Л.9 Напомним, что *расширением группы B при помощи группы A* называется всякая группа G, содержащая нормальную подгруппу B_1, изоморфную группе B, факторгруппа G/B_1 по которой изоморфна группе A.*) Полупрямые произведения (и, в частности, прямые произведения) являются примерами расширений; такие расширения называются, как уже было сказано, расщепляющимися. Простейший пример группы $\mathbb{Z}$, которая является расширением группы $\mathbb{Z} \simeq 2\mathbb{Z}$ при помощи $\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, показывает, что не всякое расширение расщепляется. С другой стороны, имеет место такой факт.

Утверждение 3.4.1. *Каждое расширение при помощи бесконечной циклической группы расщепляется.*

Доказательство. Пусть $B \triangleleft G$ и $G/B = \langle a \rangle_\infty$. Пусть $x \in G$ — произвольный представитель смежного класса a. Ясно, что $\langle x \rangle_\infty \cap B = \{1\}$ и $G = B\,\langle x \rangle_\infty$. Теорема 3.1 показывает, что $G = \langle x \rangle_\infty \leftthreetimes B$, что и требовалось.

Описание всех расширений данной группы при помощи другой данной группы является одной из сверхзадач теории групп; о методах её решения можно прочитать в книгах [Брау87] и [Кузь06].

Теорема 3.4.2 (вложение Фробениуса). *Всякое расширение группы B при помощи группы A вкладывается в декартово сплетение $B \mathbin{\bar{\wr}} A$.*

Доказательство. Рассмотрим копии M_a группы B, занумерованные элементами группы A. Сплетение $B \mathbin{\bar{\wr}} A$ естественным образом действует на множестве $M' = \coprod\limits_{a\in A} M_a$ по формуле

$$m_a \cdot (a' \prod_{a\in A} b_a) = m_{aa'} b_{aa'}. \tag{2}$$

Это действие задаёт вложение сплетения $B \mathbin{\bar{\wr}} A$ в группу $S(M')$ перестановок множества M'.

С другой стороны, на множестве M' имеется действие каждой группы G, являющейся расширением группы B при помощи группы A. Это действие индуцировано действием группы B на себе правыми сдвигами. Мы получаем вложение группы G в группу перестановок множества M'. Сравнение формул (1) и (2) показывает, что образ группы G в $S(M')$ содержится в образе сплетения $B \mathbin{\bar{\wr}} A$, что и доказывает теорему. В явном виде вложение расширения G группы B при помощи группы A задаётся следующей довольно страшной формулой:

$$g \mapsto \alpha(g) \prod_{a\in A} (\gamma(a(\alpha(g))^{-1}) g (\gamma(a))^{-1})_a,$$

где $\alpha\colon G \to A$ – гомоморфизм с ядром B, а $\gamma\colon A \to G$ – функция выбора представителей.

3.5. Полициклические группы

Разрешимые группы получаются из тривиальной группы последовательностью расширений при помощи абелевых групп. Однако приведённые выше примеры показывают, что разрешимые группы могут иметь довольно сложное строение. Философскую причину этого явления можно усмотреть в том, что сами абелевы группы не всегда устроены просто. По-настоящему просто устроены конечно порождённые абелевы группы. Это наблюдение подсказывает, что надо несколько сузить класс изучаемых групп, если мы хотим, чтобы наши группы обладали хорошими свойствами. Группы, получающиеся из тривиальной группы последовательностью расширений при помощи конечно порождённых абелевых групп, называют *полициклическими*. Другими словами, полициклическими называются группы, обладающие конечным субнормальным рядом с циклическими факторами.**) Ясно, что все конечные разрешимые группы являются полициклическими. Кроме того, как мы видели, конечно порождённые нильпотентные группы являются полициклическими.

Если группа G обладает субнормальным рядом $\{1\} = G_0 \triangleleft \ldots \triangleleft G_n = G$, то всякая её подгруппа H обладает рядом $\{1\} = G_0 \cap H \triangleleft \ldots \triangleleft G_n \cap H = H$ и фактор $(G_{i+1} \cap H)/(G_i \cap H)$ естественным образом вкладывается в фактор G_{i+1}/G_i. Следовательно, подгруппы полициклических групп сами являются полициклическими. Ясно также, что класс полициклических групп замкнут относительно факторгрупп и расширений.

Непосредственно из определения видно, что каждая полициклическая группа конечно порождена (поскольку класс конечно порождённых групп замкнут относительно расширений). Из сказанного следует

Теорема 3.5.1. *Полициклические группы удовлетворяют условию максимальности.*

Напоминаем, что *условие максимальности* для группы G (или *нётеровость*) по определению означает, что всякая возрастающая цепочка подгрупп группы G стабилизируется на конечном шаге. Нетрудно сообразить,

---

*) Некоторые люди придерживаются противоположной терминологии: такую группу G они называют расширением группы A при помощи группы B.

**) Вообще, если $\mathcal{P}$ — некоторое свойство групп, то группы, обладающие конечным субнормальным рядом, факторы которого обладают свойством $\mathcal{P}$, называют *поли-$\mathcal{P}$*-группами. Например, разрешимые группы вы можете называть *полиабелевыми*, если это слово вам кажется более красивым.

что это свойство эквивалентно конечной порождённости каждой подгруппы группы G. Действительно, если группа G содержит бесконечную возрастающую цепочку попарно несовпадающих подгрупп $H_1 \subset H_2 \subset \ldots$, то подгруппа $\bigcup H_i$ не может быть конечно порождённой, поскольку каждое её конечное подмножество содержится в одной из групп H_i. Наоборот: если некоторая подгруппа $H = \langle h_1, h_2, \ldots \rangle \subseteq G$ не является конечно порождённой, то в возрастающей цепочке $\langle h_1 \rangle \subseteq \langle h_1, h_2 \rangle \subseteq \ldots$ имеется бесконечное число различных подгрупп.

Докажем ещё одно полезное свойство полициклических групп.

Теорема 3.5.2. *Полициклические группы финитно аппроксимируемы.*

Для доказательства нам понадобятся несколько фактов, имеющих самостоятельный интерес. Мы знаем, что всякая подгруппа конечного индекса в произвольной группе G содержит нормальную в G подгруппу конечного индекса. В случае конечно порождённых групп этот результат может быть значительно усилен. Подгруппа K группы G называется *вполне инвариантной* (а также *вполне характеристической*, или *эндоморфно допустимой*), если она инвариантна относительно всех эндоморфизмов, то есть отображается в себя при каждом эндоморфизме φ группы G (в том смысле, что $\varphi(K) \subseteq K$).*)

Теорема 3.5.3. *Всякая подгруппа конечного индекса конечно порождённой группы G содержит вполне инвариантную в G подгруппу конечного индекса.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа конечного индекса в G. Как было отмечено, можно считать, что подгруппа H нормальна. Рассмотрим множество Φ всех гомоморфизмов $G \to G/H$. Таких гомоморфизмов конечное число, поскольку G конечно порождена, а G/H конечна (и всякий гомоморфизм однозначно задаётся образами порождающих). Подгруппа $K = \bigcap\limits_{f \in \Phi} \ker f$ имеет конечный индекс, поскольку является конечным пересечением подгрупп конечного индекса. Покажем, что подгруппа K вполне инвариантна, то есть $\varphi(K) \subseteq \ker f$ для каждого эндоморфизма φ группы G и каждого гомоморфизма $f \in \Phi$. Действительно, $f(\varphi(K)) = \{1\}$, поскольку $f\varphi \in \Phi$. Теорема доказана.

Следствие 3.5.1. *Группа автоморфизмов конечно порождённой финитно аппроксимируемой группы финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть G — финитно аппроксимируемая конечно порождённая группа и $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$ — нетождественный автоморфизм. Возьмём такой элемент $g \in G$, что $\alpha(g) \neq g$. В силу финитной аппроксимируемости в группе G найдётся подгруппа конечного индекса H, не содержащая $\alpha(g)g^{-1}$. Теорема 3.5.3 показывает, что подгруппу H можно считать характеристической (и даже вполне характеристической). Рассмотрим гомоморфизм $f\colon \mathrm{Aut}\, G \to \mathrm{Aut}\,(G/H)$, заданный формулой $f(\varphi)(gH) = \varphi(g)H$ (проверьте, что это корректно определённый гомоморфизм). Ясно, что $f(\alpha) \neq \mathrm{id}$ и группа $\mathrm{Aut}\,(G/H)$ конечна, что и доказывает следствие.

Следствие 3.5.2. *Полупрямое произведение $A \leftthreetimes B$ двух финитно аппроксимируемых групп финитно аппроксимируемо, если группа B конечно порождена.*

Доказательство. Пусть $g \in G = A \leftthreetimes B$ — произвольный неединичный элемент. Мы хотим построить гомоморфизм $f\colon G \to K$ на конечную группу K, переводящий g не в единицу. Если $g \notin B$, то такой гомоморфизм очевидным образом строится как композиция естественного отображения $G \to A$ и подходящего гомоморфизма $A \to K$.

Предположим теперь, что $g \in B$. Возьмём вполне характеристическую подгруппу $H \triangleleft B$ конечного индекса в B, не содержащую g. Такая подгруппа существует в силу финитной аппроксимируемости группы B и теоремы 3.5.3. Заметим, что из характеристичности H в B следует нормальность H в G. Рассмотрим естественный гомоморфизм группы G на группу $G_1 = G/B = A \leftthreetimes B_1$, где группа $B_1 = B/H$ конечна. Группа G_1 в свою очередь естественным образом отображается на конечную группу $(\mathrm{Aut}\, B_1) \leftthreetimes B_1$. (Здесь $\mathrm{Aut}\, B_1$ действует на B_1 естественным образом; такое полупрямое произведение называется *голоморфом* группы B_1). Композиция построенных гомоморфизмов и есть то самое отображение на конечную группу, переводящее g не в единицу.

Утверждение 3.5.1. *Расширение G конечно порождённой финитно аппроксимируемой группы B при помощи циклической группы A финитно аппроксимируемо.*

Доказательство. Если циклическая группа A конечна, то группа G финитно аппроксимируема, как и всякая почти финитно аппроксимируемая группа. Если же группа A бесконечна, то расширение G, как мы знаем (утверждение 3.4.1), расщепляется, и доказываемое утверждение вытекает из следствия 3.5.2.

Теорема 3.5.2 получается из утверждения 3.5.1 очевидной индукцией.

---

*) Более слабое свойство инвариантности относительно всех автоморфизмов называется *характеристичностью*, а ещё более слабое свойство инвариантности относительно внутренних автоморфизмов называется, как известно, нормальностью. Просто *инвариантными* раньше называли нормальные подгруппы, а сейчас не называют никакие.