УДК 512.544.43+512.743+512.554.37 MSC: 20G35,20F28,20F40,17B20,17B40

АВТОМОРФИЗМЫ И ИЗОМОРФИЗМЫ ГРУПП И АЛГЕБР ШЕВАЛЛЕ

Антон А. Клячко
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ
klyachko@mech.math.msu.su

Посвящается Ребекке

Присоединённая группа Шевалле ранга большего единицы над $\mathbb{Q}$-алгеброй (или похожим кольцом), её элементарная подгруппа и соответствующее кольцо Ли имеют одинаковые группы автоморфизмов. Эти автоморфизмы явно описаны.

0. Введение

Пусть Φ — приведённая неприводимая система корней, R — ассоциативная коммутативное кольцо с единицей, $G(\Phi, R)$ — соответствующего присоединённая группа Шевалле и $E(\Phi, R)$ — её элементарная подгруппа (смотрите раздел 5).

Имеется много результатов (смотрите, например, [Wat80], [Pet82], [GMi83], [HO'M89], [Abe93], [Che00], [Bun07] и литературу, там цитируемую*)), утверждающих, что при некоторых условиях все автоморфизмы групп Шевалле (или похожих групп) стандартны в том или ином смысле (зависящем того, что автору удалось доказать). В этой статье мы используем наиболее универсальное и естественное определение стандартности, предложенное А. Е. Залесским [Zal83]: автоморфизм присоединённой группы Шевалле называется *стандартным*, если он индуцирован автоморфизмом соответствующей алгебры Ли. Более точно, это означает следующее. Группы $E(\Phi, R)$ и $G(\Phi, R)$ вкладываются естественным образом в группу автоморфизмов соответствующей алгебры Ли $L(\Phi, R)$ над R. Немного менее очевидно, что (при некоторых условиях, смотрите раздел 5) обе группы нормальны в $\operatorname{Aut}_R L(\Phi, R)$ и даже в большей группе $\operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} L(\Phi, R) = \operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} R \leftthreetimes \operatorname{Aut}_R L(\Phi, R)$, состоящей из автоморфизмов этой алгебры, рассматриваемой как кольцо Ли. Таким образом, каждый автоморфизм $f \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} L(\Phi, R)$ кольца Ли индуцирует автоморфизм $f' \colon g \mapsto fgf^{-1}$ групп Шевалле $G(\Phi, R)$ и $E(\Phi, R)$. Основными результатами этой статьи являются следующие теоремы.

Теорема об автоморфизмах. *Для любой приведённой неприводимой системы корней Φ ранга $\geqslant 2$ существует такое целое число m, что для любого ассоциативного коммутативного кольца R без аддитивного кручения, с единицей и $\frac{1}{m}$ все автоморфизмы группы Шевалле $G(\Phi, R)$ и её элементарной подгруппы $E(\Phi, R)$ стандартны; группы $\operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} L(\Phi, R)$, $\operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} R \leftthreetimes \operatorname{Aut}_R L(\Phi, R)$, $\operatorname{Aut} G(\Phi, R)$ и $\operatorname{Aut} E(\Phi, R)$ изоморфны; отображение $\operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} L(\Phi, R) \ni f \mapsto f' \in \operatorname{Aut} G(\Phi, R)$ является изоморфизмом; аналогичное отображение $\operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} L(\Phi, R) \to \operatorname{Aut} E(\Phi, R)$ также является изоморфизмом.*

Теорема об изоморфизмах. *Для любой приведённой неприводимой системы корней Φ ранга $\geqslant 2$ существует такое целое число m, что для любых ассоциативных коммутативных колец R и R' без аддитивного кручения, с единицей и $\frac{1}{m}$ имеются естественные взаимно однозначные соответствия между следующими тремя множествами:*

$$\{\textit{групповые изоморфизмы } G(\Phi, R) \to G(\Phi, R')\}, \quad \{\textit{групповые изоморфизмы } E(\Phi, R) \to E(\Phi, R')\}$$
$$\textit{и} \quad \{\textit{изоморфизмы колец Ли } L(\Phi, R) \to L(\Phi, R')\},$$

то есть каждый групповой изоморфизм $G(\Phi, R) \to G(\Phi, R')$ отображает $E(\Phi, R)$ на $E(\Phi, R')$; каждый групповой изоморфизм $E(\Phi, R) \to E(\Phi, R')$ продолжается единственным образом до изоморфизма $G(\Phi, R) \to G(\Phi, R')$; каждый кольцевой изоморфизм $f \colon L(\Phi, R) \to L(\Phi, R')$ индуцирует групповой изоморфизм $\operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} L(\Phi, R) \supseteq G(\Phi, R) \to G(\Phi, R') \subseteq \operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} L(\Phi, R')$ по формуле $\varphi \mapsto f\varphi f^{-1}$; каждый групповой изоморфизм $G(\Phi, R) \to G(\Phi, R')$ индуцируется таким образом единственным кольцевым изоморфизмом.

Каждый кольцевой изоморфизм $f \colon L(\Phi, R) \to L(\Phi, R')$ является полулинейным, то есть $f(rx) = \alpha(r) f(x)$ для некоторого кольцевого изоморфизма $\alpha \colon R \to R'$, однозначно определённого отображением f.

В частности, эти теоремы позволяют описать автоморфизмы всех групп Шевалле ранга большего единицы над любыми коммутативными алгебрами над полем рациональных чисел. Похожие результаты были получены Ю Ченом [Che95], [Che96] (смотрите также [Che00]), но при дополнительном условии, что кольцо R является алгеброй над $\mathbb{Q}$ без делителей нуля.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №05-01-00895.

*) К сожалению, некоторые интересные работы по этой теме (например, [Abe93]) содержат ошибки.

Идея описания автоморфизмов линейных групп путём перехода к соответствующим алгебрам Ли была впервые предложена и применена В. М. Левчуком [Lev83] и Е. И. Зельмановым [Zel85]. Мы используем ту же самую общую идею, но в остальном наш подход сильно отличается.

Наши теоремы сводят задачу нахождения автоморфизмов/изоморфизмов групп Шевалле к более лёгкой аналогичной задаче об алгебрах Шевалле. Автоморфизмы алгебр Шевалле явно описаны в разделе 7. Каждый автоморфизм алгебры $L(\Phi, R)$ является композицией внутреннего автоморфизма (то есть сопряжения элементом группы $G(\Phi, R)$) и автоморфизмов, индуцированных симметриями соответствующей диаграммы Дынкина.

Наши доказательства совсем не содержат вычислений и используют лишь немногие свойства групп Шевалле. Таким образом, этот подход может работать в более общей ситуации. *Элементарной групповой схемой* E мы называем подгруппу группы $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z}[z_1, z_2, \dots])$, порождённую некоторыми матрицами $\{x_i(z_j) \ ; \ i \in I, \ j = 1, 2, \dots\}$. Для элементарной групповой схемы E символ $E(R)$ обозначает подгруппу группы $\mathbf{SL}_n(R)$, состоящую из всех матриц вида $a(r_1, r_2, \dots)$, где $a \in E$ и $r_j \in R$. Группу $E(R)$ мы называем n-мерной *R-группой*. Понятно, что группа $E(R)$ порождается матрицами $\{x_i(r) \ ; \ i \in I, \ r \in R\}$. Прежде всего нас будут интересовать R-группы $E(R)$, обладающие следующими свойствами:

(EX) *Экспоненциальность*: $x_i(z_1)x_i(z_2) = x_i(z_1 + z_2)$ для всех $i \in I$.

(AL) *Алгебраичность*: $E(R[t])$ является нормальной подгруппой некоторой линейной алгебраической группы $G \subseteq \mathbf{SL}_n(R[t])$ определённой полиномиальными уравнениями с целыми коэффициентами. Группа $E(R[t])$ является нормальным замыканием своей подгруппы $E(R)$.

(PC_S) *Сопряжённость степеней*: две матрицы x_i и x_i^s сопряжены в $E(R)$ для каждого $i \in I$ и каждого $s \in S$, где $S \subseteq \mathbb{Z}$ — некоторое множество целых чисел.

Пример. В разделе 5 мы покажем, что при выполнении условий основных теорем присоединённая элементарная группа Шевалле $E(\Phi, R)$ обладает свойствами (EX), (AL) и (PC_S), где $S = \mathbb{Z} \cap \{a^2 \ ; \ a \in R^*\}$.

Автор очень признателен Н. А. Вавилову за множество ценных замечаний. Автор благодарит также В. М. Левчука, А. В. Михалёва, В. А. Петрова и Д. А. Тимашёва за прочтение этой статьи и полезные обсуждения.

1. Теорема о нулях

Напомним, что идеал называется *радикальным*, если соответствующее факторкольцо не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Нам понадобится следующая формулировка теоремы Гильберта о нулях.

Теорема о нулях. *Пусть $g, f_1, \dots, f_l \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m]$ — некоторые многочлены и квазитождество*

$$\forall r_1, \dots, r_l \in R \quad f_1(r_1, \dots) = 0 \ \& \ \dots \ \& \ f_l(r_1, \dots) = 0 \implies g(r_1, \dots) = 0$$

выполняется для $R = \mathbb{C}$. Тогда существует натуральное число b такое, что квазитождество

$$\forall r_1, \dots, r_l \in R \quad f_1(r_1, \dots) = 0 \ \& \ \dots \ \& \ f_l(r_1, \dots) = 0 \implies (g(r_1, \dots))^b = 0$$

выполняется для любого ассоциативного коммутативного кольца R с единицей и без аддитивного кручения. Если идеал кольца $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m]$, порождённый многочленами $f_1, \dots, f_l$, является радикальным, то можно положить $b = 1$.

2. Унипотентность

Матрица A называется *унипотентной*, если $A - 1$ — нильпотентная матрица. Назовём автоморфизм R-группы $E(R)$ *унипотентным*, если он отображает все $x_i(r)$ в унипотентные матрицы. Будем говорить, что автоморфизм φ является *m-унипотентным*, если $(\varphi(x_i(r)) - 1)^m = 0$ для всех $i \in I$ и $r \in R$.

Утверждение 1. *Если ассоциативное коммутативное кольцо R с единицей не имеет аддитивного кручения, то для любых целых $n \geqslant 1$, $p \geqslant 2$ и $d \geqslant 1$ существуют такие натуральные числа q и m, что любой автоморфизм n-мерной R-группы со свойством ($\mathrm{PC}_{\{p,q^d\}}$) является m-унипотентным.*

Доказательство. Если R-группа обладает свойством ($\mathrm{PC}_{\{p,q^d\}}$), то для любого автоморфизма φ матрицы $\varphi(x_i(r))$, $\varphi(x_i(r))^p$ и $\varphi(x_i(r))^{q^d}$ сопряжены. Таким образом, утверждение 1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Для любых целых $n \geqslant 1$, $p \geqslant 2$ и $d \geqslant 1$ существуют такие натуральные числа q и m, что если характеристические многочлены матриц $A, A^p, A^{q^d} \in \mathbf{SL}_n(R)$ над ассоциативным коммутативным кольцом R с единицей и без аддитивного кручения совпадают, то $(A-1)^m = 0$.*

Доказательство. Предположим для начала, что $R = \mathbb{C}$. Тогда, три указанные матрицы имеют одинаковые наборы собственных значений и возведение в степень p является перестановкой этих собственных значений. Следовательно, для любого собственного значения λ

$$\lambda^{p^{n!}-1} = 1 \quad \text{и, по тем же причинам,} \quad \lambda^{q^{dn!}-1} = 1.$$

Ясно, что из этих равенств следует, что $\lambda = 1$, если взять, например, $q = p^{n!} - 1$ (в этом случае $p^{n!} - 1$ и $q^{dn!} - 1$ взаимно просты). Итак, утверждение доказано для $R = \mathbb{C}$.

Условие
$$\det A = 1 \text{ и характеристические многочлены матриц } A,\ A^p \text{ и } A^{q^d} \text{ совпадают} \tag{$*$}$$
является системой полиномиальных уравнений с целыми коэффициентами на элементы матрицы A. Каждый комплексный корень $B \in M_n(\mathbb{C})$ этой системы является унипотентной матрицей (если число q выбрано как выше). По теореме о нулях, это означает, что если матрица A над R удовлетворяет условию $(*)$, то каждый элемент c_{ij} матрицы $C = (A-1)^n$ удовлетворяет уравнению $c_{ij}^b = 0$ для некоторого целого b. Следовательно, $C^{bn^2} = (A-1)^{bn^3} = 0$. Лемма 1 и утверждение 1 доказаны.

3. Кривые

Рассмотрим некоторую R-группу $E(R)$ и назовём группу $E(R[t])$ *группой кривых на группе* $E(R)$.

Ясно, что для любой кривой $g(t) \in E(R[t])$ и любого многочлена $f(t) \in R[t]$ кривая $\mathrm{REP}_f(g) \overset{\text{опр}}{=} g(f(t))$ также принадлежит группе $E(R[t])$. Кривую $g(f(t))$ мы будем называть *репараметризацией кривой g с помощью многочлена f*. Отображение $\mathrm{REP}_f\colon E(R[t]) \to E(R[t])$ является эндоморфизмом группы кривых.

Стандартные вычисления
$$(1 + tX + t^2Y + o(t^2))^{-1} = 1 - (tX + t^2Y) + (tX + t^2Y)^2 + o(t^2) = 1 - tX + t^2(X^2 - Y) + o(t^2),$$
$$\begin{aligned}
&[(1 + tX_1 + t^2Y_1 + o(t^2)), (1 + tX_2 + t^2Y_2 + o(t^2))] = \\
&= (1 + tX_1 + t^2Y_1 + o(t^2))(1 + tX_2 + t^2Y_2 + o(t^2))(1 + tX_1 + t^2Y_1 + o(t^2))^{-1}(1 + tX_2 + t^2Y_2 + o(t^2))^{-1} = \\
&= 1 + t^2(Y_1 + Y_2 - Y_1 - Y_2 + X_1^2 + X_2^2 + X_1X_2 - X_1^2 - X_1X_2 - X_2X_1 - X_2^2 + X_1X_2) + o(t^2) = \\
&= 1 + t^2(X_1X_2 - X_2X_1) + o(t^2)
\end{aligned}$$
доказывают стандартную формулу:
$$[(1 + tX_1 + o(t)), (1 + tX_2 + o(t))] = \mathrm{REP}_{t^2}(1 + t[\![X_1, X_2]\!] + o(t)) + o(t^2), \tag{1}$$
где $[x, y] \overset{\text{опр}}{=} xyx^{-1}y^{-1}$ — групповой коммутатор и $[\![x, y]\!] \overset{\text{опр}}{=} xy - yx$ — кольцевой коммутатор.

4. Непрерывность и гладкость

Множество матриц $T(E(R)) = \{X \in M_n(R) \mid 1 + tX + t^2Y \in E(R[t]) \ \text{ для некоторого } Y \in M_n(R[t])\}$ назовём *касательным модулем* R-группы $E(R)$. Ясно, что это множество является $R[E(R)]$-модулем, то есть оно замкнуто относительно

- сложения: $(1 + tX + o(t))(1 + tY + o(t)) = 1 + t(X + Y) + o(t)$;
- умножения на скаляры: $\mathrm{REP}_{rt}(1 + tX + o(t)) = 1 + tXr + o(t)$;
- действия группы $E(R)$: $g(1 + tX + o(t))g^{-1} = (1 + tgXg^{-1} + o(t))$ (В дальнейшем, мы используем обозначение $g \circ X \overset{\text{опр}}{=} gXg^{-1}$).

Если касательный модуль является алгеброй Ли, то есть если он замкнут относительно кольцевого коммутатора $[\![A, B]\!] = AB - BA$, мы называем этот модуль *касательной алгеброй*. Назовём n-мерную R-группу $E(R)$ *присоединённой*, если $T(E(R))$ является алгеброй Ли, изоморфной как $R[E(R)]$-модуль модулю R^n (с естественным действием группы $E(R)$).

Автоморфизм φ группы $E(R)$ назовём *квазинепрерывным*, если он может быть продолжен до автоморфизма $\widetilde{\varphi}$ группы кривых, коммутирующего со всеми целочисленными репараметризациями: $\widetilde{\varphi}(\mathrm{REP}_f(g)) = \mathrm{REP}_f(\widetilde{\varphi}(g))$ для всех $g \in E(R[t])$ и всех $f \in \mathbb{Z}[t]$. Автоморфизм φ назовём *непрерывным*, если он является квазинепрерывным, автоморфизм $\widetilde{\varphi}$ квазинепрерывен, автоморфизм $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ квазинепрерывен и так далее (бесконечно много раз).

Положим $E_k(R) \overset{\text{опр}}{=} E(R[t]) \cap (1 + t^kM_n(R[t]))$. Так как $\ker \mathrm{REP}_0 = E_1(R)$, мы имеем равенство $\widetilde{\varphi}(E_1(R)) = E_1(R)$ для любого непрерывного автоморфизма φ. Непрерывный автоморфизм φ назовём *гладким* (дважды дифференцируемым), если $\widetilde{\varphi}(E_k(R)) = E_k(R)$ для $k = 1, 2, 3$. Заметим, что непрерывность [гладкость] автоморфизма влечёт непрерывность [гладкость] обратного автоморфизма. В разделе 5 мы покажем, что любой непрерывный автоморфизм группы Шевалле является гладким (при некоторых условиях).

Утверждение 2. *Каждый гладкий автоморфизм φ группы $E(R)$ индуцирует автоморфизм $d\varphi$ (дифференциал автоморфизма φ) касательного модуля, рассматриваемого как абелева группа. При этом*
$$\widetilde{\varphi}(1 + tX + o(t)) = 1 + td\varphi(X) + o(t) \quad \text{и} \quad d\varphi(g \circ X) = \varphi(g) \circ d\varphi(X) \quad \text{для всех } g \in E(R) \text{ и } X \in T(E(R));$$

если $T(E(R))$ является алгеброй Ли, то $d\varphi$ является автоморфизмом этой алгебры, рассматриваемой как кольцо Ли.

Доказательство. Если $X \in T(E(R))$, то $1+tX+t^2Y \in E(R[t])$ для некоторого $Y \in M_n(R[t])$ и $\widetilde{\varphi}(1+tX+t^2Y) = 1+tZ+o(t)$ для некоторого $Z \in M_n(R)$ (в силу инвариантности подгруппы $E_1(R)$). Положим $d\varphi(X) = Z$. Это определение корректно, поскольку автоморфизм $\widetilde{\varphi}$ оставляет инвариантной подгруппу $E_2(R)$. Биективность отображения $d\varphi$ следует из гладкости автоморфизма φ^{-1}. Равенства

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi}((1+tX+o(t))(1+tY+o(t))) & = & \widetilde{\varphi}(1+t(X+Y)+o(t)) = 1+td\varphi(X+Y)+o(t) \\ || & & \\ \widetilde{\varphi}(1+tX+o(t))\widetilde{\varphi}(1+tY+o(t)) & = & (1+td\varphi(X)+o(t))(1+td\varphi(Y)+o(t)) = 1+t(d\varphi(X)+d\varphi(Y))+o(t) \end{array}$$

показывают, что $d\varphi$ является эндоморфизмом аддитивной группы. Аналогичные рассуждения

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi}(g(1+tX+o(t))g^{-1}) & = & \widetilde{\varphi}(1+tgXg^{-1}+o(t)) = 1+td\varphi(gXg^{-1})+o(t) \\ || & & \\ \varphi(g)\widetilde{\varphi}(1+tX+o(t))\varphi(g)^{-1} & = & \varphi(g)(1+td\varphi(X)+o(t))\varphi(g)^{-1} = 1+t\varphi(g)d\varphi(X)\varphi(g)^{-1}+o(t) \end{array}$$

доказывают равенство $d\varphi(g \circ X) = \varphi(g) \circ d\varphi(X)$.

Автоморфизм $\widetilde{\varphi}$ коммутирует с целочисленными репараметризациями, оставляет инвариантной подгруппу $E_3(R)$ и, следовательно, отображает равенство (1) в

$$[\widetilde{\varphi}(1+tX_1+o(t)), \widetilde{\varphi}(1+tX_2+o(t))] = \mathrm{REP}_{t^2}\widetilde{\varphi}(1+t[\![X_1,X_2]\!]+o(t))+o(t^2).$$

Значит,

$$[(1+td\varphi(X_1)+o(t)), (1+td\varphi(X_2)+o(t))] = \mathrm{REP}_{t^2}(1+td\varphi([\![X_1,X_2]\!])+o(t))+o(t^2).$$

Применяя формулу (1) к левой части, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{REP}_{t^2}(1+t[\![d\varphi(X_1), d\varphi(X_2)]\!]+o(t))+o(t^2) &= [(1+td\varphi(X_1)+o(t)), (1+td\varphi(X_2)+o(t))] = \\ &= \mathrm{REP}_{t^2}(1+td\varphi([\![X_1,X_2]\!])+o(t))+o(t^2). \end{aligned}$$

Таким образом, $[\![d\varphi(X_1), d\varphi(X_2)]\!] = d\varphi([\![X_1,X_2]\!])$. Это показывает, что $d\varphi$ является эндоморфизмом касательной алгебры и завершает доказательство.

Если группа $E(R)$ присоединённая, то она вкладывается естественным образом в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}T(E(R))$ её касательной алгебры, рассматриваемой как кольцо Ли.

Утверждение 3. *Любой гладкий автоморфизм присоединённой R-группы $E(R)$ является стандартным, то есть имеет вид $\varphi(g) = \alpha g \alpha^{-1}$, где α — некоторый автоморфизм кольца Ли $T(E(R))$, нормализующий подгруппу $E(R)$.*

Доказательство. Это непосредственно вытекает из утверждения 2, мы можем взять $\alpha = d\varphi$.

Утверждение 4. *Пусть коммутативное ассоциативное кольцо R с единицей и $\frac{1}{q!}$ не имеет аддитивного кручения, R-группа $E(R)$ обладает свойствами (EX) и (AL), φ и φ^{-1} являются взаимно обратными q-унипотентными автоморфизмами группы $E(R)$. Тогда эти автоморфизмы непрерывны.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $a(t) \in E(R[t])$. Ясно, что $a(r) \in E(R)$ для любого $r \in R$. Докажем, что

матрица $\varphi(a(k))$ полиномиально зависит от числа $k \in \mathbb{Z}$,

то есть существует матрица $b_a(t) \in \mathbf{SL}_n(R[t])$ такая, что $\varphi(a(k)) = b_a(k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. (Отметим, что отсутствие аддитивного кручения влечёт единственность такой матрицы $b_a(t)$.)

Действительно, достаточно доказать этот факт для матрицы $a(t) = x_i(rt^l)$, поскольку эти матрицы порождают группу $E(R[t])$. Итак,

$$\varphi(x_i(rk^l)) = (\varphi(x_i(r)))^{k^l} \quad \text{по свойству (EX).}$$

Но матрица $(\varphi(x_i(r)))^m$ полиномиально зависит от m, так как матрица $\varphi(x_i(r))$ унипотентна:

$$(\varphi(x_i(r)))^m = (1+A)^m = 1 + mA + \frac{m(m-1)}{2}A^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{q!}A^q.$$

Таким образом, мы можем продолжить автоморфизм φ на группу $E(R[t])$, полагая $\widetilde{\varphi}(a(t)) \overset{\text{опр}}{=} b_a(t)$.

Докажем, что $\widetilde{\varphi}(a(t)) = b_a(t)$ принадлежит группе $E(R[t])$. Для каждого целого k матрица $b_a(k)$ принадлежит группе $E(R)$ и, следовательно, принадлежит группе G, определённой целочисленными полиномиальными уравнениями (смотрите свойство (AL)). Следовательно, матрица $b_a(t)$ удовлетворяет тем же уравнениями. Таким образом, $b_a(t) \in G$ и мы имеем

$$\begin{array}{ccc} E(R){=}\widetilde{\varphi}(E(R)) & \subseteq & E(R[t]) \\ \rotatebox{-90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-90}{$\subseteq$} \\ \widetilde{\varphi}(E(R[t])) & \subseteq & G \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccccc} E(R[t]) = \langle\!\langle E(R)\rangle\!\rangle_{E(R[t])} \subseteq & \langle\!\langle E(R)\rangle\!\rangle_G & \supseteq \langle\!\langle E(R)\rangle\!\rangle_{\widetilde{\varphi}(E(R[t]))} = \widetilde{\varphi}(E(R[t])) \\ & \| & \text{(по свойству (AL))} \\ & E(R[t]), & \end{array}$$

где $\langle\!\langle X\rangle\!\rangle_H$ обозначает нормальное замыкание множества X в группе H. Таким образом, $\widetilde{\varphi}(E(R[t])) \subseteq E(R[t])$.

Автоморфизм φ^{-1} также может быть продолжен на группу кривых и $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\varphi^{-1}})(a(k)) = (\widetilde{\varphi^{-1}})\widetilde{\varphi}(a(k)) = a(k)$ для любого $k \in \mathbb{Z}$ и любой матрицы $a(t) \in E(R[t])$. Отсюда следуют равенства $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\varphi^{-1}})(a(t)) = (\widetilde{\varphi^{-1}})\widetilde{\varphi}(a(t)) = a(t)$ (поскольку кольцо R не имеет аддитивного кручения) и биективность отображения $\widetilde{\varphi}$.

По построению автоморфизм $\widetilde{\varphi}$ коммутирует с целочисленными репараметризациями, то есть φ квазинепрерывен. Ясно, что автоморфизм $\widetilde{\varphi}$ также является q-унипотентным и, следовательно, квазинепрерывным. Таким образом, очевидная индукция завершает доказательство непрерывности автоморфизма φ.

5. Группы Шевалле

Пусть Φ — приведённая неприводимая система корней, $L(\Phi)$ — соответствующая простая комплексная алгебра Ли. Алгебра $L(\Phi)$ имеет такой базис (*базис Шевалле*) $h_1, h_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots$, что все структурные константы являются целыми и матрицы операторов $(\operatorname{ad} x_i)^k/k!$ целочисленны и нильпотентны для всех $k \in \mathbb{N}$. *Алгеброй Шевалле* $L(\Phi, R)$ называют алгебру Ли над кольцом R с такими же структурными константами.

Пусть $N(\Phi) = \operatorname{Aut}_{\mathbb{C}} L(\Phi)$ — группа автоморфизмов алгебры $L(\Phi)$ и $G(\Phi) = (\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}} L(\Phi))^\circ$ — связная компонента единицы этой группы. Алгебраические группы $G(\Phi) \subseteq N(\Phi) \subseteq \mathbf{GL}(L(\Phi)) \subset \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ определены над $\mathbb{Z}$. Пусть R — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей и $N(\Phi, R)$ и $G(\Phi, R)$ — группы R-рациональных точек групп $N(\Phi)$ и $G(\Phi)$, то есть подгруппы в $\mathbf{SL}_n(R)$ (где $n = 1{+}\dim L(\Phi)$), определённые теми же целочисленными полиномиальными уравнениями, что группы $N(\Phi)$ и $G(\Phi)$ соответственно (в базисе Шевалле). Отметим, что $N(\Phi, R) = \operatorname{Aut}_R L(\Phi, R)$, поскольку свойство быть автоморфизмом может быть записано системой целочисленных полиномиальными уравнений (зависящих от структурных констант). Группа $G(\Phi, R)$ называется (*присоединённой*) *группой Шевалле*. Группу $E(\Phi, R) \subseteq G(\Phi, R)$, порождённую матрицами $x_i(r) = \exp(\operatorname{ad} r x_i)$, где $r \in R$, называют *элементарной подгруппой* группы Шевалле $G(\Phi, R)$.

Пример. Для системы корней A_l мы имеем $L(A_l) = \mathbf{sl}_{l+1}(\mathbb{C})$ — алгебра Ли, состоящая из всех матриц с нулевым следом, $L(A_l, R) = \mathbf{sl}_{l+1}(R)$, $G(A_l, R) = \mathbf{PGL}_{l+1}(R)$ и $E(A_l, R) = \mathbf{PE}_{l+1}(R)$ — подгруппа группы $\mathbf{PGL}_{l+1}(R)$, порождённая образами трансвекций $1 + rE_{ij}$, где $i \neq j$ и $r \in R$. (Отметим, что для некоторых колец таким образом определённая группа $\mathbf{PGL}_{l+1}(R)$ может быть больше, чем факторгруппа полной линейной группы $\mathbf{GL}_{l+1}(R)$ по её центру.)

В следующей лемме мы собрали некоторые (вероятно) известные свойства групп и алгебр Шевалле.

Лемма 2. *Пусть Φ — приведённая неприводимая система корней ранга $\geqslant 2$ и R — ассоциативное коммутативное кольцо без аддитивного кручения, с единицей и $\frac{1}{6}$. Тогда*

(i) *группа $E(\Phi, R)$ является R-группой со свойствами* (EX) *и* (PC_S), *где $S = \mathbb{Z} \cap \{a^2 \,;\, a \in R^*\}$;*

(ii) *для каждой подгруппы H группы $G(\Phi, R)$, нормализуемой группой $E(\Phi, R)$, существует единственный идеал J кольца R такой, что H содержится в $G(\Phi, R) \cap (1 + M_n(J))$ и содержит нормальное замыкание $\langle\!\langle \{x_i(r) \,;\, r \in J\} \rangle\!\rangle_{E(\Phi,R)}$ множества $\{x_i(r) \,;\, r \in J\}$;*

(iii) *$E(\Phi, R)$ является автоморфно допустимой (то есть характеристической) подгруппой группы $G(\Phi, R)$;*

(iv) *$E(\Phi, R)$ обладает свойством* (AL)*;*

(v) $\operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} L(\Phi, R) \simeq \operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} R \leftthreetimes \operatorname{Aut}_R L(\Phi, R)$*;*

(vi) *в группе $\operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} L(\Phi, R)$ подгруппы $G(\Phi, R)$ и $E(\Phi, R)$ нормальны и их централизаторы тривиальны.*

Доказательство.

(i) Свойство (EX) вытекает прямо из определения. Соотношение Стейнберга R5, $h_i(s)x_i(r)h_i(s)^{-1} = x_i(s^2r)$ (смотрите, например, [VPl96]), где $r \in R$, $s \in R^*$ и $h_i(s) \in E(\Phi, R)$ суть некоторые специальные матрицы, доказывает свойство (PC_S).

(ii) Принимая во внимание тривиальность центра группы $G(\Phi, R)$ в присоединённом случае [AHu88], мы видим, что (ii) является слегка ослабленной формулировкой известной теоремы об описании подгрупп группы Шевалле, нормализуемых элементарной подгруппой, [Vas86] (смотрите также [ASu76], [Abe89], [Gol97], [CKe99], [VGN06]).

(iii) Это также доказано Васерштейном в работе [Vas86]. Отметим, что в работе [HaV03] фактически доказана эндоморфная допустимость элементарных подгрупп групп Шевалле.

(iv) Нормальность группы $E(\Phi, R[t])$ в линейной алгебраической группе $G(\Phi, R[t])$, определённой полиномиальными уравнениями с целыми коэффициентами, непосредственно следует из (iii).
Равенство $\langle\!\langle E(\Phi, R)\rangle\!\rangle_{E(\Phi,R[t])} = E(\Phi, R[t])$ следует из (ii). Действительно, пусть $H = \langle\!\langle E(\Phi, R)\rangle\!\rangle_{E(\Phi,R[t])}$. Включение $E(\Phi, R) \subseteq H \subseteq G(\Phi, R[t]) \cap (1 + M_n(J))$ влечёт равенство $J = R[t]$. Следовательно, $E(\Phi, R[t]) = \langle\!\langle \{x_i(f)\ ;\ f \in R[t]\}\rangle\!\rangle_{E(\Phi,R[t])} = \langle\!\langle \{x_i(f)\ ;\ f \in J\}\rangle\!\rangle_{E(\Phi,R[t])} \subseteq H$ и $H = E(\Phi, R[t])$.

(v) Пусть U — алгебра $L(\Phi, R)$, рассматриваемая как левый модуль над собой. Тогда

$$\mathrm{End}_{\,L(\Phi,R)}U = R, \quad \text{то есть все эндоморфизмы пропорциональны тождественному.} \qquad (**)$$

Действительно, это верно для $R = \mathbb{C}$, поскольку алгебра $L(\Phi, \mathbb{C})$ проста. Следовательно, условие $(**)$ выполняется для любого кольца R без аддитивного кручения, поскольку оба условия на матрицу, задавать эндоморфизм модуля U и быть скалярной матрицей, являются системами линейных уравнений с целыми коэффициентами.
Отметим, что условие $(**)$ останется справедливым, если рассматривать U как модуль над к о л ь ц о м Ли $L(\Phi, R)$, то есть каждый эндоморфизм f модуля U обязан быть R-линейным. Действительно, для любого $u \in U$ существуют $y_i \in L(\Phi, R)$ и $u_i \in U$ такие, что $u = \sum(\mathrm{ad}\, y_i)(u_i)$, поскольку $L(\Phi, R) = [L(\Phi, R), L(\Phi, R)]$. Следовательно,

$$ru = \sum(\mathrm{ad}\, ry_i)(u_i) \quad \text{и} \quad f(ru) = f\left(\sum(\mathrm{ad}\, ry_i)(u_i)\right) = \sum(\mathrm{ad}\, ry_i)f(u_i) = r\sum(\mathrm{ad}\, y_i)f(u_i) = rf(u).$$

Теперь возьмём некоторый автоморфизм φ кольца $L(\Phi, R)$ и рассмотрим алгебру $L(\Phi, R)$ как $L(\Phi, R)$-модуль U_φ относительно действия $(y, u) \mapsto (\mathrm{ad}\,\varphi(y))u$. Ясно, что отображение $u \mapsto \varphi(u)$ является изоморфизмом модулей U и U_φ над кольцом Ли $L(\Phi, R)$. Этот изоморфизм индуцирует изоморфизм колец эндоморфизмов $R = \mathrm{End}_{\,L(\Phi,R)}U \xrightarrow{\alpha_\varphi} \mathrm{End}_{\,L(\Phi,R)}U_\varphi = R$. Мы имеем гомоморфизм $\mathrm{Aut}_{\,\mathbb{Z}}L(\Phi, R) \to \mathrm{Aut}_{\,\mathbb{Z}}R$, $\varphi \mapsto \alpha_\varphi$, ядром которого является группа $\mathrm{Aut}_{\,R}L(\Phi, R)$. Правый обратный гомоморфизм $\mathrm{Aut}_{\,\mathbb{Z}}R \to \mathrm{Aut}_{\,\mathbb{Z}}L(\Phi, R)$ отображает $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\,\mathbb{Z}}R$ в очевидный автоморфизм кольца Ли $L(\Phi, R) = L(\Phi, \mathbb{Z}) \otimes R$, индуцированный автоморфизмом α. Таким образом, мы получаем требуемое разложение группы $\mathrm{Aut}_{\,\mathbb{Z}}L(\Phi, R)$ в полупрямое произведение.

(vi) **Нормальность.** В силу (iii), достаточно доказать нормальность подгруппы $G(\Phi, R)$. В случае $R = \mathbb{C}$ это свойство хорошо известно, смотрите, например, [VOn88]. Пусть $F_N(y_{ij}) = 0$ и $F_G(y_{ij}) = 0$ — системы полиномиальных уравнений с целыми коэффициентами, определяющие группы $N(\Phi, R) = \mathrm{Aut}_{\,R}L(\Phi, R)$ и $G(\Phi, R)$ (эти системы не зависят от R). Будем считать, что идеалы кольца $\mathbb{Z}[y_{11}, y_{12}, \dots, y_{nn}]$, порождённые наборами многочленов $F_N(y_{ij})$ и $F_G(y_{ij})$, радикальны. Для $R = \mathbb{C}$ мы имеем квазитождество

$$F_G(Y) = 0\ \&\ F_N(Z) = 0 \implies F_G(ZYZ^{-1}) = 0. \qquad (2)$$

Так как идеал кольца $\mathbb{Z}[y_{11}, y_{12}, \dots, y_{nn}, z_{11}, z_{12}, \dots, z_{nn}]$, порождённый многочленами $F_G(Y)$ и $F_N(Z)$, является радикальным, теорема о нулях влечёт, что квазитождество (2) выполняется для все колец R без аддитивного кручения. Таким образом, $G(\Phi, R)$ является нормальной подгруппой группы $N(\Phi, R)$.
Централизаторы. Для $R = \mathbb{C}$ централизатор множества $\{x_i(1)\}$ в $\mathrm{Aut}_{\,R}L(\Phi, R)$ тривиален. Следовательно, то же самое верно для любого кольца R без аддитивного кручения (по теореме о нулях). Таким образом, централизатор множества $\{x_i(1)\}$ в группе $\mathrm{Aut}_{\,\mathbb{Z}}L(\Phi, R) = (\mathrm{Aut}_{\,\mathbb{Z}}R) \leftthreetimes \mathrm{Aut}_{\,R}L(\Phi, R)$ совпадает с $\mathrm{Aut}_{\,\mathbb{Z}}R$. С другой стороны, каждый нетривиальный кольцевой автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\,\mathbb{Z}}R$ индуцирует нетривиальный автоморфизм $x_i(r) \mapsto x_i(\alpha(r))$ группы $E(\Phi, R)$. Следовательно, централизатор группы $E(\Phi, R)$ в группе $\mathrm{Aut}_{\,\mathbb{Z}}L(\Phi, R)$ тривиален и лемма 2 доказана.

Утверждение 5. *Пусть Φ — приведённая неприводимая система корней ранга $\geqslant 2$ и R — ассоциативное коммутативное кольцо без аддитивного кручения, с единицей и $\frac{1}{6}$. Тогда любая ретракция $\pi\colon E(\Phi, R[t]) \to E(\Phi, R)$ (то есть такой гомоморфизм, что $\pi^2 = \pi$) имеет вид $E(\Phi, R[t]) \ni a(t) \mapsto a(r) \in E(\Phi, R)$ для некоторого $r \in R$. Другими словами, $\pi = \mathrm{REP}_r$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 (ii),

$$\langle\!\langle \{x_i(f)\ ;\ f \in J\}\rangle\!\rangle_{E(\Phi,R[t])} \subseteq \ker \pi \subseteq E(\Phi, R[t]) \cap (1 + M_n(J)) \quad \text{для некоторого идеала } J \text{ of } R[t].$$

Правое включение и равенство $E(\Phi,R[t]) = E(\Phi,R) \leftthreetimes \ker\pi$ показывают, что $t-r \in J$ для некоторого $r \in R$; левое включение и равенство $E(\Phi,R) \cap \ker\pi = \{1\}$ показывают, что $J = (t-r)R[t]$. Следовательно, $\ker\pi = E(\Phi,R[t]) \cap (1+M_n(J))$ и $\pi = \mathrm{REP}_r$.

Таким образом, мы имеем естественное взаимно однозначное соответствие между кольцом R и множеством ретракций. Ясно, что кольцевая структура на R также может быть описана в терминах ретракций и целочисленных репараметризаций:

$$\begin{aligned} &\mathrm{REP}_{r+r'}\colon E(\Phi,R[t]) \xrightarrow{t\to t+t'} E(\Phi,R[t,t']) \xrightarrow[t'\to r']{t\to r} E(\Phi,R),\\ &\mathrm{REP}_{rr'}\colon E(\Phi,R[t]) \xrightarrow{t\to tt'} E(\Phi,R[t,t']) \xrightarrow[t'\to r']{t\to r} E(\Phi,R). \end{aligned} \tag{3}$$

Из утверждения 5 и этих формул следует, что любой непрерывный автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut} E(\Phi,R)$ индуцирует кольцевой автоморфизм $\widehat{\varphi} \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} R$ по формуле $\varphi \mathrm{REP}_r \widetilde{\varphi}^{-1} = \mathrm{REP}_{\widehat{\varphi}(r)}$:

$$\begin{array}{ccc} E(\Phi,R[t]) & \xrightarrow{\ \widetilde{\varphi}\ } & E(\Phi,R[t]) \\ \downarrow\mathrm{REP}_r & & \downarrow\mathrm{REP}_{\widehat{\varphi}(r)} \\ E(\Phi,R) & \xrightarrow{\ \varphi\ } & E(\Phi,R). \end{array}$$

Каждому идеалу $J \lhd R$ соответствуют две нормальные подгруппы группы $E(\Phi,R)$, а именно, $E(J)_{\max} \overset{\text{опр}}{=} E(\Phi,R) \cap (1+M_n(J))$ и $E(J)_{\min} \overset{\text{опр}}{=} \langle\!\langle \{x_i(r)\ ;\ r \in J\} \rangle\!\rangle_{E(\Phi,R)}$.

Лемма 3. *Пусть Φ — приведённая неприводимая система корней ранга $\geqslant 2$ и R — ассоциативное коммутативное кольцо без аддитивного кручения, с единицей и $\frac{1}{6}$. Тогда $\varphi(E(J)_{\min}) = E(\widehat{\varphi}(J))_{\min}$ и $\varphi(E(J)_{\max}) = E(\widehat{\varphi}(J))_{\max}$ для любого нерерывного автоморфизма φ группы $E(\Phi,R)$.*

Доказательство. Ясно, что достаточно определить $E(J)_{\min}$ и $E(J)_{\max}$ в терминах ретракций. Подгруппа $E_1(\Phi,R) \overset{\text{опр}}{=} E(\Phi,R[t]) \cap (1+tM_n(R[t]))$ может быть определена как $E_1(\Phi,R) = \ker \mathrm{REP}_0$ (следовательно, эта подгруппа является $\widetilde{\varphi}$-инвариантной). Далее,

$$E(J)_{\min} = \langle\!\langle \{\mathrm{REP}_r(a(t))\ ;\ r \in J,\ a(t) \in E_1(\Phi,R)\} \rangle\!\rangle_{E(\Phi,R)}\,.$$

Включение $\supseteq$ вытекает из равенства $E_1(R) = \big\langle\!\big\langle \{x_i(rt^k)\ ;\ i \in I,\ r \in R,\ k = 1,2\ldots\} \big\rangle\!\big\rangle_{E(\Phi,R[t])}$, справедливого для любой R-группы со свойством (EX).

$$\begin{aligned} E(J)_{\max} = {} & \text{(единственная) максимальная подгруппа среди всех нормальных подгрупп } H \\ & \text{таких, что } E(J)_{\min} \subseteq H \text{ и } E(J')_{\min} \nsubseteq H \text{ для любого идеала } J' \nsubseteq J. \end{aligned}$$

Корректность этого определения $E(J)_{\max}$ следует из леммы 2 (ii) и равенства $E(J_1+J_2)_{\min} = E(J_1)_{\min} \cdot E(J_2)_{\min}$.

Лемма 4. *Пусть Φ — приведённая неприводимая система корней ранга $\geqslant 2$ и R — ассоциативное коммутативное кольцо без аддитивного кручения, с единицей и $\frac{1}{6}$. Тогда любой непрерывный автоморфизм φ группы $E(\Phi,R)$ является гладким.*

Доказательство. Мы должны доказать, что подгруппы $E_k(\Phi,R) \overset{\text{опр}}{=} E(\Phi,R[t]) \cap (1+t^kM_n(R[t]))$ являются $\widetilde{\varphi}$-инвариантными. Это верно для $k=1$, поскольку $E_1(\Phi,R) = \ker \mathrm{REP}_0$. С другой стороны, $E_1(\Phi,R) = E(tR[t])_{\max}$. Следовательно, идеал $tR[t] \lhd R[t]$ является $\widehat{\widetilde{\varphi}}$-инвариантным по лемме 3. Значит, идеал $(tR[t])^k$ также $\widehat{\widetilde{\varphi}}$-инвариантен и подгруппа $E_k(\Phi,R) = E((tR[t])^k)_{\max}$ инвариантна относительно $\widetilde{\varphi}$.

Утверждение 6. *Касательный модуль группы Шевалле совпадает с соответствующей алгеброй Ли: $T(E(\Phi,R)) = L(\Phi,R)$.*

Доказательство. Пусть $X \in T(E(\Phi,R))$, то есть $1+tX+o(t) \in E(\Phi,R[t])$. Выразим этот элемент через порождающие:

$$1+tX+o(t) = \prod_j x_{i_j}(r_jt^{k_j}) \tag{4}$$

Можно считать, что $k_j \in \{0,1\}$. Подстановка $t=0$ показывает что

$$\prod_j{}' x_{i_j}(r_j) = 1. \quad \text{где штрих означает, что произведение берётся по всем } j \text{ таким, что } k_j = 0.$$

Следовательно, выражение (4) может быть переписано в виде

$$1 + tX + o(t) = \prod_l g_l x_{i_l}(r_l t) g_l^{-1}, \quad \text{где } g_l \in E(\Phi, R).$$

Значит, $X = \sum g_l \circ r_l x_{i_l} \in L(\Phi, R)$ и $T(E(\Phi, R)) \subseteq L(\Phi, R)$.

Докажем теперь обратное включение. Ясно, что $T(E(\Phi, R))$ содержит нильпотентную часть $\{x_i\}$ базиса Шевалле: $x_i(t) = \exp(tx_i) = 1 + tx_i + o(t)$. Остальные базисные вектора h_i также содержатся в $T(E(\Phi, R))$, поскольку $h_i = x_i(1) \circ x_{-i} + x_i - x_{-i}$ (смотрите, например, [Bor70]). Утверждение доказано.

В частности, утверждение 6 показывает, что каждая присоединённая группа Шевалле является присоединённой в смысле раздела 4.

6. Доказательство основных теорем

Автоморфизмы группы $E(\Phi, R)$**.** По лемме 2 (vi) мы имеем естественный инъективный гомоморфизм $\Pi\colon \operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} L(\Phi, R) \to \operatorname{Aut} E(\Phi, R)$. По утверждению 1 и лемме 2 (i) каждый автоморфизм группы $E(\Phi, R)$ унипотентен (при подходящем выборе числа m) и, следовательно, непрерывен (по утверждению 4 и лемме 2 (i) и (iv)) и гладок (по лемме 4). Значит, отображение Π сюръективно по утверждениям 3 и 6. Таким образом, $\operatorname{Aut} E(\Phi, R) \simeq \operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} L(\Phi, R) \simeq \operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}} R \leftthreetimes \operatorname{Aut}_R L(\Phi, R)$ (второй изоморфизм следует из леммы 2 (v)).

Автоморфизмы группы $G(\Phi, R)$ **такие же как у** $E(\Phi, R)$**.** Действительно, каждый автоморфизм группы $E(\Phi, R)$ стандартен и, следовательно, может быть продолжен до автоморфизма группы $G(\Phi, R)$ по лемме 2 (vi). Таким образом, естественное отображение $\operatorname{Aut} G(\Phi, R) \to \operatorname{Aut} E(\Phi, R)$ сюръективно (и корректно определено по лемме 2 (iii)). Инъективность этого отображения вытекает из леммы 2 (vi) и следующего общего факта.

Лемма 5. *Если A — автоморфно допустимая подгруппа группы B и централизатор подгруппы A в B тривиален, то естественное отображение $\rho\colon \operatorname{Aut} B \to \operatorname{Aut} A$ инъективно.*

Доказательство. Для любых $\varphi \in \ker \rho$, $a \in A$, и $b \in B$, мы имеем $bab^{-1} = \varphi(bab^{-1}) = \varphi(b)\varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(b)a\varphi(b^{-1})$. Следовательно, $b^{-1}\varphi(b)$ коммутирует с A. Значит, $b = \varphi(b)$ для любого $b \in B$. Теорема об автоморфизмах доказана.

Теорема об изоморфизмах является простым следствием теоремы об автоморфизмах. Каждый изоморфизм групп Шевалле $\sigma\colon G(\Phi, R) \to G(\Phi, R')$ индуцирует автоморфизм φ_σ группы $G(\Phi, R \times R')$, поскольку этой группа раскладывается в прямое произведение $G(\Phi, R) \times G(\Phi, R')$ и мы можем положить $\varphi_\sigma(g, g') = (\sigma^{-1}(g'), \sigma(g))$. Стандартность автоморфизма φ_σ означает, что σ индуцирован изоморфизмом соответствующих колец Ли. Аналогичным образом доказывается утверждение об элементарных подгруппах.

7. Автоморфизмы алгебр Шевалле

Напомним, что *внутренним автоморфизмом* алгебры Шевалле $L(\Phi, R)$ называют сопряжение $x \mapsto gxg^{-1}$ элементом g группы Шевалле $G(\Phi, R)$. Ясно, что внутренние автоморфизмы образуют группу, изоморфную группе $G(\Phi, R)$.

Пусть $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_d\}$ — группа симметрий диаграммы Дынкина системы Φ (число d может быть 1, 2 или 6, в зависимости от Φ) и пусть $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_d$ — (возможно тривиальное) разложение кольца R в прямую сумму идеалов. Пусть $f_i \in \operatorname{Aut}_{R_i} L(\Phi, R_i)$ — автоморфизм, индуцированный симметрией δ_i (смотрите [VOn88]). Автоморфизм f алгебры $L(\Phi, R) = L(\Phi, R_1) \oplus \ldots \oplus L(\Phi, R_d)$, отображающий $x_1 + \ldots + x_d$ в $f_1(x_1) + \ldots + f_d(x_d)$, где $x_i \in L(\Phi, R_i)$, мы называем *диаграммным автоморфизмом* алгебры $L(\Phi, R)$. Ясно, что диаграммные автоморфизмы образуют группу, изоморфную подгруппе

$$D(\Phi, R) = \left\{ \sum e_i \delta_i \;\middle|\; e_i \in R,\ e_i^2 = e_i,\ e_i e_j = 0 \text{ для } i \neq j,\ \sum e_i = 1 \right\}$$

группы единиц групповой алгебры $R\Delta$.

Теорема 1. *Пусть R — ассоциативное коммутативное кольцо без аддитивного кручения, с единицей и $\frac{1}{6}$ и пусть Φ — приведённая неприводимая система корней. Тогда любой автоморфизм f R-алгебры Ли $L(\Phi, R)$ единственным образом раскладывается в композицию диаграммного и внутреннего автоморфизма, $\operatorname{Aut}_R L(\Phi, R) \simeq D(\Phi, R) \leftthreetimes G(\Phi, R)$.*

Доказательство. Пусть n — размерность алгебры Ли $L(\Phi)$. Рассмотрим идеал J кольца $\mathbb{Z}[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}]$, определяющий группу $\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}} L(\Phi)$. Идеал J раскладывается в произведение $J = J_1 J_2 \ldots J_d$ простых идеалов J_i, отвечающих неприводимым (= связным) компонентам $h_i G(\Phi)$ группы $\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}} L(\Phi)$, где h_i — целочисленные матрицы диаграммных автоморфизмов. Рассмотрим матрицу $A = (a_{pq}) \in \operatorname{Aut}_R L(\Phi, R)$. Тогда $f(a_{pq}) = 0$ для $f \in J$. Положим $I_i = \{ f(a_{pq}) \ ; \ f \in J_i \} \lhd R$. Тогда

(i) $\prod I_i = \{0\}$;

(ii) $I_i + I_j = R$ для $i \neq j$ (в противном случае мы рассмотрим факторкольцо по максимальному идеалу $M \supseteq I_i + I_j$ и получим, матрицу A_M, лежащую в пересечении двух неприводимых компонент группы $\mathrm{Aut}_{R/M} L(\Phi, R/M)$, но это пересечение пусто, поскольку R/M — поле).

Условия (i) и (ii) означают, что кольцо R раскладывается в прямую сумму $R = \bigoplus R/I_i$ [Bou61, Ch.2 §1, Утверждение 5]. Итак, $A = \sum A_{I_i}$ и элементы матрицы $A_{I_i} \in M_n(R/I_i)$ удовлетворяют уравнениям $f(a_{pq}) = 0$ для $f \in I_i$. Следовательно, $A_{I_i} = h_i g_i \in h_i G(\Phi, R/I_i)$ и $A = (\sum e_i h_i)(\sum g_i)$, где e_i — единица кольца R/I_i. Это завершает доказательство.

Другой подход к описанию автоморфизмов алгебр Шевалле был предложен в статье [Pia02].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Abe93] Абе Э. Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами // Алгебра и Анализ. 1993. Т.5. №2. С.74–90.

[VGN06] Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р., Николенко С. И. Строение групп Шевалле: доказательство из книги // Зап. Научн. Сем. С-Петерб. Отд. Мат. Инст. Акад. Наук СССР. 2006. Т.330. №13. С.36–76.

[VOn88] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М:Наука. 1988.

[Gol97] Голубчик И. З. Группы лиевского типа над PI-кольцами // Фунд. и Прикл. Мат. 1997. Т.3. №2. С.399–424.

[GMi83] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами // Зап. Научн. Сем. Ленингр. Отд. Мат. Инст. Акад. Наук СССР. 1983. Т.132. С.97–109.

[Zal83] Залесский А. Е. Линейные группы // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. 1983. М. Т.21. С.135–182.

[Zel85] Зельманов Е. И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативным кольцом // Сибирск. матем. журн. 1985. Т.26. №4. С.49–67.

[Lev83] Левчук В. М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. II. Группы автоморфизмов // Сибирск. матем. журн. 1983. V.24. №4. С.543–557

[Pet82] Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами // Мат. Сб. 1982. Т.117. №4. С.534–547.

[Abe89] Abe E. Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Contemp. Math. 1989. V.83. P.1–117.

[AHu88] Abe E., Hurley J. Centers of Chevalley groups over commutative rings // Comm. Algebra. 1988. V.16. no.1. P.57–74.

[ASu76] Abe E., Suzuki K. On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tôhoku Math. J. 1976. V.28. no.1. P.185–198.

[Bor70] Borel A. Properties and linear representations of Chevalley groups. in Semin. Algebr. Groups related Finite Groups Princeton 1968/69, Lect. Notes Math. 131, A1-A55 (1970).

[Bou61] Bourbaki N. Éléments de Mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 1 et 2. Paris: Hermann. 1961.

[Bun07] Bunina E. I. Automorphisms of elementary adjoint Chevalley groups of types A_l, D_l, E_l over local rings with 1/2 // arXiv:math/0702046. (2007). См. также Алгебра и логика (в печати).

[Che95] Chen Yu Automorphisms of simple Chevalley groups over $\mathbb{Q}$-algebras // Tôhoku Math. J. 1995. V.47. no.1. P.81–97.

[Che96] Chen Yu Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V.348. no.2. P.521–541.

[Che00] Chen Yu Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // J. Algebra. 2000. V.226. no.2. P.719–741.

[CKe99] Costa D. L., Keller G. E. On the normal subgroups of $G_2(A)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V.351. no.12. P.5051–5088.

[HaV03] Hazrat R., Vavilov N. K_1 of Chevalley groups are nilpotent //J. Pure Appl. Algebra. 2003. V.179. P.99–116.

[HO'M89] Hahn A. J, O'Meara O. T. The classical groups and K-theory. Springer. Berlin et al. 1989.

[Pia02] Pianzola A. Automorphisms of toroidal Lie algebras their central quotients // J. Algebra and Appl. 2002. V.1. no.1. P.113–121.

[Vas86] Vaserstein L. N. On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tôhoku Math. J. 1986. V.36. no.5. P.219–230.

[VPl96] Vavilov N., Plotkin E. Chevalley groups over commutative rings. I: Elementary calculations. // Acta Appl. Math. 1996. V.45. no.1. P.73–113.

[Wat80] Waterhouse W. C. Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V.79. no.3. P.347–351.