Пусть A и B — некоторые группы. Рассмотрим изоморфные копии B_a (где $a \in A$) группы B, занумерованные элементами группы A. Элемент группы B_a, соответствующий элементу b группы B, мы будем обозначать b_a. Пусть C — прямое произведение всех этих копий. Группа A естественным образом действует на группе C автоморфизмами по правилу $(b_a)^{a'} = b_{aa'}$. Полупрямое произведение группы A и группы C относительно этого действия называют *прямым сплетением* групп A и B и обозначают $B \wr A$. Группы A, B и C называют *активной группой, пассивной группой и базой сплетения* соответственно. Если вместо прямого произведения копий группы B рассматривать их декартово произведение, то мы получим определение *декартова сплетения* $B \bar{\wr} A$. Прямое сплетение $B \wr A$ называют также *дискретным сплетением* и обозначают $B \,\mathrm{г}\, A$ или $B \operatorname{wr} A$, а декартово сплетение $B \bar{\wr} A$ называют *полным сплетением* и обозначают $B \,\bar{\mathrm{г}}\, A$ или $B \operatorname{Wr} A$. Отметим, что сплетение разрешимых групп является разрешимой группой.

Пример 3.2.1. Прямое сплетение циклических групп $G = \langle b \rangle_2 \wr \langle a \rangle_\infty$ является конечно порождённой разрешимой (ступени 2) группой, содержащей не конечно порождённую подгруппу. Действительно, элементы a и b_1 порождают группу G (поскольку $b_{a^k} = b_1^{a^k}$), а база сплетения, будучи изоморфной прямой сумме бесконечного числа групп $\mathbb{Z}_2$, не является конечно порождённой группой. Эта же группа G является примером конечно порождённой разрешимой группы, про которую нельзя сказать, что она почти без кручения (покажите!).

Пример 3.2.2. Прямое сплетение $G = S_3 \wr \langle a \rangle_\infty$ симметрической группы S_3 и бесконечной циклической группы является конечно порождённой разрешимой (ступени 3) группой, не являющейся финитно аппроксимируемой. Действительно, пусть u и v — два элемента одной из копий группы S_3 в базе сплетения G и $\varphi: G \to K$ — гомоморфизм группы G на конечную группу порядка k. Тогда $[u,v]^\varphi = [u, v^{a^k}]^\varphi = 1^\varphi = 1$. Таким образом, коммутант каждой копии группы S_3 лежит в ядре каждого гомоморфизма группы G на конечную группу.

Построение интересных примеров разрешимых групп — это далеко не единственное приложение сплетений. В следующих параграфах мы рассмотрим два «более мирных» применения этой конструкции.

3.3 Уравнения над группой

Уравнением над группой G называют формальное выражение вида

$$g_1 x^{\varepsilon_1} g_2 x^{\varepsilon_2} \dots g_n x^{\varepsilon_n} = 1, \tag{$*$}$$

где $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $g_i \in G$ — *коэффициенты* уравнения, а буква x — *переменная* или *неизвестное*. Уравнение $(*)$ называют *разрешимым над* группой G, если найдётся бóльшая группа $\widetilde{G}$, содержащая группу G в качестве подгруппы, и элемент $\widetilde{x} \in \widetilde{G}$ (называемый *решением* уравнения $(*)$) такой, что $g_1 \widetilde{x}^{\varepsilon_1} g_2 \widetilde{x}^{\varepsilon_2} \dots g_n \widetilde{x}^{\varepsilon_n} = 1$ в группе $\widetilde{G}$. Если решение лежит в исходной группе G, то говорят, что уравнение *разрешимо в* группе G.

Не всякое уравнение разрешимо над группой. Например, уравнение $g_1 x^{-1} g_2 x = 1$, очевидно, не может быть разрешимым, если элементы g_1 и g_2 имеют различные порядки.

Уравнение $(*)$ называют *невырожденным*, если $\sum \varepsilon_i \neq 0$; если $\sum \varepsilon_i = \pm 1$, то уравнение называется *унимодулярным.*

Гипотеза Кервера–Лауденбаха (см. [ЛиШу80] или [МаКС74]). *Унимодулярное уравнение над любой группой разрешимо над ней.*

Иногда гипотезой Кервера–Лауденбаха называют утверждение о разрешимости любого *невырожденного* уравнения (или даже системы уравнений) над любой группой. На сегодняшний день ни одна из версий этой гипотезы не доказана и не опровергнута.

Теорема Левина о положительных уравнениях. *Если уравнение $(*)$ положительно в том смысле, что все $\varepsilon_i = 1$, то это уравнение разрешимо над группой G.*

Доказательство. В качестве группы $\widetilde{G}$ рассмотрим сплетение $\widetilde{G} = G \wr \langle a \rangle_n$. Исходную группу G мы будем считать вложенной в базу сплетения $\widetilde{G}$ «диагональным» образом: $g \mapsto (g, g, \dots, g)$. Будем искать решение уравнения $(*)$ в виде $\widetilde{x} = a \cdot (x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \in G$. Подставляя $\widetilde{x}$ в левую часть уравнения $(*)$ и имея в виду, что коэффициент g_i отождествлён с набором $(g_i, g_i, \dots, g_i)$, мы получим

$$g_1 \widetilde{x} g_2 \widetilde{x} \dots g_n \widetilde{x} = (g_1, g_1, \dots, g_1) a (x_1, \dots, x_n)(g_2, g_2, \dots, g_2) a (x_1, \dots, x_n) \dots (g_n, g_n, \dots, g_n) a (x_1, \dots, x_n) =$$

«перегнав» все буквы a влево с помощью соотношений $(y_1, y_2, \dots, y_n)a = a(y_2, y_3, \dots, y_n, y_1)$, мы будем иметь

$$= a^n (g_1 x_n g_2 x_{n-1} \cdots g_n x_1, \quad g_1 x_1 g_2 x_n \cdots g_n x_2, \quad \dots, \quad g_1 x_{n-1} g_2 x_{n-2} \cdots g_n x_n).$$

Вспоминая, что $a^n = 1$, мы видим, что $\widetilde{x}$ будет решением уравнения $(*)$ при $x_i = g_i^{-1}$. Теорема доказана.

Приведём без доказательства ещё несколько фактов об уравнениях над группами.

Уравнение $(*)$ *разрешимо над группой* G *в следующих случаях:*
- *уравнение невырождено и группа* G *конечна* (Герстенхабер и Ротхауз 1962*));
- *уравнение унимодулярно и группа* G *не имеет кручения* (Клячко 1993);
- *уравнение невырождено и* $n \leqslant 4$ (Хауи и Эджвет 1991);
- *группа* G *локально индикабельна, то есть каждая её нетривиальная конечно порождённая подгруппа имеет эпиморфизм на* $\mathbb{Z}$ (Бродский 1984).

В заключение упомянем ещё один известный открытый вопрос.

Гипотеза Левина. *Любое уравнение над группой без кручения разрешимо над ней.*

3.4 Индуцированные действия и вложение Фробениуса

Пусть в группе G имеется подгруппа $B \subseteq G$ и задано правое действие этой подгруппы на некотором множестве M. Мы хотим продолжить это действие до действия всей группы G. Ясно, что для этого достаточно сказать, как действуют представители смежных классов группы G по подгруппе B. В каждом смежном классе Bg выберем представителя $\overline{g}$. При этом будем считать, что $\overline{1} = 1$. Определим действие этих представителей «самым общим образом», то есть для каждого $m \in M$ и каждого представителя $\overline{g} \neq 1$ добавим в множество M новую точку $m_{\overline{g}}$ и положим (считая, что $m_1 = m$)

$$m\overline{g} \overset{\text{опр}}{=} m_{\overline{g}} \quad \text{при } m \in M.$$

Заметим, что эта формула на самом деле определяет действие всей группы G на всём множестве $M' = \{m_{\overline{g}}\,; m \in M, g \in G\}$. Действительно,

$$mg = mg\overline{g}^{-1}\overline{g} = (mg\overline{g}^{-1})\overline{g} = (mg\overline{g}^{-1})_{\overline{g}};$$
$$m_{\overline{h}}g = m\overline{h}g = (m\overline{h}g\overline{hg}^{-1})_{\overline{hg}}.$$

Таким образом, действие группы G на множестве M' задаётся формулой

$$m_{\overline{h}}g \overset{\text{опр}}{=} (m\overline{h}g\overline{hg}^{-1})_{\overline{hg}}. \tag{1}$$

Проверим, что это действие:

$$m_{\overline{h}}(xy) = (m\overline{h}xy\overline{hxy}^{-1})_{\overline{hxy}};$$
$$(m_{\overline{h}}x)y = ((m\overline{h}x\overline{hx}^{-1})_{\overline{hx}})y = (m\overline{h}x\overline{hx}^{-1}\overline{hx}y\overline{\overline{hx}y}^{-1})_{\overline{hxy}}.$$

Про это действие группы G на множестве M' говорят, что оно *индуцировано* исходным действием группы B на множестве M.

Если множество M является векторным пространством и действие группы B на нём линейно, то индуцированное действие группы G на множестве M' однозначно продолжается (по линейности) до линейного действия на векторном пространстве $\bigoplus_{\overline{g}} M_{\overline{g}}$, где векторное пространство $M_{\overline{g}} = \{m_{\overline{g}}\ ;\ m \in M\}$ представляет собой изоморфную копию пространства M (изоморфизм имеет вид $m \mapsto m_{\overline{g}}$). Полученное линейное представление группы G называют *индуцированным представлением.*

Группа G называется *линейной*, если она вложима в группу $\mathbf{GL}_n(F)$ невырожденных матриц над некоторым полем F или, другими словами, если она обладает точным конечномерным линейным представлением. Линейные группы обладают многими приятными свойствами. Позже мы увидим, что не всякая группа является линейной; однако имеет место следующий факт:

Теорема 3.4.1. *Каждая почти линейная группа линейна.*

Доказательство. Напомним, что почти линейность группы G по определению означает, что группа G содержит линейную подгруппу B конечного индекса m. Рассмотрим представление $\widehat{f}\colon G \to \mathbf{GL}(\bigoplus_{\overline{g}} M_{\overline{g}})$ группы G, индуцированное некоторым точным представлением $f\colon B \to \mathbf{GL}(M)$ группы B. Покажем, что представление $\widehat{f}$ также является точным. Действительно, из явной формулы для индуцированного действия видно, что $gM = M_{\overline{g}}$ и $M_{\overline{g}} \cap M = \{0\}$ при $\overline{g} \notin B$. Следовательно $\ker \widehat{f} \subseteq B$. Но $\widehat{f}(b)m = f(b)m$ при $m \in M$ и $b \in B$; значит, $\ker \widehat{f} \subseteq \ker f = \{1\}$. Теорема доказана.

---

*) Более точно, теорема Герстенхабера–Ротхауза утверждает разрешимость всякой невырожденной системы уравнений над конечной группой (см. определение в упражнениях).