Задачи к главе 4

1. Покажите, что каждая группа раскладывается в свободное произведение групп, неразложимых нетривиальным образом в свободное произведение. Причём это разложение единственно с точностью до изоморфизма.

2. Верно ли, что разложение группы в прямое произведение групп, неразложимых в прямое произведение, единственно с точностью до изоморфизма? Для конечных групп ответ ДА (это теорема Ремака–Шмидта). А. Г. Курош придумал следующий пример конечно определённой группы, раскладывающейся в прямое произведение неразложимых групп двумя разными способами:

$$G = \left(\langle a_1 \rangle_\infty \mathop{\ast}_{a_1^2=a_2^2} \langle a_2 \rangle_\infty \right) \times \left(\langle b_1 \rangle_\infty \mathop{\ast}_{b_1^3=b_2^3} \langle b_2 \rangle_\infty \right) \simeq \left(G / \left\langle a_1^{-2} b_1^3 \right\rangle \right) \times \langle d \rangle_\infty .$$

Покажите, что эти прямые произведения действительно изоморфны, а прямые сомножители неразложимы и попарно неизоморфны.
Указание: $a_i \mapsto a_i d,\ b_i \mapsto b_i d$.

3. Покажите, что никакая группа не раскладывается нетривиальным образом одновременно в прямое и в свободное произведение.

4. Как выглядит центр свободного произведения с объединёнными подгруппами?

5. Напомним, что гомоморфизм $\varphi : A \to B$ называется *категорно сюръективным*, если для любых различных гомоморфизмов $\alpha, \beta : B \to C$ гомоморфизмы $\alpha\varphi$ и $\beta\varphi$ различны. Покажите, что
а) гомоморфизм групп категорно сюръективен тогда и только тогда, когда он сюръективен;
б) естественное вложение $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}$ является категорно сюръективным гомоморфизмом колец.

6. Докажите теорему о вложимости всякой счётной группы в 2-порождённую при помощи свободных конструкций.
Указание: В свободном произведении исходной группы $G = \{1, g_1, g_2, \ldots\}$ на свободную группу $F(x, y)$ рассмотрите подгруппы $H = \left\langle x, \left\{ y^i g_i y^i \right\} \right\rangle$ и $K = \left\langle y, \left\{ x^i y x^i \right\} \right\rangle$. Покажите, что эти подгруппы свободно порождаются указанными множествами. Покажите, что соответствующее HNN-расширение (в котором $H^t = K$) порождается элементами x и t.

7. Покажите, что существует континуум попарно неизоморфных 2-порождённых групп. Выведите отсюда, что не существует счётной группы, содержащей каждую счётную группу в качестве подгруппы.
Указание: Примените конструкцию вложения счётной группы в 2-порождённую к группам $\bigoplus\limits_{p \in \pi} \mathbb{Z}_p$, где π – произвольное множество простых.

8. Эта задача посвящена так называемым *свободным произведениям с коммутирующими подгруппами.* Пусть A, A_i – подгруппы группы G, а B, B_i – подгруппы группы H. Докажите «формулы»
а) $G * H / \langle\!\langle [A, B] \rangle\!\rangle \simeq G \mathop{\ast}_{A} (A \times B) \mathop{\ast}_{B} H$;
б) $G * H / \langle\!\langle [A_1, B_1], [A_2, B_2] \rangle\!\rangle \simeq$

$$\simeq \left(\left(G \mathop{\ast}_{\langle A_1, A_2 \rangle} (\langle A_1, A_2 \rangle \times (B_1 \cap B_2)) \right) \mathop{\ast}_{A_1 \times (B_1 \cap B_2)} (A_1 \times B_1) \right) \mathop{\ast}_{\langle A_2, B_1 \rangle}$$
$$\left(\left(H \mathop{\ast}_{\langle B_1, B_2 \rangle} (\langle B_1, B_2 \rangle \times (A_1 \cap A_2)) \right) \mathop{\ast}_{B_2 \times (A_1 \cap A_2)} (B_2 \times A_2) \right).$$

Что мешает написать формулу для произведения с тремя парами коммутирующих подгрупп?

9. Покажите, что условие об индексах в лемме о пинг-понге для свободных произведений с объединёнными подгруппами нельзя отбросить.

10. Сформулируйте и докажите лемму о пинг-понге для HNN-расширений.

11. Покажите, что ядро естественного отображения свободного произведения групп на их прямое произведение (*декартова подгруппа*) является свободной группой. Как вычислить её ранг?

12. Покажите, что свободное произведение с объединёнными подгруппами конечных групп и HNN-расширение конечной группы являются почти свободными группами.

13. Покажите, что свободное произведение финитно аппроксимируемо тогда и только тогда, когда сомножители финитно аппроксимируемы.

14. Покажите, что проблемы равенства и сопряжённости разрешимы в свободном произведении тогда и только тогда, когда соответствующие проблемы разрешимы в сомножителях.

15. Покажите, что каждая конечная подгруппа свободного произведения с объединёнными подгруппами сопряжена подгруппе некоторого сомножителя. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение о подгруппах HNN-расширений.

16. Покажите, что каждая подгруппа свободного произведения с объединёнными подгруппами, тривиально пересекающаяся с группами, сопряжёнными к сомножителям, свободна. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение о подгруппах HNN-расширений.

17. Покажите, что единственная группа, нетривиальным образом раскладывающаяся в свободное произведение и удовлетворяющая нетривиальному тождеству, — это бесконечная диэдральная группа $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

18. Опишите все подгруппы каждой из следующих групп с точностью до изоморфизма: $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.