УДК 515.142.331+515.142.321+512.543.16 MSC: 57K20, 55U10, 05E45, 20F05

ОЧЕНЬ МАЛЕНЬКИЕ НЕЛЕЙТОНОВЫ КОМПЛЕКСЫ

Наталия С. Дергачёва Антон А. Клячко

Механико-математический факультет Московского государственного университета

Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

nataliya.dergacheva@gmail.com klyachko@mech.math.msu.su

Сколько двумерных клеток должны содержать два конечных двумерных псевдосимплициальных комплекса, имеющих общее накрытие, но не имеющих общего конечного накрытия? Мы получаем почти окончательный ответ: минимальное возможное число двумерных клеток — это 3, 4 или 5 (в каждом комплексе).

1. Введение

Теорема Лейтона [Lei82]. *Если два конечных графа имеют общее накрытие, то они имеют общее конечное накрытие.*

Альтернативные доказательства и различные обобщения этого результата можно найти, например, в [Neu10], [BaK90], [SGW19], [Woo21], [BrS21] и литературе там цитируемой.

Для двумерных CW-комплексов (и клеточных накрытий) аналогичная теорема перестаёт быть верной:

- первый пример такой *нелейтоновой* пары комплексов ([Wis96] и [Wis07]) содержал по шесть двумерных клеток в каждом комплексе;
- потом это число было понижено до четырёх [JaW09];
- потом — до двух [DK23].

Существует ли нелейтонова пара комплексов с одной двумерной клеткой (в каждом из двух комплексов, или хотя бы в одном) — неизвестно.

Мы рассматриваем другую меру сложности CW-комплексов — число двумерных симплексов (треугольников) в (обобщённых) триангуляциях. Другими словами, мы рассматриваем двумерные *псевдосимплициальные* комплексы, то есть двумерные CW-комплексы, в которых характеристическое отображение для каждой клетки является отображением симплекса, и ограничение этого отображения на каждую грань является характеристическим отображением для некоторой другой клетки (смотрите, например, [БП04]). Грубо говоря, это означает, что двумерные клетки являются треугольниками, но разрешаются примыкания одного треугольника к другому (или к себе) по нескольким рёбрам или вершинам.

В этом смысле пример из [JaW09] лучше — там (обобщённая) триангуляция даёт нелейтонову пару псевдосимплициальных двумерных комплексов, содержащую по 8 треугольников в каждом комплексе (тогда как в [Wis96] и [Wis07] получается 12, а в [DK23] — 24 треугольника в каждом комплексе).

Основная теорема (упрощённая формулировка). *Существуют два конечных двумерных псевдосимплициальных комплекса, имеющих общее накрытие, но не имеющих общего конечного накрытия, и содержащих по пять двумерных клеток (треугольников) каждый.*

В конце параграфе 2 можно найти явный вид этих комплексов. А в параграфе 3 мы доказываем следующий факт.

Утверждение 1. *Если два конечных двумерных псевдосимплициальных комплекса имеют общее накрытие, но не имеют общего конечного накрытия, то каждый из этих комплексов содержит не менее трёх двумерных клеток.*

Таким образом, минимальное возможное число двумерных клеток в псевдосимплициальном комплексе, входящем в нелейтонову пару, это одно из трёх чисел: 3, 4 или 5.

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, а x и y — элементы некоторой группы, то x^y, x^{ky} и x^{-y} обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$ и $y^{-1}x^{-1}y$, соответственно. Символ $\mathbb{Z}_n$ (или $\langle x\rangle_n$) обозначает циклическую группу порядка n (порождённую элементом x). Свободная группа ранга два (с базисом x, y) обозначается символом F_2 (или $F(x,y)$). Символ $*$ обозначает свободное произведение. *Группы Баумслага–Солитэра* — это $\mathrm{BS}(n,m) \overset{\text{опр}}{=} \langle c,d \,|\, c^{nd}=c^m\rangle$.

Мы выражаем признательность Мартину Брайдсону за ценное замечание (смотрите параграф 3). Авторы благодарят Фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00075.

2. Доказательство основной теоремы

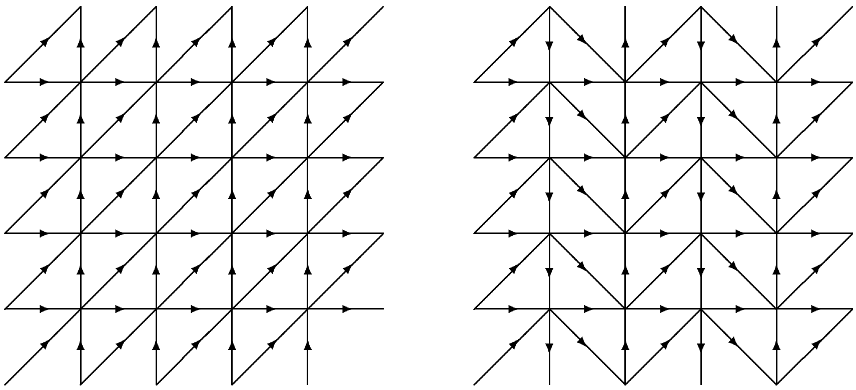
Возьмём «триангулированные» копредставления фундаментальных групп тора и бутылки Клейна:

$$G_1 = \langle a, b, z \mid ab = z = ba \rangle \simeq \mathrm{BS}(1,1) \quad \text{и} \quad G_{-1} = \left\langle a, b, z \,\middle|\, ab = z = ba^{-1} \right\rangle \simeq \mathrm{BS}(1,-1),$$

и рассмотрим свободные произведения $H_\varepsilon = G_\varepsilon \underset{b=h}{*} H$ с объединённой циклической подгруппой групп G_ε и некоторой группы $H = \langle X \mid R \rangle \supseteq \langle h \rangle_\infty$ (здесь и везде далее $\varepsilon = \pm 1$). Пусть K_ε — стандартные (одновершинные) комплексы следующих копредставлений групп H_ε:

$$H_\varepsilon = \left\langle \{a, z\} \sqcup X \,\middle|\, \{a\widehat{h}z^{-1}, \widehat{h}a^\varepsilon z^{-1}\} \sqcup R \right\rangle, \quad \text{где } \widehat{h} \text{ — слово в алфавите } X^{\pm 1}, \text{ представляющее элемент } h \in H.$$

Графы Кэли групп G_ε, разумеется, изоморфны (как абстрактные неориентированные графы), то же самое можно сказать про универсальные накрытия стандартных комплексов копредставлений групп G_ε (эти накрытия представляют собой плоскость, разбитую на правильные треугольники, рис. 1).



Универсальные накрытия стандартных комплексов копредставлений G_1 (слева) и G_{-1} (справа); вертикальные, горизонтальные и диагональные рёбра помечены буквами a, b и z, соответственно; каждый маленький треугольник заклеен двумерной клеткой.

Рис. 1

Чуть менее тривиальное наблюдение состоит в том, что изоморфизм универсальных накрытий имеет место также для групп H_ε:

для любой группы H и любого элемента $h \in H$ бесконечного порядка универсальные накрытия комплексов K_ε изоморфны.

Этот факт (который читатель может назвать очевидным) подробно объясняется в [DK23], наблюдение $(*)$. Правда в [DK23] рассматриваются стандартные (нетрианулированные) копредставления групп $G_\varepsilon \simeq \mathrm{BS}(1,\varepsilon)$, то есть копредставления с одним соотношением и двумя образующими; но нетрудно убедиться, что вспомогательный образующий z ничему не мешает.

Если же комплексы K_ε допускают общее конечное накрытие, то группы H_ε обязаны обладать изоморфными подгруппами о д и н а к о в о г о конечного индекса. Действительно, накрытие степени k комплекса K_ε имеет k вершин (поэтому изоморфными могут оказаться только накрытия одинаковой степени), и фундаментальная группа накрывающего комплекса изоморфна подгруппе индекса k в H_ε.

Теперь возьмём конкретную группу H и элемент $h \in H$:

$$H = \mathrm{BS}(1,2) = \left\langle c, d \,\middle|\, c^d = c^2 \right\rangle \simeq \left\langle c, d, x, y \,\middle|\, d^{-1}c = x,\ xd = y = c^2 \right\rangle \quad \text{и} \quad h = c.$$

Для завершения доказательства основной теоремы осталось доказать следующий факт.

Лемма о слабой несоизмеримости. *Группы $H_\varepsilon = \left\langle a, c, d \,\middle|\, a^c = a^\varepsilon, c^d = c^2 \right\rangle$, где $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, не содержат изоморфных подгрупп одинакового конечного индекса (то есть если $U_{+1} \subseteq H_{+1}$ и $U_{-1} \subseteq H_{-1}$ — подгруппы одинакового конечного индекса, то $U_{+1} \not\simeq U_{-1}$).*

Доказательство. Пусть $U \subseteq H_\varepsilon$ — подгруппа конечного индекса. Заметим, что её пересечение с нормальным замыканием $C \overset{\text{опр}}{=} \langle\langle c \rangle\rangle$ элемента $c \in H_\varepsilon$ обладает следующими свойствами:

1) индекс $|C : C \cap U|$ нечётный;
2) подгруппа $C \cap U$ нормальна в H_ε;

3) $C\cap U=\left\langle\left\{u\in U\ \middle|\ \exists\, k\in\mathbb{N}\,\exists\, u'\in U\ u^{u'}=u^{2^k}\right\}\right\rangle$.

Действительно, Пусть $\widehat{U}\subseteq U$ — нормальная в H_ε подгруппа конечного индекса (которая всегда существует, как известно). Выберем m так, что $c^m\in\widehat{U}$ (для обоих $\varepsilon=\pm1$, это можно сделать в силу конечности индексов $|H_\varepsilon:\widehat{U}|$). Число m можно считать нечётным (поскольку c и c^2 сопряжены). Пусть φ — естественный гомоморфизм

$$H_\varepsilon\xrightarrow{\varphi}\widetilde{H}_\varepsilon\overset{\text{опр}}{=}H_\varepsilon/\langle\langle c^m\rangle\rangle=\begin{cases}(\langle d\rangle_\infty*\langle a\rangle_2)\leftthreetimes\langle\widetilde{c}\rangle_m & \text{при } \varepsilon=-1\\ F(d,a)\leftthreetimes\langle\widetilde{c}\rangle_m & \text{при } \varepsilon=+1\end{cases}\ \left(\begin{matrix}\text{где действия в полупрямых произведениях}\\ \text{такие: } \widetilde{c}^a=\widetilde{c},\ \widetilde{c}^d=\widetilde{c}^2\end{matrix}\right).$$

1) $|C:C\cap U|=|\varphi(C):\varphi(C\cap U)|$, а $\varphi(C)=\langle\widetilde{c}\rangle_m$ — подгруппа нечётного порядка m, поэтому индекс нечётный.
2) Нормальность подгруппы $C\cap U$ вытекает из нормальности её образа $\varphi(C\cap U)$, которая очевидна, поскольку $\varphi(C)=\langle\widetilde{c}\rangle_m$ — нормальная циклическая подгруппа.
3) То, что $C\cap U\supseteq X\overset{\text{опр}}{=}\left\langle\left\{u\in U\ \middle|\ \exists\, k\in\mathbb{N}\,\exists\, u'\in U\ u^{u'}=u^{2^k}\right\}\right\rangle$, очевидно ($U\supseteq X$ по определению подгруппы X; а включение $C\supseteq X$ вытекает из того, что в H_ε/C нет неединичных элементов, сопряжённых своим чётным степеням, смотрите (∗) ниже). Для доказательства обратного включения заметим, что $\ker\varphi=\langle\langle c^m\rangle\rangle$ содержится в $C\cap U\cap X$ (действительно, $\langle\langle c^m\rangle\rangle\subseteq X$, поскольку выбрав $q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ так, что $d^q\in U$ мы получим $(c^m)^{d^q}=(c^m)^{2^q}$, так что $c^m\in X$ по определению подгруппы X; сопряжённые к c^m содержатся в X по аналогичным причинам). Поэтому достаточно показать, что $\varphi(C\cap U)\subseteq\varphi(X)$; а это почти очевидно: $\varphi(C)=\langle\widetilde{c}\rangle$ и, если $\varphi(C)\ni\widetilde{c}^k\in\varphi(U)$, то $c^k\in U\cdot\ker\varphi=U$, то есть $c^k\in X$ и $\widetilde{c}^k\in\varphi(X)$.

Продолжим доказательство леммы. Пусть U_{+1} и U_{-1} — изоморфные подгруппы конечного индекса i групп H_{+1} и H_{-1}. Тогда $\widetilde{U}_\varepsilon\overset{\text{опр}}{=}U_\varepsilon/(U_\varepsilon\cap C)$ окажутся изоморфными (в силу свойства 3)) подгруппами групп

$$H_\varepsilon/C=\begin{cases}\langle d\rangle_\infty*\langle a\rangle_2 & \text{при } \varepsilon=-1\\ F(d,a) & \text{при } \varepsilon=+1\end{cases}.\tag{∗}$$

А индексы этих подгрупп (в $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2$ и F_2) будут $i/|C:(U_\varepsilon\cap C)|$. Действительно,

$$i=|H_\varepsilon:U_\varepsilon|=|H_\varepsilon:U_\varepsilon C|\cdot|U_\varepsilon C:U_\varepsilon|=|H_\varepsilon/C:\widetilde{U}_\varepsilon|\cdot|C:(U_\varepsilon\cap C)|.$$

Значит, частное $|F_2:\widetilde{U}_{+1}|/|\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2:\widetilde{U}_{-1}|$ этих индексов имеет нечётный числитель и знаменатель в силу свойства 1). Но это невозможно, поскольку подгруппа $\widetilde{U}_{+1}\subseteq F_2$ свободна (по теореме Нильсена–Шрайера) и (по формуле Шрайера) $\mathrm{rk}(\widetilde{U}_{+1})-1=|F_2:\widetilde{U}_{+1}|$, а, если $\widetilde{U}_{-1}$ свободна, то $\mathrm{rk}(\widetilde{U}_{-1})-1=\frac{1}{2}|(\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2):\widetilde{U}_{-1}|$ в силу следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть U — свободная подгруппа конечного индекса в группе $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2$. Тогда (её индекс чётный и) $\mathrm{rk}(U)-1=\frac{1}{2}|(\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2):U|$.*

Доказательство. Ядро F естественного отображения $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2$ имеет индекс два и ранг два (оно свободно порождается элементами x и x^y, где $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2=\langle x\rangle_\infty*\langle y\rangle_2$. Тогда

$$\begin{aligned}&|(\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2):U|\cdot\frac{\mathrm{rk}(U\cap F)-1}{\mathrm{rk}(U)-1}\overset{(Ш)}{=}\\ &\overset{(Ш)}{=}|(\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2):U|\cdot|U:(U\cap F)|=|(\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2):(U\cap F)|=|(\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2):F|\cdot|F:(U\cap F)|=2\cdot|F:(U\cap F)|\overset{(Ш)}{=}\\ &\overset{(Ш)}{=}2\cdot\big(\mathrm{rk}(U\cap F)-1\big)\quad(\text{где равенства }\overset{(Ш)}{=}\text{ — это формула Шрайера}).\end{aligned}$$

Сокращая на $\mathrm{rk}(U\cap F)-1$, мы получаем то, что требуется. Это завершает доказательство леммы 1*), леммы о слабой несоизмеримости (поскольку индексы $|F_2:\widetilde{U}_{+1}|$ и $|(\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_2):\widetilde{U}_{-1}|$ должны отличаться в нечётное число раз, как было замечено выше) и основной теоремы в следующей формулировке.

Основная теорема. *Стандартные комплексы копредставлений*

$$H_\varepsilon=\left\langle a,c,d,z,x,y\ \middle|\ ac=z=ca^\varepsilon,\ d^{-1}c=x,\ xd=y=c^2\right\rangle,\quad\text{где } \varepsilon\in\{\pm1\},$$

содержащие по пять треугольных двумерных клеток (и по шесть рёбер, и по одной вершине) имеют общее накрытие, но не имеют общего конечного накрытия.

---

*) Лемма 1 — это, конечно, частный случай общего факта: для каждой почти свободной группы корректно определено рациональное число, называемое *виртуальным рангом* [KZ24]; причём эти виртуальные ранги подчиняются формуле Шрайера.

3. Доказательство утверждения 1

Минимальный подкомплекс двумерного комплекса K, содержащий все его двумерные клетки, мы называем *двумерной частью* K_2 комплекса K. Тогда $K = K_2 \cup K_1$, где K_1 (*одномерная часть*) — некоторый одномерный подкомплекс в K такой, что $K_2 \cap K_1$ — нульмерный комплекс.

Лемма о почти свободе. *Если двумерный псевдосимплициальный комплекс P содержит не более двух двумерных клеток, то либо его фундаментальная группа $\pi_1(P)$ почти свободна, либо его двумерная часть P_2 содержит единственную вершину и гомеоморфна тору или бутылке Клейна.*

Доказательство. Поскольку стягивание ребра, соединяющего две разные вершины, не меняет фундаментальную группу, мы получаем, что фундаментальная группа нашего комплекса задаётся копредставлением с не более, чем двумя соотношениями, длины которых не превосходят трёх. Далее простой перебор.

- Если есть буква, входящая один раз в одно из этих соотношений и не входящая в другое, то применяя очевидное преобразование Тице, мы убеждаемся, что группа задаётся копредставлением с одним соотношением длины, не превосходящей трёх. Такая группа, очевидно, почти свободна (раскладываются в свободное произведение свободной группы и конечной группы порядка, не превосходящего трёх).
- Если есть буква a, входящая несколько раз (два или три) в одно из этих соотношений и не входящая в другое, то либо мы имеем дело со случаем, рассмотренным выше, либо копредставление имеет вид $G = \langle a, b, c, \ldots \mid a^{\pm 2} b^{\pm 1} = 1,\ b^{\pm 1} c^{\pm 2} = 1 \rangle = \mathrm{BS}(1, -1) * F(d, e, \ldots)$ или $G = \langle a, b, c, \ldots \mid a^{\alpha} = 1,\ b^{\beta} = 1 \rangle$, где $\alpha, \beta \in \{\pm 2, \pm 3\}$. Все эти группы почти свободны.
- Значит, осталось рассмотреть случай, когда каждая буква входит в оба соотношения (или не входит ни в одно). Это следующие копредставления (с точностью до очевидных замен): $\left\langle a, b, c, \ldots \,\middle|\, a^{\alpha} = 1,\ a^{\alpha'} = 1 \right\rangle$, $\left\langle a, b, c, \ldots \,\middle|\, a^{\alpha} b^{\beta} = 1,\ a^{\alpha'} b^{\beta'} = 1 \right\rangle$ (где $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \{\pm 1, \pm 2\}$) и $\langle a, b, c, \ldots \mid a^{\pm 1} b^{\pm 1} c^{\pm 1} = 1,\ a^{\pm 1} b^{\pm 1} c^{\pm 1} = 1 \rangle$. Все эти группы почти свободны, кроме последнего случая, где опять возникают свободные произведения свободных групп и $\mathrm{BS}(1, \pm 1)$.

Это завершает доказательство леммы.

Теорема Брайдсона–Шеперда (сравните с [BrS22], следствие 3.6). *Если два конечных симплициальных комплекса имеют общее накрытие, и фундаментальная группа одного из них почти свободна, то эти два комплекса имеют общее конечное накрытие.*

В оригинале требуется, чтобы фундаментальные группы о б о и х комплексов (а не одного из них) были с в о б о д н ы (а не почти свободны). Но разницы никакой нет:

- если у двух комплексов есть общее накрытие, то их универсальные накрытия изоморфны и, стало быть, можно заменить исходные комплексы на их конечные накрытия, и условия теоремы останутся выполненными; а комплекс с почти свободной фундаментальной группой, имеет, разумеется, конечное накрытие со свободной фундаментальной группой;
- если фундаментальная группа одного из комплексов (почти) свободна, то общее универсальное накрытие этих комплексов является квазидеревом; стало быть, фундаментальная группа второго комплекса действует свободно на этом квазидереве, а значит, эта группа является почти свободной в силу следующего факта:

> *конечно порождённая группа, действующая свободно на локально конечном графе, являющимся квазидеревом, почти свободна* ([Bu21], следствие 5.8).

Как заметил Мартин Брайдсон, более коротко объяснить эквивалентность «теоремы Брайдсона–Шеперда», приведённой выше, и её оригинальной формулировке из [BrS22] можно так: фундаментальные группы конечных комплексов квази-изометричны универсальным накрытиям этих комплексов (точнее, их одномерным остовам с комбинаторной метрикой); а почти свободность — это свойство, инвариантное относительно квази-изометрий.

Лемма о склейке. *Пусть K' и K'' — подкомплексы конечного комплекса $K = K' \cup K''$, а L' и L'' — подкомплексы конечного комплекса $L = L' \cup L''$, причём*

1) *$K' \cap K''$ — это одна вершина v, а $L' \cap L''$ — это конечное число вершин $w_1, \ldots, w_q$;*
2) *комплексы K' и L' имеют общее конечное накрытие $K' \xleftarrow{\varkappa'} M' \xrightarrow{\lambda'} L'$, согласованное на пересечении: $(\varkappa')^{-1}(K' \cap K'') = (\lambda')^{-1}(L' \cap L'')$;*
3) *комплексы K'' и L'' имеют общее конечное накрытие $K'' \xleftarrow{\varkappa''} M'' \xrightarrow{\lambda''} L''$, согласованное на пересечении: $(\varkappa'')^{-1}(K' \cap K'') = (\lambda'')^{-1}(L' \cap L'')$.*

Тогда комплексы K и L имеют общее конечное накрытие.

Доказательство. Пусть накрытия $\varkappa'$ имеет степень k' а накрытие $\varkappa''$ имеет степень k''. Тогда степени накрытий λ' и λ'' равны k'/q и k''/q, соответственно, из-за согласованности.

Возьмём несвязное объединения $M'_1 \sqcup \ldots \sqcup M'_{k''} \sqcup M''_1 \sqcup \ldots \sqcup M''_{k'}$ (где M'_i и M''_j — копии комплексов M' и M'') и для каждого $j \in \{1, \ldots, q\}$ отождествим в них $k'k''/q$ прообразов вершины w_j, лежащих в M'_i, с $k'k''/q$ прообразами вершины w_j, лежащими в M''_i. Возьмём связную компоненту X получившегося конечного комплекса и очевидные накрытия $K \leftarrow X \to L$. Это завершает доказательство леммы.

Цветная теорема Лейтона [Neu10] (частный случай*⁾). *Если два конечных графа A и B, вершины которых раскрашены в некоторые цвета, имеют общее накрытие C, причём отображения $A \leftarrow C \to B$ сохраняют цвета, то A и B имеют общее конечное накрытие, причём соответствующие отображения тоже сохраняют цвета.*

Приступим теперь к собственно доказательству утверждения 1. Пусть конечные псевдосимплициальные двумерные комплексы K и L имеют общее накрытие, причём K имеет не более двух двумерных клеток. Мы хотим найти конечное общее накрытие.

Теорема Брайдсона–Шеперда и лемма о почти свободе сводят ситуацию к случаю, когда двумерная часть K_2 комплекса K гомеоморфна тору или бутылке Клейна и содержит только одну вершину v.

Общее накрытие $K \leftarrow M \to L$ комплексов K и L даёт общее накрытие $K_2 \leftarrow M_2 \to L_2$ комплексов K_2 и L_2, а также общее накрытие $K_1 \leftarrow M_1 \to L_1$ комплексов K_1 и L_1. Это означает, что

2) у комплексов K_2 и L_2 есть общее конечное накрытие $K_2 \leftarrow P \to L_2$, причём L_2 тоже гомеоморфен тору или бутылке Клейна (и содержит вершины $w_1, \ldots, w_q$);
1) у комплексов K_1 и L_1 есть общее конечное накрытие $K_1 \leftarrow R \to L_1$, причём полный прообраз вершины v совпадает с полным прообразом множества $\{w_1, \ldots, w_q\}$.

Действительно,

2) универсальное накрытие тора или бутылки Клейна (то есть плоскость) обязано накрывать L_2, то есть L_2 тоже обязан быть гомеоморфен поверхности, причём эта поверхность может быть только тором или бутылкой Клейна (поскольку фундаментальные группы других поверхностей несоизмеримы с $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$);
1) прообразы вершин v и w_i в M (и в M_1) обязаны, очевидно, совпадать (так как это в точности $M_2 \cap M_1$); поэтому достаточно покрасить вершины v, w_i и все их прообразы в M_1 в красный цвет, а все остальные вершины графов K_1, L_1 и M_1 — в чёрный цвет, и воспользоваться цветной теоремой Лейтона.

Для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой о склейке (положив $K' = K_1$, $L' = L_1$, $K'' = K_2$ и $L'' = L_2$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[БП04] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, Комбинаторика симплициально клеточных комплексов и торические действия, Труды МИАН, 247 (2004), 41-58.

[BaK90] H. Bass, R. Kulkarni, Uniform tree lattices, J. Amer. Math. Soc., 3:4 (1990), 843-902.

[BrS22] M. Bridson, S. Shepherd, Leighton's theorem: extensions, limitations, and quasitrees, Algebraic and Geometric Topology, 22:2 (2022), 881-917. См. также arXiv:2009.04305..

[Bu21] J. O. Button, Groups acting on hyperbolic spaces with a locally finite orbit. arXiv: 2111.13427 (2021).

[DK23] N. S. Dergacheva, A. A. Klyachko, Small non-Leighton two-complexes, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 174:2 (2023), 385-391. См. также arXiv:2108.01398.

[KZ24] A. A. Klyachko, A. O. Zakharov, An analogue of the strengthened Hanna Neumann conjecture for virtually free groups and virtually free products, Michigan Mathematical Journal (в печати). См. также arXiv:2106.05821.

[JaW09] D. Janzen, D. T. Wise, A smallest irreducible lattice in the product of trees, Algebraic and Geometric Topology, 9:4 (2009), 2191-2201.

[Lei82] F. T. Leighton, Finite common coverings of graphs, J. Combin. Theory, Series B, 33:3 (1982), 231-238.

[Neu10] W. D. Neumann, On Leighton's graph covering theorem, Groups, Geometry, and Dynamics, 4:4 (2010), 863-872. См. также arXiv:0906.2496.

[SGW19] S. Shepherd, G. Gardam, D. J. Woodhouse, Two generalisations of Leighton's Theorem, arXiv:1908.00830.

[Wis96] D. T. Wise, Non-positively curved squared complexes: Aperiodic tilings and non-residually finite groups. PhD Thesis, Princeton University, 1996.

[Wis07] D. T. Wise, Complete square complexes, Commentarii Mathematici Helvetici, 82:4 (2007), 683-724.

[Woo21] D. Woodhouse, Revisiting Leighton's theorem with the Haar measure, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 170:3 (2021), 615-623. См. также arXiv:1806.08196.

*⁾ Общий случай состоит в том, что можно раскрашивать не только вершины, но и рёбра. В [Neu10] содержится доказательство этой теоремы, в также отмечено, что, во-первых, эта цветная теорема легко формально выводится из классической теоремы Лейтона, а во-вторых, рассуждения самого Лейтона [Lei82] фактически доказывают именно цветную теорему.