Задачи к главе 4

1. Приведите примеры непустых абстрактных классов групп, не являющихся многообразиями, но замкнутых относительно взятия
   а) подгрупп и декартовых произведений;
   б) факторгрупп и декартовых произведений;
   в) подгрупп, факторгрупп и прямых произведений.

2. Какие из следующих классов групп являются многообразиями: группы без кручения; нильпотентные группы; разрешимые группы; нильпотентные группы; разрешимые группы ступени не выше 100; почти разрешимые группы ступени не выше 100; нильпотентные группы ступени не выше 100; метабелевы группы; полициклические группы; конечные группы; локально конечные группы; ФА группы; локально ФА группы; хопфовы группы; кохопфовы группы; линейные группы; расширения нильпотентных групп ступени не выше 100 при помощи абелевых; расширения абелевых групп при помощи нильпотентных групп ступени не выше 100?

3. Докажите, что группа G является относительно свободной тогда и только тогда, когда она имеет такую систему образующих X, что всякое отображение $X \to G$ продолжается до эндоморфизма группы G.

4. Покажите, что каждая относительно свободная группа является свободной группой некоторого многообразия.

5. Опишите абелевы относительно свободные группы. Покажите, что каждая абелева нециклическая группа является свободной не более чем в одном многообразии. Что можно сказать о циклических группах?

6. Покажите, что ранг относительно свободной нетривиальной группы совпадает с минимальным числом порождающих этой группы. Выведите отсюда, что относительно свободные группы разных рангов неизоморфны.

7. Какие из следующих групп являются относительно свободными: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{100}$, $\mathbb{Z}_{100} \oplus \mathbb{Z}_{100}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$, S_3, D_4, Q_8.

8. Покажите, что группа Гейзенберга $UT_3(\mathbb{Z})$ является свободной нильпотентной ступени 2 группой.

9. Опишите явно свободные группы многообразия, заданного тождеством $[x,y]^{2005}(xy)^{100}[x,y,z]x^2 = 1$.

10. Покажите, что имеется не более чем континуум различных многообразий групп. (На самом деле их ровно континуум, см [Ольш89].)

11. Покажите, что сплетение $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ порождает многообразие всех метабелевых групп.

12. Покажите, что если группа G аппроксимируется классом групп $\mathcal{K}$, то $G \in \mathbf{var}\,\mathcal{K}$. Верно ли обратное?

13. Покажите, что каждое многообразие порождается своими конечно порождёнными группами.

14. Покажите, что каждое многообразие нильпотентных групп порождается своими конечными группами.

15. Во второй части этих лекций мы покажем, что все абсолютно свободные группы являются финитно аппроксимируемыми. Выведете из этого факта, что не существует нетривиального тождества, выполненного во всех конечных группах.

16. Опишите все подмногообразия многообразия нильпотентных групп ступени 2.

17. Напишите и докажите оценку для порядка k-порождённой группы из многообразия, порождённого группой порядка n.

18. Найдите базис тождеств многообразий, порождённых следующими группами: а) A_4; б) $S_3 \times \mathbb{Z}_2$; в) $S_3 \times \mathbb{Z}_3$; г) $S_3 \times \mathbb{Z}_4$; д) $S_3 \times \mathbb{Z}_5$.

19. Покажите, что многообразия $\mathbf{var}\,D_4$ и $\mathbf{var}\,Q_8$ совпадают.

20. Опишите все абелевы критические группы.

21. Докажите, что конечные простые группы являются критическими.
Указание: свободная группа многообразия, порождённого всеми собственными подгруппами данной группы, аппроксимируется этими подгруппами; это означает, что факторы композиционного ряда этой свободной группы меньше, чем исходная простая группа; значит, исходная простая группа не является гомоморфным образом этой свободной группы.

22. Покажите, что у группы S_3 имеется базис тождеств, состоящий из одного тождества от двух переменных.

23. *Вербальной подгруппой* группы G называют подгруппу, порождённую множеством всех значений некоторого набора слов в алфавите $\{x_1^{\pm1}, x_2^{\pm1}, \ldots\}$.
   а) Покажите, что вербальная подгруппа произвольной группы эндоморфно допустима, а для относительно свободной группы верно и обратное.
   б) Покажите, что факторгруппа относительно свободной группы по вербальной подгруппе относительно свободна.
   в) Покажите, что имеется естественное взаимно однозначное соответствие между множеством всех многообразий и множеством всех вербальных подгрупп абсолютно свободной группы счётного ранга.
   г) Покажите, что в конечно порождённой группе каждая подгруппа конечного индекса содержит вербальную подгруппу конечного индекса.

24. Покажите, что класс $\mathcal{UV}$ всех групп, являющихся расширением групп из многообразия $\mathcal{U}$ при помощи групп из многообразия $\mathcal{V}$, является многообразием. Многообразие $\mathcal{UV}$ называется *произведением многообразий* $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. Покажите, что умножение многообразий ассоциативно, но не коммутативно.