Задачи к главе 3

1. Напишите копредставление с двумя порождающими для группы кватернионов.
2. Покажите, что $\langle X|R\rangle \times \langle Y|S\rangle \simeq \big\langle X \cup Y \;\big|\; R \cup S \cup \{[x,y] \mid x \in X,\ y \in Y\}\big\rangle$.
3. Покажите, что $\langle X|R\rangle \underset{\varphi}{\leftthreetimes} \langle Y|S\rangle \simeq \big\langle X \cup Y \;\big|\; R \cup S \cup \{y^x = y^{\varphi(x)} \mid x \in X,\ y \in Y\}\big\rangle$.
4. Как по копредставлениям групп написать копредставление их прямого сплетения?
5. (Метабелева конечно порождённая не конечно определённая группа.) Покажите, что сплетение $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ не является конечно определённой группой.
6. Покажите, что расширение конечно определённой группы при помощи конечно определённой группы является конечно определённой группой.
7. Докажите, что полициклическая группа является конечно определённой.
8. Покажите, что всякая [конечно определённая] группа может быть задана [конечным] копредставлением, в котором определяющие соотношения имеют длины не больше трёх и содержат буквы только в положительных степенях. Опишите группы, которые могут быть заданы копредставлениями с определяющими соотношениями длины не больше двух.
9. Исходя из канонического копредставления симметрической группы, напишите
а) копредставление с двумя образующими для группы S_4; б) копредставление группы A_4.
10. Предъявите цепочку преобразований Тице, связывающую следующие копредставления диэдральной группы: $\big\langle a, b \mid a^n = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1}\big\rangle$ и $\big\langle x, y \mid (xy)^n = x^2 = y^2 = 1\big\rangle$.
11. Покажите, что копредставление $\big\langle x, y \,\big|\, x^3 = y^4,\ xyx = yxy\big\rangle$ задаёт тривиальную группу. Можно ли это копредставление превратить в $\langle x, y \,|\, x = 1,\ y = 1\rangle$ конечным числом преобразований Эндрюса–Куртиса? Ответ на этот вопрос неизвестен.
12. Сколько образующих и сколько соотношений достаточно для задания копредставления подгруппы индекса j группы, обладающей копредставлением с n образующими и m определяющими соотношениями?
13. Как по конечному копредставлению группы найти примарное разложение факторгруппы по коммутанту?
14. Покажите, что конечная группа не может быть задана копредставлением с числом определяющих соотношений меньшим, чем число образующих.
15. (Трудная задача.) Покажите, что следующие группы не могут быть заданы копредставлением с двумя образующими и двумя определяющими соотношениями: а) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$; б) S_3; в) D_4.
Указание: Используйте мультипликатор Шура (см. ниже).
16. (Мультипликатор Шура.) Пусть $G \simeq F/N$, где F – свободная группа. Покажите, что абелева группа $H_2(G) \overset{\text{опр}}{=} (N \cap [F,F])/[N,F]$, называемая *мультипликатором Шура* или *второй группой гомологий* группы G,
    а) зависит только от группы G (т.е. не зависит от её представления в виде факторгруппы свободной группы);
    б) конечно порождена, если G конечно определена;
    в) тривиальна, если G конечна и обладает *сбалансированным* копредставлением, т.е. таким копредставлением, в котором число образующих равно числу определяющих соотношений.
17. Покажите, что в свободной группе разрешимы проблемы равенства, сопряжённости и вхождения.
18. В 1980 году О.Г. Харлампович (будучи студенткой) построила первый пример разрешимой (ступени 3) конечно определённой группы с неразрешимой проблемой равенства. Покажите, что такая группа не может быть ни нильпотентной, ни метабелевой, ни полициклической.
19. Покажите, что разрешимость проблем равенства и сопряжённости переносится на прямые произведения. Почему аналогичные рассуждения не проходят для проблемы вхождения?
20. Группа называется *финитно аппроксимируемой относительно сопряжённости*, если для любых двух её несопряжённых элементов найдётся гомоморфизм на конечную группу, переводящий эти элементы в несопряжённые. Покажите, что для конечно представленных групп финитная аппроксимируемость относительно сопряжённости влечёт разрешимость проблемы сопряжённости. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение о проблеме вхождения.
21. Если слово $v \in F(X)$ равно единице в группе $G = \langle X \mid R\rangle$, то оно представляется (в свободной группе) в виде произведения слов, сопряжённых к определяющим соотношениям, и обратных к ним. Минимально возможное число сомножителей в таком произведении называют *площадью* слова v. *Функцией Дэна* копредставления G называют функцию $D_G\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, определённую правилом $D_G(n) = \max(\text{площадь}(v)\,;\ v \in \langle\!\langle R\rangle\!\rangle\,, |v| = n)$, где $|v|$ есть длина слова v в свободной группе (то есть число букв в несократимой записи). Покажите, что для каждого конечного копредставления следующие условия эквивалентны:
    а) проблема равенства разрешима;
    б) функция Дэна *рекурсивна*, то есть вычисляется некоторым алгоритмом;
    в) функция Дэна ограничена сверху рекурсивной функцией.
22. Пользуясь теоремой Адяна–Рабина, покажите, что:
    - существует (*плохое*) конечное копредставление, про которое нельзя доказать ни то, что задаваемая им группа тривиальна, ни то, что она нетривиальна;
    - если некоторая группа задаётся плохим копредставлением, то всякое её конечное копредставление плохое (таким образом, можно говорить о плохих группах);
    - каждое плохое копредставление задаёт нетривиальную группу;
    - ни про какое копредставление нельзя доказать, что оно плохое;
    - все неединичные элементы плохой группы являются плохими.