

Задачи к главе 2

1. Покажите, что декартово произведение является произведением (в категорном смысле) в категории всех групп. Покажите, что прямое произведение является копроизведением в категории абелевых групп, но не является таковым в категории всех групп и даже в категории нильпотентных групп ступени 2.
2. Пусть $x_i \in \gamma_k(G)$, $y \in \gamma_l(G)$, $n_i \in \mathbb{Z}$. Сформулируйте и докажите коммутаторное тождество вида $[\prod x_i^{n_i}, y] = ? \pmod{\gamma_r(G)}$.
3. Пусть $A, B, C \triangleleft G$. Сформулируйте и докажите коммутаторное тождество вида $[AB, C] = ?$.
4. Пусть $A, B \triangleleft G$, а X_1, X_2, Y_1 и Y_2 — подмножества группы G . Причём $A = \langle X_1 \rangle = \langle\langle X_2 \rangle\rangle$, а $B = \langle Y_1 \rangle = \langle\langle Y_2 \rangle\rangle$.
 - а) Какие из равенств вида $[A, B] = \langle[X_?, Y_?]\rangle$ верны всегда, а какие нет? (Докажите, приведите контрпримеры.)
 - б) Какие из равенств вида $[A, B] = \langle\langle[X_?, Y_?]\rangle\rangle$ верны всегда, а какие нет? (Докажите, приведите контрпримеры.)
5. Напишите и докажите какую-нибудь оценку для степени нильпотентности группы порядка p^n .
6. Напишите и докажите какую-нибудь оценку для числа порождающих подгруппы n -порождённой нильпотентной группы ступени s .
7. Докажите, что никакая собственная подгруппа нильпотентной группы не совпадает со своим нормализатором.
8. Напишите и докажите какую-нибудь оценку для порядка нильпотентной группы через степень нильпотентности и индекс коммутанта.
9. Напишите и докажите какую-нибудь оценку для индекса подгруппы без кручения k -порождённой нильпотентной группы ступени нильпотентности s .
10. Напишите и докажите какую-нибудь оценку для порядка k -порождённой нильпотентной группы ступени s , центр которой имеет порядок l .
11. Постройте пример бесконечной нильпотентной группы с конечным центром.
Указание: можно взять прямое произведение бесконечного числа конечных нильпотентных групп с изоморфными центрами и «склеить» центры сомножителей (см. задачи к главе 1).
12. Напишите и докажите какую-нибудь оценку для индекса центра k -порождённой произвольной группы, коммутант которой имеет порядок l .
13. Напишите и докажите какую-нибудь оценку для порядка коммутанта k -порождённой произвольной группы, центр которой имеет индекс l .
14. Напишите и докажите какую-нибудь оценку для порядка коммутанта k -порождённой произвольной группы, в которой имеется ровно l различных коммутаторов.
15. Покажите, что факторгруппа неабелевой группы по её центру не может быть циклической. Покажите, что факторгруппа неабелевой нильпотентной группы по её коммутанту не может быть циклической.
16. (Теорема Б.Неймана) Покажите, что индекс центра группы G конечен тогда и только тогда, когда любое бесконечное подмножество группы G содержит пару различных коммутирующих элементов.
17. Пусть G — такая бесконечная группа, что любые два её бесконечных подмножества $X, Y \subseteq G$ содержат пару коммутирующих элементов $x \in X$ и $y \in Y$. Покажите, что группа G абелева.
Указание: воспользуйтесь предыдущей задачей.
18. Покажите, что бесконечная нециклическая группа не может быть объединением конечного числа своих циклических подгрупп.
Указание: воспользуйтесь предыдущей задачей.
19. Покажите, что для произвольной группы G и произвольного числа n $|\{g^n \mid g \in G\}| < \infty \implies |\langle\{g^n \mid g \in G\}\rangle| < \infty$.
20. Докажите хопфовость конечно порождённой нильпотентной группы «непосредственно», т.е. не пользуясь финитной аппроксимируемостью.
21. Приведите пример хопфовой не финитно аппроксимируемой группы и пример нехопфовой финитно аппроксимируемой группы.
22. Доказательство теоремы о хопфовости конечно порождённых финитно аппроксимируемых групп имеет категорный характер. Какую «теорему» доказывает двойственное рассуждение?
23. Приведите пример финитно аппроксимируемой группы, не вложимой в прямое произведение конечных групп.
24. Покажите, что группа, аппроксимируемая p -группами для двух различных простых p , не имеет кручения.
25. Покажите, что конечно порождённая группа, аппроксимируемая нильпотентными группами без кручения, аппроксимируется конечными p -группами для каждого простого p .
26. Покажите, что центр и другие члены верхнего центрального ряда нильпотентной группы без кручения являются изолированными. Покажите, что коммутант нильпотентной группы без кручения может не быть изолированным.
27. Покажите, что извлечение корней в нильпотентной группе без кручения является однозначной (не всюду определённой) операцией.
28. Сформулируйте определение пополнения нильпотентной группы и докажите теорему единственности для пополнений нильпотентных групп без кручения.
29. Приведите пример нильпотентной группы, не вложимой в полную нильпотентную группу.