Задачи к главе 3

1. Сколько существует полупрямых произведений следующего вида: а) $\mathbb{Z}_2 \leftthreetimes \mathbb{Z}_5$; б) $\mathbb{Z}_3 \leftthreetimes \mathbb{Z}_5$; в) $\mathbb{Z}_4 \leftthreetimes \mathbb{Z}_5$; г) $\mathbb{Z}_5 \leftthreetimes \mathbb{Z}_5$; д) $\mathbb{Z}_2 \leftthreetimes S_5$; е) $\mathbb{Z}_3 \leftthreetimes S_5$; ё) $\mathbb{Z}_4 \leftthreetimes S_5$; ж) $\mathbb{Z}_5 \leftthreetimes S_5$; з) $S_3 \leftthreetimes S_5$; и) $S_4 \leftthreetimes S_5$; к) $S_5 \leftthreetimes S_5$; л) $S_5 \leftthreetimes \mathbb{Z}_5$? Сколько из них разрешимых, нильпотентных, метабелевых, полициклических?
Указание: симметрическая группа S_n при $n \notin \{2,6\}$ *совершенна*, т.е. её центр тривиален, а всякий автоморфизм является внутренним (см. [КаМе82]).

2. Напишите условия на группы A и B, необходимые и достаточные для того, чтобы их прямое [декартово] сплетение было разрешимым, нильпотентным, метабелевым, полициклическим.

3. Докажите, что прямое сплетение двух групп финитно аппроксимируемо тогда и только тогда, когда выполнены два условия:
а) обе группы финитно аппроксимируемы;
б) либо активная группа конечна, либо пассивная группа абелева.
Указание: смотрите пример не финитно аппроксимируемой разрешимой группы.

4. (Пример Р. Линдона) Покажите, что уравнение $a^{a^t} = a^2$ не разрешимо над циклической группой $\langle a \rangle_p$.

5. Покажите, что положительное уравнение $g_1 t g_2 t \dots g_n t = 1$ над группой G без кручения обладает решением $\widetilde{t} \in \widetilde{G} \supseteq G$ бесконечного порядка, если $g_1 g_2 \dots g_n \neq 1$ в группе G.

6. Понятие *разрешимости системы уравнений (от нескольких переменных) над группой* определяется естественным образом. Система уравнений называется *невырожденной*, если ранг матрицы, составленной из сумм показателей при i-м неизвестном в j-м уравнении, равен числу уравнений. *Гипотеза Кервера–Лауденбаха для систем* утверждает, что каждая невырожденная система уравнений над любой группой разрешима над ней. Покажите, что эту гипотезу достаточно доказать для систем, в которых каждое уравнение имеет длину 3.

7. М. Герстенхабер и О.С. Ротхауз в 1962 году доказали, что всякая невырожденная система уравнений над конечной группой разрешима над этой группой. Выведите из этого результата аналогичный факт об уравнениях над финитно аппроксимируемыми группами.

8. Покажите, что вложение Фробениуса расширения в сплетение почти не зависит от выбора представителей смежных классов в том смысле, что образы всех вложений Фробениуса сопряжены.

9. Покажите, что каждая почти нётерова группа является нётеровой, а каждая почти артинова группа (см. задачи к главе 1) является артиновой.

10. (Обращение теоремы 3.5.1.) Покажите, что каждая разрешимая нётерова группа является полициклической.*)

11. *Черниковской* группой называют группу, содержащую нормальную подгруппу конечного индекса, раскладывающуюся в прямое произведение конечного числа групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (возможно, с разными p). Покажите, что всякая черниковская группа является артиновой, а для разрешимых групп верно и обратное.*)

12. Напишите и докажите оценку для индекса вполне инвариантной подгруппы, содержащейся в подгруппе индекса l k-порождённой группы.

13. Покажите, что для любого поля F, любого натурального числа l и любого $k \geqslant 2$ кольцо многочленов $F[x_1, \dots, x_k]$ содержит идеал, не порождаемый (как идеал) никакими l своими элементами. Почему это не противоречит теореме Гильберта о базисе?

14. Приведите пример конечно порождённой метабелевой группы G, в которой для любого натурального числа l найдётся нормальная подгруппа, не являющаяся нормальным замыканием никаких l элементов.

15. Докажите, что всякое конечно порождённое ассоциативное коммутативное кольцо без нильпотентных элементов аппроксимируется конечными полями.

16. Покажите, что если конечно порождённая группа аппроксимируется линейными группами над некоторым полем, то она аппроксимируется линейными группами над любым другим полем.
Указание: Какому более естественному свойству эквивалентна такая аппроксимируемость?

17. (Теорема Миллера–Морено.) Покажите, что каждая конечная неабелева группа содержит неабелеву метабелеву подгруппу.
Указание: Достаточно доказать метабелевость конечных квазиабелевых групп. Покажите, что пересечение двух максимальных подгрупп квазиабелевой группы содержится в её центре. Докажите, что в конечной группе, в которой любые две максимальные подгруппы пересекаются тривиально, найдётся нормальная максимальная подгруппа. Далее используйте индукцию по порядку группы.

18. *Ослабленной проблемой Бернсайда* называют следующий вопрос: *Конечно ли число m-порождённых конечных групп периода n?*
а) (наблюдение В. Магнуса) Покажите, что отрицательный ответ на этот вопрос влечёт существование бесконечной m-порождённой группы периода n (то есть решение ограниченной проблемы Бернсайда).**)
б) Покажите, что положительный ответ на этот вопрос означает, что никакая бесконечная m-порождённая группа периода n не является финитно аппроксимируемой.

19. Напишите и докажите оценку для числа порождающих подгруппы индекса l k-порождённой группы G.

20. Напишите и докажите оценку для порядка периодической k-порождённой разрешимой группы ступени s и периода n.

21. Докажите теорему Бернсайда о локальной конечности групп периода 3.
Указание: выведите из равенств $b^3 = 1$, $(ab)^3 = 1$ и $(a^{-1}b)^3 = 1$ равенство $a^b a = a a^b$ и покажите, что конечно порождённая группа, в которой каждый элемент коммутирует со всеми своими сопряжёнными, является разрешимой.

---

*) Долгое время не было известно никаких примеров нётеровых групп, не являющихся почти полициклическими, и никаких примеров артиновых групп, не являющихся черниковскими. Первые такие группы были построены А.Ю. Ольшанским (см. [Ольш89]). В частности, монстры Тарского являются такими примерами.

**) К сожалению, вам вряд ли удастся воспользоваться этим наблюдением, поскольку ослабленная проблема Бернсайда была решена положительно А.И. Кострикиным для простых n (см. [Кост86]) и позже Е.И. Зельмановым для степеней простых. Из этого результата, одной старой теоремы Холла и Хигмена и классификации конечных простых групп вытекает, что ослабленная проблема Бернсайда решается положительно для всех показателей n. За свой вклад Е.И. Зельманов получил в 1994 году *Филдсовскую медаль* — самую престижную международную награду для математиков.