Задачи к главе 1

1. Покажите, что полная группа не имеет собственных подгрупп конечного индекса, а для абелевых групп верно и обратное.

2. Как выглядят пополнения абелевых групп $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{2007}$ и $\mathbb{R}^*$?

3. Опишите все абелевы группы, пополнением которых служит $\mathbb{Z}_{2^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{3^\infty}$.

4. Покажите, что полная абелева группа G является пополнением своей подгруппы A тогда и только тогда, когда каждая нетривиальная (циклическая) подгруппа группы G нетривиально пересекается с A.

5. Приведите примеры, показывающие, что полной подгруппой абелевой группы G может не быть
а) пересечение двух полных подгрупп;
б) пересечение убывающей цепочки полных подгрупп;
в) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} nG$.
Указание: Для построения таких и других примеров может оказаться полезной следующая конструкция: Пусть имеются две группы G и H, содержащие изоморфные подгруппы: $G \supseteq A \xrightarrow[\text{изо}]{\varphi} B \subseteq H$. Группы G и H не обязательно абелевы, но подгруппы A и B центральны, то есть лежат в центрах групп G и H. ***Прямым произведением групп G и H с объединёнными центральными подгруппами A и B*** называют группу

$$G \underset{A=B}{\times} H \overset{\text{опр}}{=} (G \times H)/\{(a, \varphi(a^{-1}))\ ;\ a \in A\}.$$

Нетрудно сообразить, что сомножители G и H естественным образом вкладываются в $G \underset{A=B}{\times} H$ и их пересечение в этой группе есть $A\ (= B)$.

6. Покажите, что каждый гомоморфизм абелевых групп $A \to B$ продолжается до гомоморфизма пополнений $\widehat{A} \to \widehat{B}$, но это продолжение может быть не единственным.

7. Опишите все абелевы квазициклические группы (то есть нециклические абелевы группы, все собственные подгруппы которых циклические).

8. Покажите, что группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — это единственные абелевы квазиконечные группы.

9. Докажите, что следующие свойства полной абелевой группы G эквивалентны:
1) G элементарна или тривиальна;
2) G неразложима в прямую сумму;
3) G не имеет нетривиальных собственных полных подгрупп;
4) любые две нетривиальные подгруппы группы G нетривиально пересекаются;

10. Покажите, что абелева группа A вложима в элементарную полную группу тогда и только тогда, когда любые две нетривиальные подгруппы группы A нетривиально пересекаются.

11. Приведите пример абелевой группы без кручения ранга один, неизоморфной ни одной из групп G_π из этой главы.

12. Покажите, что количество слагаемых каждого типа в разложении полной абелевой группы в прямую сумму элементарных является инвариантом, то есть не зависит от выбора разложения.

13. Разложите в прямую сумму элементарных следующие полные абелевы группы:
а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{C}$; в) $\mathbb{C}^*$; г) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$; д) $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$; е) $(\mathbb{Z}_{2^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{2^\infty})/\{(x,x)\ ;\ x \in \mathbb{Z}_8\}$.

14. Группа называется *хопфовой* [*кохопфовой*], если она неизоморфна никакой своей собственной факторгруппе [подгруппе]. Опишите все хопфовы и все кохопфовы полные абелевы группы.
Указание: Заметьте, что каждый эндоморфизм группы $\mathbb{Q}^n$ является $\mathbb{Q}$-линейным оператором; а в группе $\mathbb{Z}_{p^\infty}^n$ число элементов каждого порядка конечно, если число n конечно.

15. Группа называется *артиновой* [*нётеровой*], если каждая убывающая [возрастающая] цепочка её подгрупп стабилизируется на конечном шаге. Опишите все нётеровы и все артиновы абелевы группы.
Указание: Покажите, что в абелевой артиновой группе минимальная подгруппа конечного индекса полна.

16. Покажите, что всякая артинова группа является кохопфовой. Как звучит двойственное утверждение?

17. Замкнут ли класс редуцированных абелевых групп относительно взятия подгрупп, факторгрупп, прямых и декартовых произведений?

18. Разложите группу $\mathbb{R}^*$ в прямую сумму полной и редуцированной.

19. Приведите пример абелевой группы, редуцированная компонента которой определяется неоднозначно.

20. Покажите, что прямая сумма циклических групп является редуцированной абелевой группой. Приведите пример редуцированной абелевой группы, не разложимой в прямую сумму циклических.

21. Докажите все сформулированные в этой главе утверждения о категории абелевых групп.

22. Дайте категорное определение порядка абелевой группы.
Указание: Порядок группы G совпадает с числом гомоморфизмов $\mathbb{Z} \to G$. Осталось дать категорное определение бесконечной циклической группы.

23. Дайте категорное определение ядра гомоморфизма. Что представляет собой двойственное понятие (*коядро*)?

24. Покажите, что в категории колец естественное вложение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ является категорно сюръективным.

25. Покажите, что декартово произведение счётного числа бесконечных циклических групп не является свободной абелевой группой. (Если не получится, можно посмотреть в [Куро67]).

26. Приведите примеры (бесконечной) абелевой группы и конечной (неабелевой) группы, в которых число подгрупп порядка 100 не совпадает с числом подгрупп индекса 100.