УДК 512.54.05+512.543.53+512.543.14+512.543.16+512.544.7+512.552 MSC: 20F05,20F10,20E22,20E26,20F50,16Z05

ФИНИТНО АППРОКСИМИРУЕМЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИ КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ИХ ПОДГРУППЫ И ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Антон А. Клячко Айрана К. Монгуш

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ
klyachko@mech.math.msu.su ayranamongush@gmail.com

Мы строим конечно порождённую бесконечную рекурсивно представленную финитно аппроксимируемую алгоритмически конечную группу G, отвечая тем самым на вопрос Мясникова и Осина. При этом группа G «сильно бесконечна» и «сильно алгоритмически конечна», в том смысле, что G содержит бесконечную абелеву нормальную подгруппу, а все конечные декартовы степени группы G алгоритмически конечны (то есть ни для какого n не существует алгоритма, выписывающего бесконечное число попарно различных элементов группы G^n). Мы формулируем также несколько открытых вопросов на эту тему.

0. Введение

В работе [MO11] был построен первый пример конечно порождённой рекурсивно представленной бесконечной группы, которая является *алгоритмически конечной*, в том смысле, что не существует алгоритма, выписывающего бесконечное количество попарно различных элементов этой группы. Группы, обладающие этими свойствами (то есть конечно порождённые рекурсивно представленные бесконечные и алгоритмически конечные), авторы [MO11] предлагают называть *монстрами Дэна*.

Монстры Дэна, построенные в [MO11], обладают ещё дополнительным свойством конечности-бесконечности — у них есть бесконечные финитно аппроксимируемые гомоморфные образы. В связи с этим в [MO11] был задан вопрос: *существуют ли финитно аппроксимируемые монстры Дэна?* Мы отвечаем на этот вопрос положительно,*) но задаём другой вопрос.

Вопрос 1. *Верно ли, что прямое произведение двух алгоритмически конечных групп алгоритмически конечно?*

Ответа мы не знаем (и предполагаем, что он отрицательный), но построенный в нашей работе финитно аппроксимируемый монстр обладает приятным свойством: все его конечные декартовы степени алгоритмически конечны. Ещё более интригующий, на наш взгляд, вопрос звучит так.

Вопрос 2. *Верно ли, что сплетение двух алгоритмически конечных групп алгоритмически конечно? Верно ли хотя бы, что прямое сплетение конечной группы (например, группы из двух элементов) и алгоритмически конечной группы алгоритмически конечно?*

По этому поводу мы ничего не можем сказать и не знаем даже ответа на «противоположный вопрос».

Вопрос 3. *Существует ли такой монстр Дэна D, что прямое сплетение $\mathbb{Z}_2 \wr D$ алгоритмически конечно?*

Отметим однако, что построенный в этой работе монстр в некотором смысле похож на такое сплетение — он является полупрямым произведением бесконечной элементарной абелевой нормальной подгруппы и некоторого другого монстра.

Основная теорема. *Существует бесконечная конечно порождённая рекурсивно представленная финитно аппроксимируемая группа G, все конечные декартовы степени которой алгоритмически конечны, то есть ни для какого n не существует алгоритма, выписывающего бесконечное число попарно различных элементов группы G^n.*
При этом группа G может быть выбрана содержащей в качестве нормальной подгруппы бесконечную прямую степень циклической группы $\mathbb{Z}_p$ (где p — произвольное фиксированное простое число), причём соответствующее расширение расщепляется: $G = H \leftthreetimes \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \langle a \rangle_p \right)$.

Сам по себе вопрос о возможных подгруппах монстров Дэна заслуживает отдельного внимания. Ясно, что все конечно порождённые подгруппы монстров сами являются алгоритмически конечными, в частности, все циклические подгруппы конечны и, следовательно, например, все разрешимые конечно порождённые подгруппы также конечны.

*) Когда эта работа была написана, мы обнаружили, что ответ на этот вопрос содержится также в статье [KhM14].

Вопрос 4. *Какие группы (или какие абелевы группы) могут быть вложены в алгоритмически конечные группы? Какие могут быть вложены в качестве нормальных подгрупп?*

Основную теорему мы выводим из следующего результата об алгебрах, который имеет самостоятельный интерес.

Теорема о сильно алгоритмически конечных алгебрах. *Над любым конечным полем существует бесконечная конечно порождённая рекурсивно представленная финитно аппроксимируемая ассоциативная алгебра A (с единицей), все конечные декартовы степени которой алгоритмически конечны, то есть ни для какого n не существует алгоритма, выписывающего бесконечное число попарно различных элементов алгебры A^n.*
При этом можно считать, что алгебра A порождается конечным множеством нильпотентных элементов.

Наш подход к построению монстров Дэна основан на идеях работы [MO11], то есть на использовании теоремы Голода–Шафаревича. Однако представленное здесь доказательство существования монстров Дэна проще чем в [MO11], несмотря на то, что нам приходится специально заботиться о том, чтобы построенный монстр обладал дополнительными свойствами (финитная аппроксимируемость, впрочем, получается сама собой при нашем подходе).

1. Признак бесконечномерности

Мы будем рассматривать свободную ассоциативную алгебру $F\langle X\rangle$ (с единицей) с конечным множеством свободных порождающих X над полем F. Эта алгебра состоит из многочленов от некоммутирующих переменных с коэффициентами из F. Под степенью $\deg u$ многочлена $u \in F\langle X\rangle$ мы будем всегда понимать минимальную из степеней мономов этого многочлена. Например, $\deg(xy - yx + xy^{2014}x) = 2$.

Следующий удобный признак бесконечномерности градуированной алгебры легко выводится из известного результата Голода–Шафаревича [ГШ64] и принадлежит, по-видимому, М.Ершову, см. [Er12], следствие 2.2.

Признак бесконечномерности. *Если в множестве R, состоящем из однородных элементов конечно порождённой свободной ассоциативной алгебры $F\langle X\rangle$ число элементов степени n равно r_n, причём $r_0 = r_1 = 0$ и ряд*

$$1 - |X|t + H_R(t) \overset{\text{опр}}{=} 1 - |X|t + \sum_{i=2}^{\infty} r_i t^i$$

сходится к отрицательному числу при некотором $t \in (0,1)$, то факторалгебра $A = F\langle X\rangle/(R)$ бесконечномерна.

Нам понадобится также следующий очевидный факт.

Лемма 1. *Если поле F и множество X конечны, то для любых натуральных n и d существует лишь конечное наборов $(u_{11},\dots,u_{n1}), (u_{12},\dots,u_{n2}),\dots$ длины n элементов свободной ассоциативной алгебры $F\langle X\rangle$, обладающих тем свойством, что для любых различных i и l найдётся s такое, что $\deg(u_{si} - u_{sl}) < d$.*

Доказательство. Такое неравенство означает, что все наборы представляют различные элементы алгебры $\left(F\langle X\rangle/(X)^d\right)^n$, которая, очевидно, конечна. Здесь (X) — это идеал, порождённый всеми свободными порождающими и, таким образом, $(X)^d$ состоит из всех многочленов, степень которых не меньше d.

2. Построение алгебры A

Зафиксируем натуральное число α и рекурсивную всюду определённую функцию $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (по поводу конкретного выбора α и f смотрите следующий параграф) и зафиксируем также рекурсивную нумерацию $P_1, P_2, \dots$ всех программ без входа с выходным алфавитом, состоящим из элементов некоторого конечного поля F, некоторого конечного множества X, содержащего не меньше двух элементов, и трёх дополнительных символов: «+» (плюс), «,» (запятая) и «;» (точка с запятой). Выходную последовательность каждой такой программы мы будем интерпретировать как последовательность наборов элементов свободной ассоциативной алгебры $F\langle X\rangle$: элементы каждого набора разделены запятыми, а различные наборы отделяются друг от друга точками с запятой; последовательно написанные символы из $F \sqcup X$ мы интерпретируем как их произведение, лишние плюсы и запятые мы игнорируем. Например, при $F = \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ и $X = \{x,y\}$, последовательность

$$++xy2y+,,,,221++1+++++0xy1yyy++,,;;,;xxx2112+++yxyxy22+++$$

мы понимаем как четыре набора (два из которых пустые, а один незаконченный):

$$(2xy^2, 2);\ ();\ ();\ (x^3 + yxyxy + \dots$$

Мы будем строить алгебру A в виде $A = F\langle X\rangle/(R)$. Алгоритм построения определяющих R соотношений выглядит просто.

Основной алгоритм. Сперва множество определяющих соотношений R состоит из одночленов x^α для всех $x \in X$. Далее на шаге k запускаем программу $N(k)$ (параллельно со всем, что уже работает) и переходим к шагу $k+1$.

Программа $N(k)$ (то есть программа N, получившая на вход натуральное число k) делает следующие действия.

Программа $N(k)$:

1. Запускает программу P_k (параллельно со всем, что уже работает).
2. Следит за работой программы P_k: как только программа P_k напишет точку с запятой, N делает следующее:
   а) приостанавливает работу программы P_k;
   б) проверяет, что все наборы элементов алгебры $F\langle X\rangle$, которые программа P_k выдала до сих пор, имеют одинаковую длину n, то есть на выходе программы P_k имеется последовательность вида:
   $$u_{11},\ldots,u_{n1};u_{12},\ldots,u_{n2};\ldots;u_{1l},\ldots,u_{nl};\quad \text{для некоторых } u_{ij}\in F\langle X\rangle \text{ и некоторого } n\in\mathbb{N};$$
   если это не так, то программа N выключает программу P_k и завершает свою работу;
   в) проверяет, существует ли $i<l$ такое, что $\deg(u_{si}-u_{sl})\geqslant f(n,k)$ для всех s; если нет, то программа N велит программе P_k продолжить работу и продолжает за ней следить; если же такое $i<l$ нашлось, то N переходит к следующему шагу;
   г) добавляет все однородные компоненты соответствующих разностей $u_{si}-u_{sl}$ (для всех $s\in\{1,\ldots,n\}$) в множество соотношений R, выключает программу P_k и завершает свою работу.

Отметим, что в каждый момент времени у нас параллельно работает некоторое конечное число программ P_i (не более k на k-м шаге основного алгоритма) и столько же копий программы N (каждая копия следит за одной программой P_i). При этом каждая копия программы N

- либо работает вечно и ничего не добавляет в множество соотношений R,
- либо завершает свою работу на шаге 2б) и, в этом случае, также ничего не добавляет в множество соотношений R,
- либо завершает свою работу на шаге 2г) и, в этом случае, добавляет в R некоторое конечное множество однородных соотношений $w_1,w_2,\ldots$ большой степени: $\deg w_i\geqslant f(n,k)$ (где k — номер этой копии программы N); при этом число добавленных соотношений каждой конкретной степени не превосходит n. Более точно, имеет место неравенство:
$$r_i(k)\leqslant\begin{cases}0, & \text{если } i<f(n(k),k);\\ n(k), & \text{если } i\geqslant f(n(k),k);\end{cases}$$
где $r_i(k)$ — это число соотношений степени i, которые k-я копия программы N добавляет в R, а $n(k)$ — это длина наборов, которые выписывает программа P_k (если P_k выписывает наборы разных длин или пишет что-то неправильное, или вообще ничего не пишет, то мы считаем $n(k)=\infty$).

3. Бесконечномерность алгебры A

Чтобы воспользоваться признаком бесконечномерности, надо оценить сумму ряда Голода–Шафаревича.
$$H_R(t)\overset{\text{опр}}{=}\sum_{i=2}^{\infty}r_it^i=|X|t^\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=2}^{\infty}r_i(k)t^i\right)\leqslant|X|t^\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=f(n(k),k)}^{\infty}n(k)t^i\right)=$$
$$=|X|t^\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}\left(t^{f(n(k),k)}n(k)\frac{1}{1-t}\right)=|X|t^\alpha+\frac{1}{1-t}\sum_{k=1}^{\infty}\left(t^{f(n(k),k)}n(k)\right).$$
Полагая $t=\frac{1}{2}$ и учитывая, что $x<2^x$ при $x\in\mathbb{N}$, получаем
$$H_R\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{|X|}{2^\alpha}+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{n(k)}{2^{f(n(k),k)}}\right)<\frac{1}{2^{\alpha-|X|}}+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{f(n(k),k)-n(k)}}\right).$$
Положим теперь $f(n,k)=n+k+2$ и $\alpha=|X|+1$ и получим
$$H_R\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4\cdot 2^k}\right)=1,\quad\text{то есть}\quad 1-\frac{1}{2}|X|+H_R\left(\frac{1}{2}\right)<0\quad\text{при } |X|\geqslant 4$$
и по признаку из параграфа 1 градуированная алгебра $A=F\langle X\rangle/(R)$ бесконечномерна. Разумеется, эта алгебра финитно аппроксимируема, так как всякая конечно порождённая градуированная алгебра над конечным полем аппроксимируется своими конечными факторалгебрами $A/(X)^n$.

4. Алгоритмическая конечность декартовых степеней алгебры A

Допустим, что существует программа P, выписывающая бесконечное число попарно различных элементов алгебры A^n. Разумеется, можно считать, что программа P имеет выходной алфавит $X \sqcup F \sqcup \{«+», «,», «;»\}$ и выписывает попарно различные элементы алгебры A^n в принятом у нас формате:

$$u_{11}, \ldots, u_{n1}; u_{12}, \ldots, u_{n2}; \ldots, \quad \text{где } u_{ij} \in F(X)$$

(всякая программа может быть преобразована к такому виду).

Программа P получит при нашей нумерации программ некоторый номер k, то есть $P = P_k$. Тогда на k-м шаге нашего основного алгоритма будет запущена программа $N(k)$ (параллельно с другими работающими программами), которая, в свою очередь, запустит программу $P_k = P$ и будет за ней следить. Возможно два варианта.

Случай I: $\deg(u_{si} - u_{sl}) \geqslant f(n,k)$ для некоторых различных i и l и всех s. Будем считать, что $i < l$ и l минимальное возможное с этими свойствами. Тогда после написания l-й точки с запятой программа $P = P_k$ будет приостановлена на шаге 2а) работы программы-надсмотрщика $N(k)$. Далее, на шаге 2б) и 2в) проверки завершатся успешно, а на шаге 2г) в множество определяющих соотношений R будут добавлены все однородные компоненты разностей $u_{si} - u_{sl}$ (для всех $s \in \{1, \ldots, n\}$). Это означает, что наборы $(u_{1i}, \ldots, u_{ni})$ и $(u_{1l}, \ldots, u_{nl})$, выписанные программой P, представляют один и тот же элемент алгебры A^n, противоречие.

Случай II: для любых различных i и l найдётся s такое, что $\deg(u_{si} - u_{sl}) < f(n,k)$. Этого не может быть по лемме 1.

Теорема о сильно алгоритмически конечных алгебрах доказана.

5. Доказательство основной теоремы

Возьмём алгебру A над полем вычетов $\mathbb{Z}_p$ с конечным множеством порождающих X, существование которой утверждается в теореме о сильно алгоритмически конечных алгебрах, и рассмотрим множество матриц

$$G = \begin{pmatrix} H & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где H — подгруппа мультипликативной группы алгебры A, порождённая элементами вида $1 + x$, где $x \in X$ (эти элементы обратимы, так как элементы множества X нильпотентны). Ясно, что G — это группа:

$$\begin{pmatrix} h & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hh' & a + ha' \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причём G является полупрямым произведением

$$\text{нормальной подгруппы } \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_p \quad \text{и ненормальной подгруппы } \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq H.$$

Группа G конечно порождена (($|X| + 1$)-порождена), она порождается матрицами $\begin{pmatrix} 1+X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, так как элементы $1 + X$ очевидным образом порождают алгебру A как кольцо. Все декартовы степени G^n алгоритмически конечны, так как все декартовы степени алгебры A алгоритмически конечны. Понятно также, что рекурсивная представленность группы G вытекает из рекурсивной представленности алгебры A. Финитная аппроксимируемость группы G также немедленно вытекает из финитной аппроксимируемости алгебры A, так как группа обратимых матриц (и алгебра всех матриц) над финитно аппроксимируемой алгеброй финитно аппроксимируема.

Основная теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[ГШ64] Е. С. Голод, И. Р. Шафаревич. О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. матем., 28:2 (1964), 261–272.

[Er12] M. Ershov. Golod–Shafarevich groups: a survey // Int. J. Algebra Comput. 22:5 (2012), 1230001, 68 pp. See also arXiv:1206.0490.

[KhM14] B. Khoussainov, A. Miasnikov Finitely presented expansions of groups, semigroups, and algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 366 (2014), 1455-1474

[MO11] A. Myasnikov, D. Osin. Algorithmically finite groups // J. Pure Appl. Algebra 215:11 (2011), 2789–2796. See also arXiv:1012.1653.