Задачи к главе 2

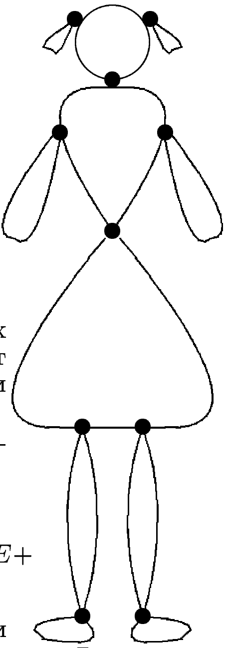

Рис. 18

1. Опишите свободные объекты в следующих категориях:
- (все) множества и (все) отображения;
- абелевы группы и гомоморфизмы;
- конечные группы и гомоморфизмы;
- ассоциативные коммутативные кольца и гомоморфизмы;
- ассоциативные кольца с единицей и гомоморфизмы, сохраняющие единицу;
- комплексные векторные пространства и линейные отображения;
- полугруппы и гомоморфизмы;
- метрические пространства и непрерывные отображения.

В каких из этих категорий выполнен аналог теоремы Нильсена–Шрейера?

2. (Инвариантное определение свободы) Группа P называется *проективной*, если для любых групп A и B, любого эпиморфизма $\alpha\colon A \to B$ и любого гомоморфизма $\pi\colon P \to B$ существует гомоморфизм $\varphi\colon P \to A$ такой, что $\alpha\varphi = \pi$. Покажите, что группа проективна тогда и только тогда, когда она свободна.

3. Покажите, что для каждого простого числа p свободная группа аппроксимируется конечными p-группами. Выведете отсюда, что
- не существует нетривиального тождества, выполненного во всех конечных p-группах;
- пересечение всех членов нижнего центрального ряда свободной группы тривиально.

Указание: Используйте матрицы $\left(\begin{smallmatrix}1&p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\p&1\end{smallmatrix}\right)$ вместо $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)$. Покажите, что $(E+pM_2(\mathbb{Z}))/(E+p^kM_2(\mathbb{Z}))$ является конечной p-группой.

4. Объясните, как выглядит инвариантная прямая для элемента $xy^3xyxy^{-2}x^{-1}$ в графе Кэли свободной группы $F(x,y)$. (Что написано на этой прямой? Через какую точку она проходит?)

5. Покажите, что два элемента свободной группы, некоторые степени которых коммутируют, лежат в одной циклической подгруппе.

6. Опишите централизатор элемента $xy^3xyxy^{-2}x^{-1}$ свободной группы $F(x,y)$.

7. Покажите, что два некоммутирующих элемента свободной группы свободно порождают подгруппу ранга 2.

8. Пусть $H \subset F(x,y)$ является ядром гомоморфизма $x \mapsto (1,0)$, $y \mapsto (0,1)$ свободной группы $F(x,y)$ на $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Нарисуйте фундаментальную область для действия H на графе Кэли свободной группы $F(x,y)$. Укажите свободные образующие для H. Нарисуйте соответствующее накрытие.

9. Покажите, что две подгруппы фундаментальной группы сопряжены тогда и только тогда, когда соответствующие накрытия отличаются только выбором отмеченной точки. Покажите, что накрытие отвечает нормальной подгруппе тогда и только тогда, когда все поднятия проекции каждого замкнутого пути замкнуты.

10. Определите накрытие «восьмёрки» графом, изображённым на рисунке 18. Какую подгруппу свободной группы ранга два задаёт это накрытие? Найдите свободный базис этой подгруппы и её индекс.

11. Нарисовав соответствующие накрытия, найдите все подгруппы
а) индекса 2 в F_2; б) индекса 3 в F_2; в) индекса 2 в F_3. Предъявите свободные базисы (некоторых из) этих подгрупп. Классифицируйте эти подгруппы с точностью до изоморфизма и с точностью до сопряжённости. Какие из найденных подгрупп нормальны?

12. *Морфизмом накрытия* $A \overset{\alpha}{\to} X$ в накрытие $B \overset{\beta}{\to} X$ называют отображение $A \overset{\varphi}{\to} B$ такое, что $\alpha = \beta\varphi$. Покажите, что для любых двух накрытий α и β над X существует не более одного морфизма $\alpha \to \beta$. Такой морфизм существует в том и только том случае, когда соответствующие подгруппы фундаментальной группы пространства X вложены одна в другую.

13. Покажите, что фундаментальная группа подграфа является свободным сомножителем фундаментальной группы графа.

14. Покажите, что нетривиальная нормальная подгруппа конечно порождённой свободной группы конечно порождена тогда и только тогда, когда её индекс конечен.

15. Покажите, что коммутант неабелевой свободной группы имеет бесконечный ранг и предъявите свободный базис для F_2'.

16. Докажите гипотезу Х. Нейман в случае, когда
а) индексы обеих подгрупп конечны; б) обе подгруппы нормальны.

17. Приведите пример
а) группы, в которой пересечение двух конечно порождённых подгрупп не всегда конечно порождено;
б) не конечно порождённой подгруппы свободной группы, являющейся пересечением (бесконечного числа) конечно порождённых подгрупп.

18. Покажите, что связные компоненты графа Γ из раздела 2.11 отвечают пересечениям подгрупп, сопряжённых с H и K. Выведите отсюда следующее усиление теоремы Хаусона: $\sum_{\widetilde{K}}(\operatorname{rank}(H \cap \widetilde{K}) - 1) \leqslant 2(\operatorname{rank} H - 1)(\operatorname{rank} K - 1)$, где суммирование распространяется на все подгруппы $\widetilde{K}$, сопряжённые с подгруппой K и нетривиально пересекающиеся с H.

19. Покажите, что существует алгоритм, позволяющий по словам $v_1, \ldots, v_n, w \in F(x_1, \ldots, x_m) = F$
а) определить, лежит ли w в подгруппе $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$; б) определить, являются ли $v_1, \ldots, v_n$ свободным базисом группы F; в) найти индекс $|F : \langle v_1, \ldots, v_n\rangle|$.