Задачи к главе 1

1. Нарисуйте графы следующих групп: а) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$; в) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$; г) D_4; д) Q_8; е) $S_3 \times \mathbb{Z}_2$; ё) $D_4 \times \mathbb{Z}_2$.

2. Покажите, что прямая, изображённая на рисунке 7, является графом Кэли. Опишите на алгебраическом языке соответствующую группу.

Рис. 7

3. Приведите пример раскрашенного ориентированного графа Γ, не являющегося графом Кэли никакой группы, но являющегося
а) связным и правильно раскрашенным;
б) связным и однородным.

4. Покажите, что *граф Петерсена* (рис. 8) не может быть превращён в граф Кэли добавлением кратных рёбер, ориентации и раскраски, несмотря на то, что группа его автоморфизмов действует транзитивно на вершинах.

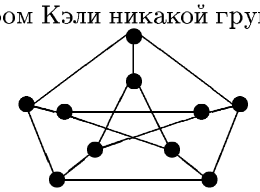

Рис. 8

5. Пусть Γ — граф Кэли, а граф Γ' получается из графа Γ изменением направлений всех рёбер. Покажите, что граф Γ также является графом Кэли. Приведите пример, показывающий, что графы Γ и Γ' не обязаны быть изоморфными.

6. Классифицируйте следующие пространства с точностью до квазиизометрии: точка; луч; прямая; плоскость; полуплоскость; угол величины $\pi/3$; трёхмерное евклидово пространство; группы S_4, A_5, F_2, F_5, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_{10}$.

7. Покажите, что никакая конечно порождённая группа не может быть квазиизометрична лучу.

8. Покажите, что любая конечно порождённая группа квазиизометрична каждой своей факторгруппе по конечной нормальной подгруппе.

9. Напишите и докажите явную оценку для порядка k-порождённой группы, содержащей не более n квадратов.

10. Покажите, что для любой группы G и любого числа n $\left|\{x^n \mid x \in G\}\right| < \infty \implies \left|\langle\{x^n \mid x \in G\}\rangle\right| < \infty$. Выведите отсюда, что вопрос о том, обязана ли конечно порождённая группа с конечным количеством n-х степеней быть конечной, эквивалентен проблеме Бернсайда для показателя n.

11. Покажите, что каждое расширение конечной группы при помощи циклической является расширением циклической группы при помощи конечной (то есть почти циклической группой).

12. Покажите, что бесконечная диэдральная группа является почти циклической, но не является расширением конечной группы при помощи циклической.

13. Покажите, что каждая почти циклическая группа является расширением конечной группы при помощи либо циклической, либо диэдральной группы.

14. Метрическое пространство называется *геодезическим*, если любые две его точки могут быть соединены геодезическим отрезком. Геодезическое метрическое пространство называют *гиперболическим*, если все треугольники в нём являются равномерно тонкими, то есть существует такая константа ε, что в любом треугольнике, составленном из трёх геодезических отрезков, каждая из сторон лежит в ε-окрестности объединения двух других сторон. Покажите, что прямая, дерево (то есть связный граф без циклов) и плоскость Лобачевского являются примерами гиперболических пространств, а евклидово пространство размерности большей единицы не является гиперболическим пространством. Покажите, что геодезическое пространство, квазиизометричное гиперболическому пространству, само является гиперболическим.

15. *Гиперболической группой* называют конечно порождённую группу, граф Кэли которой является гиперболическим метрическим пространством. Покажите, что это определение корректно, то есть не зависит от выбора конечной системы образующих в группе. Покажите, что конечные, почти циклические и свободные группы являются гиперболическими, а группа $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ не является гиперболической.*

16. Покажите, что в гиперболической группе все абелевы подгруппы являются почти циклическими.

17. Пусть G — некоторая конечно порождённая группа и символ $f(n)$ обозначает число элементов группы G длины $\leqslant n$ относительно словарной метрики, отвечающей некоторой конечной системе образующих группы G. Эту функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называют *ростом* группы G. Покажите, что рост не сильно зависит от выбора конечной системы образующих в том смысле, что корректно говорить о группах линейного, квадратичного, кубического или, например, экспоненциального роста. Приведите примеры групп с указанными типами роста. Покажите, что рост группы не может быть больше, чем экспоненциальный.**

18. Покажите, что рост конечно порождённой почти нильпотентной группы полиномиален. Трудная теорема М. Громова утверждает, что верно и обратное: каждая группа полиномиального роста является почти нильпотентной. Выведите из этой теоремы, что почти нильпотентность является геометрическим свойством.

---

* Изучение гиперболических групп является очень модным и бурно развивающимся направлением. Познакомиться с основами этой науки можно по книгам [гипе92] и [Гром02].

** Бывают также группы *промежуточного роста*, то есть роста большего чем любой многочлен, но меньшего чем экспонента. Первый такой пример был построен Р. И. Григорчуком в 1983 году (см. [ГрКу90]).