УДК 512.543.16+512.543.72 MSC: 20F05,20F06,20E06,20E22

СТРОЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КОПРЕДСТАВЛЕНИЙ С ОДНИМ СООТНОШЕНИЕМ И ИХ ЦЕНТРЫ

Антон А. Клячко
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
Москва 119992, Ленинские горы, МГУ
klyachko@mech.math.msu.su

Пусть G — нетривиальная группа без кручения и w — слово в алфавите $G \cup \{x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\}$ такое, что слово $w' \in F(x_1, \dots, x_n)$, получающееся из w стиранием букв, лежащих в G, не является истинной степенью в свободной группе $F(x_1, \dots, x_n)$. Мы показываем как свести изучение относительного копредставления $\widehat{G} = \langle G, x_1, x_2, \dots, x_n \mid w = 1 \rangle$ к случаю $n = 1$. Оказывается, что «n-мерная» группа $\widehat{G}$ может быть построена из аналогичных «одномерных» групп при помощи некоторой явной конструкции, отдалённо напоминающей сплетение. В качестве иллюстрации мы доказываем, что при $n \geqslant 2$ центр группы $\widehat{G}$ всегда тривиален. При $n = 1$ центр группы $\widehat{G}$ также почти всегда оказывается тривиальным; имеется несколько исключений и все они известны.

Ключевые слова: относительные копредставления, группы с одним соотношением, центр, асферичность.

0. Введение

Пусть G — некоторая группа. Под группой, заданной *относительным копредставлением с одним соотношением над группой* G, понимается группа

$$\widehat{G} = \langle G, x_1, x_2, \dots, x_n \mid w = 1 \rangle \overset{\text{опр}}{=} G * F(x_1, x_2, \dots, x_n) / \langle\langle w \rangle\rangle .$$

Здесь $x_1, \dots, x_n$ — буквы (не лежащие в G) и w — произвольное слово в алфавите $G \cup \{x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\}$ (которое можно трактовать как элемент свободного произведения $G * F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ группы G и свободной группы с базисом $x_1, x_2, \dots, x_n$). Другими словами, копредставление группы $\widehat{G}$ получается из копредставления $G = \langle A \mid R \rangle$ группы G добавлением нескольких новых образующих и одного соотношения: $\widehat{G} = \langle A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \mid R \cup \{w\} \rangle$.

Такие группы $\widehat{G}$ являются естественным обобщением групп с одним соотношением и их изучению посвящено множество работ (см., например, [How87], [BoP92], [DuH93], [Met01], [Кл06b] и литературу цитируемую там). Чтобы получить содержательные результаты приходится накладывать те или иные ограничения на группу G и/или на соотношение w. В этой работе мы накладываем только два ограничения:

(a) группа G не имеет кручения;

(b) слово $w \in G * F(x_1, x_2, \dots)$ таково, что слово $w' \in F(x_1, x_2, \dots)$, получающееся из w стиранием коэффициентов, лежащих в G, не является истинной степенью*) в свободной группе $F(x_1, x_2, \dots)$.

Та же самая ситуация рассматривалась в работах [Кл06a], [Кл06b] и [Кл07], а также в [Kl93], [FeR96], [CR01], [Кл05] и [FoR05] в случае $n = 1$.

Центральный результат настоящей работы (теорема 3) показывает, как свести изучение групп $\widehat{G}$ к случаю $n = 1$. Оказывается, что «n-мерная» группа $\widehat{G}$ может быть построена из аналогичных «одномерных» групп при помощи явной конструкции, включающей в себя *итерированные свободные произведения с объединённой подгруппой* (см. раздел 3) и *полупрямые произведения с объединённой подгруппой* (см. раздел 4).

Вероятно, эта структурная теорема (теорема 3) может иметь много приложений, одно из которых мы рассматриваем здесь. А именно, мы изучаем центры групп $\widehat{G}$.

Сначала мы рассматриваем случай $n = 1$, то есть следующую ситуацию. Пусть G — группа без кручения и группа $\widetilde{G}$ получается из группы G добавлением одного образующего и одного *унимодулярного* соотношения, то есть соотношения с единичной суммой показателей при новом образующем:

$$\widetilde{G} = \langle G, t \mid w = 1 \rangle \overset{\text{опр}}{=} (G * \langle t \rangle_\infty) / \langle\langle w \rangle\rangle , \text{ где } w \equiv g_1 t^{\varepsilon_1} \dots g_q t^{\varepsilon_q}, \quad g_i \in G, \ \varepsilon_i \in \mathbb{Z} \ \text{ и } \ \sum \varepsilon_i = 1.$$

В этом случае, мы говорим, что группа $\widetilde{G}$ задана *унимодулярным относительным копредставлением над группой* G. Известно, что в такой ситуации $\widetilde{G}$ наследует некоторые свойства исходной группы G. В частности:

- абелизации этих групп изоморфны: $G/[G,G] \simeq \widetilde{G}/[\widetilde{G}, \widetilde{G}]$;
- группа G вкладывается (естественным образом) в группу $\widetilde{G}$ [Kl93] (см. также [FeR96]); следовательно, $\widetilde{G}$ нетривиальна, если G нетривиальна, $\widetilde{G}$ неабелева, если G неабелева и т.п.*)

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №08-01-00573.

*) Элемент h группы H мы называем *истинной степенью*, если $h = (h')^k$ для некоторого $h' \in H$ и некоторого целого $k \geqslant 2$. В частности, единица является истинной степенью: $1 = 1^2$.

*) Однако, естественное отображение $G \to \widetilde{G}$ никогда не бывает сюръективным, за исключением случая когда $w \equiv gt$ [CR01].

- группа $\widetilde{G}$ (также как и G) не имеет кручения [FoR05];
- группа $\widetilde{G}$ непроста, если G непроста [Кл05];
- группа $\widetilde{G}$ удовлетворяет альтернативе Титса (то есть либо содержит неабелеву свободную подгруппу, либо является почти разрешимой), если группа G удовлетворяет этой альтернативе [Кл07].

В настоящей статье мы устанавливаем ещё одно свойство такого рода:
- центр группы $\widetilde{G}$ либо тривиален, либо изоморфен центру исходной группы G.

Более точно, мы доказываем следующий факт:

Теорема 1. *Если группа G не имеет кручения, а слово $w \in G * \langle t \rangle_\infty$ унимодулярно, то центр группы $\widetilde{G} = \langle G, t \mid w = 1 \rangle$ тривиален, за исключением следующих двух случаев:*
1) *$w \equiv gtg'$, где $g, g' \in G$ (при этом $\widetilde{G} \simeq G$), и центр группы G нетривиален;*
2) *G — циклическая группа, и $\widetilde{G}$ — группа с одним соотношением и с нетривиальным центром.*

Группы с одним соотношением, имеющие нетривиальный центр, хорошо изучены ([Mu64], [BaTa68], [Pi74]). Центр каждой такой группы является бесконечной циклической подгруппой (за исключением случая, когда вся группа является свободной абелевой ранга 2, что невозможно нашей ситуации). Простейшим неочевидным примером унимодулярного копредставления с нетривиальным центром является группа кос на трёх нитях $\widetilde{G} = B_3 = \langle g, t \mid gtg = tgt \rangle$, центр которой порождён элементом $(gt)^3$.

В общем случае вычисление чего бы то ни было в группе $\widetilde{G}$ является трудной задачей, поскольку в этой группе не решена (пока) проблема равенства. Например, естественный способ нахождения центра по формуле

$$\text{центр } \widetilde{G} = (\text{централизатор } G) \cap (\text{централизатор } t)$$

не срабатывает — мы не можем вычислить ни одного из этих централизаторов и для вычисления центра приходится использовать некоторый обходной манёвр. На самом деле, доказательство теоремы 1 недлинное (см. раздел 2), однако оно сильно опирается на результаты работы [Кл05]. Необходимые геометрические понятия мы объясняем в разделе 1.

Далее мы переходим к «многомерному» случаю. На самом деле, мы рассматриваем даже более общую ситуацию. В статье [Кл06а] было предложено обобщение понятия унимодулярности на случай когда слово w является элементом свободного произведения группы G и произвольной (то есть не обязательно циклической) группы T. В настоящей работе нам понадобиться ещё более общее определение. Слово $w \equiv g_1 t_1 \dots g_q t_q \in G * T$ мы будем называть *обобщённо унимодулярным*, если
1) $\prod t_i \neq 1$, и группа T не имеет кручения;
2) циклическая подгруппа $\langle \prod t_i \rangle$ группы T выделяется свободным сомножителем в некоторой нормальной подгруппе $R = \langle \prod t_i \rangle * S$ группы T;
3) факторгруппа T/R является группой с сильно однозначным умножением.

Напомним, что группа H называется *группой с однозначным умножением* (или *UP-группой*), если для любых двух её конечных непустых подмножеств $X, Y \subseteq H$ их произведение XY содержит по крайней мере один элемент, раскладывающийся в произведение элемента из X и элемента из Y однозначно. Одно время была гипотеза, что всякая группа без кручения является группой с однозначным умножением (обратное, очевидно, верно). Однако выяснилось, что существует контрпример ([Pr88], [RS87]).

Мы называем группу H *группой с сильно однозначным умножением*, если для любых двух её конечных непустых подмножеств $X, Y \subseteq H$ таких, что $|Y| \geqslant 2$, их произведение XY содержит по крайней мере два однозначно разложимых элемента $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$ таких, что $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ и $y_1 \neq y_2$.

Насколько мы знаем, все известные примеры UP-групп обладают сильно однозначным умножением. Например, этим свойством обладают все правоупорядочиваемые группы, локально индикабельные группы, диффузные группы в смысле Бовдича.

Основным примером обобщённо унимодулярных копредставлений являются группы вида

$$\widehat{G} = \langle G, x_1, x_2, \dots, x_n \mid w = 1 \rangle,$$

где слово $w \in G * F(x_1, x_2, \dots)$ таково, что слово $w' \in F(x_1, x_2, \dots)$, получающееся из w стиранием коэффициентов, лежащих в G, не является истинной степенью в свободной группе $F(x_1, x_2, \dots)$.

Действительно, пусть слово w имеет вид $w \equiv g_1 x_{j_1}^{\varepsilon_1} g_2 x_{j_2}^{\varepsilon_2} \dots g_q x_{j_q}^{\varepsilon_q}$ и слово $w' \in F(x_1, \dots, x_n)$ получается из w стиранием коэффициентов: $w' = x_{j_1}^{\varepsilon_1} x_{j_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{j_q}^{\varepsilon_q}$. Рассмотрим группы

$$T = F(x_1, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad T_1 = \langle x_1, \dots, x_n \mid w' = 1 \rangle = T / \langle\!\langle w' \rangle\!\rangle .$$

По теореме Бродского [Б84], если w' не является истинной степенью в свободной группе $F(x_1, \dots, x_n)$, то группа T_1 является локально индикабельной и, следовательно, группой с сильно однозначным умножением. По теореме Коэна–Линдона [CoLy63] элемент w' является примитивным элементом свободной подгруппы $\langle\langle w'\rangle\rangle$ группы T. Таким образом, слово w, рассматриваемое как элемент свободного произведения $G * T$, является обобщённо унимодулярным.

В разделе 5 мы доказываем наш основной результат, теорему 3. В качестве следствия этой теоремы о строении в разделе 6 мы получаем следующий факт, обобщающий теорему 1.

Теорема 2. *Пусть G и T — группы без кручения и циклически несократимое слово $w = g_1 t_1 \dots g_q t_q \in G * T$ обобщённо унимодулярно. Тогда*
1) *естественное отображение $G \to \widehat{G} = \langle G, T \mid w = 1\rangle \overset{\text{опр}}{=} (G * T)/\langle\langle w\rangle\rangle$ инъективно;*
2) *если центр группы $\widehat{G}$ нетривиален и группа G нециклическая, то $q = 1$ и либо $t_1 \in Z(T)$ и $\langle g_1\rangle \cap Z(G) \neq 1$* (в этом случае группа $\widehat{G} = G \underset{g_1 = t_1^{-1}}{*} T$ является свободным произведением групп G и T с объединённой циклической подгруппой), *либо группа T является циклической* (в этом случае $T = \langle t_1\rangle$ и $\widehat{G} \simeq G$).

Из этой теоремы легко выводится многомерный аналог теоремы 1:

Следствие 1. *Пусть G — нетривиальная группа без кручения и слово $w \in G * F(x_1, x_2, \dots)$ таково, что слово $w' \in F(x_1, x_2, \dots)$, получающееся из w стиранием коэффициентов, лежащих в G, не является истинной степенью в свободной группе $F(x_1, x_2, \dots)$. Тогда*
1) [Кл06a] *естественное отображение $G \to \widehat{G} = \langle G, x_1, x_2, \dots, x_n \mid w = 1\rangle$ инъективно;*
2) *если $n \geqslant 2$, то центр группы $\widehat{G}$ тривиален.*

Доказательство. В случае если группа G нециклическая, доказываемое утверждение вытекает из теоремы 2. Если же группа G циклическая, то группа $\widehat{G}$ является группой с одним соотношением и по меньшей мере тремя образующими; тривиальность центра таких групп давно известна [Mu64].

Полученные факты о центре группы $\widehat{G}$ не является, конечно, удивительными. Однако, из них легко выводится гипотеза Кервера–Лауденбаха для групп без кручения [Kl93], то есть нетривиальность всех групп вида

$$\langle H, t \mid w = 1\rangle, \text{ где } H \text{ – нетривиальная группа без кручения, а } w \text{ – произвольное слово в алфавите } H \cup \{t^{\pm 1}\}.$$

Действительно, если группа $\widetilde{H} = \langle H, t \mid w = 1\rangle$ тривиальна, то слово w обязано быть унимодулярным (иначе $\widetilde{H}$ допускает эпиморфизм на нетривиальную циклическую группу). Значит группа $\widehat{H} = \langle H, t, x \mid w = 1\rangle = \widetilde{H} * \langle x\rangle_\infty$ имеет тривиальный центр. Это можно вывести и из теоремы 1 (полагая $G = H * \langle x\rangle_\infty$), и из следствия 1(2) (полагая $G = H$). Тривиальность центра группы $\widehat{H}$ очевидным образом влечёт нетривиальность группы группы $\widetilde{H}$. Таким образом, и теорему 1, и следствие 1(2) можно рассматривать, как усиление основного результата работы [Kl93].

В работах [Б81] и [Met01] можно найти другие теоремы о центрах относительных копредставлений с одним соотношением. Ещё одно свойство «сильной неабелевости» относительных копредставлений доказано в работе [Кл06b]: если G — нетривиальная группа без кручения и $n \geqslant 2$, то группа $\langle G, x_1, x_2, \dots, x_n \mid w = 1\rangle$ всегда SQ-универсальна.

Автор благодарит Джеймса Хауи и анонимного рецензента за полезные замечания.

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, x и y — элементы некоторой группы, а φ — гомоморфизм из этой группы в какую-нибудь другую группу, то x^y, x^{ky}, x^{-y}, x^φ, $x^{k\varphi}$ и $x^{-\varphi}$ обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^k y$, $y^{-1}x^{-1}y$, $\varphi(x)$, $\varphi(x^k)$ и $\varphi(x^{-1})$ соответственно; коммутатор $[x, y]$ понимается как $x^{-1}y^{-1}xy$. Если X — подмножество некоторой группы, то $\langle X\rangle$, $\langle\langle X\rangle\rangle$ и $C(X)$ означают, соответственно, подгруппу, порождённую множеством X, нормальную подгруппу, порождённую множеством X, и централизатор множества X. Центр группы G обозначается символом $Z(G)$. Символом $|X|$ мы обозначаем мощность множества X. Буквы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначают множество целых и множество натуральных чисел, соответственно.

1. Диаграммы Хауи

В этом разделе мы напоминаем (следуя [Кл05]) некоторые факты о диаграммах, введённых в [How83]. Единственным новым результатом этого раздела является лемма 3.

Под поверхностью в этой статье мы всегда понимаем замкнутую двумерную ориентированную поверхность.

Картой M на поверхности S называется конечный набор непрерывных отображений $\{\mu_i\colon D_i \to S\}$, где D_i — двумерный замкнутый ориентированный диск (круг), называемый i-й *гранью* или *клеткой* карты, на границе которого отмечено некоторое конечное непустое множество точек $c_{ij} \in \partial D_i$, называемых *углами* карты. Интервалы e_{ij}, на которые углы делят границу грани, мы называем *прорёбрами* карты. Образы углов $\mu_i(c_{ij})$ и прорёбер $\mu_i(e_{ij})$ называют *вершинами* и *рёбрами* карты соответственно. При этом предполагается, что

1) ограничения отображения μ_i на внутренность грани D_i является гомеоморфным вложением, сохраняющим ориентацию; ограничение μ_i на каждое проребро является гомеоморфным вложением;
2) различные ребра не пересекаются;
3) образы внутренностей разных граней не пересекаются;
4) $\bigcup \mu_i(D_i) = S$.

Карту М мы будем также иногда трактовать как непрерывное отображение $\mathrm{M}\colon \coprod D_i \to S$ из дискретного объединения дисков в поверхность.

Объединение всех вершин и рёбер карты представляет собой граф на поверхности, называемый *одномерным остовом.*

Мы говорим, что угол c является углом при вершине v, если $\mathrm{M}(c) = v$. На множестве всех углов при вершине v имеется естественный циклический порядок; мы называем два угла при вершине v *смежными*, если они являются соседними относительно этого порядка.

Допуская некоторую вольность речи, мы говорим, что точка или подмножество поверхности содержится в грани D_i, если она (оно) лежит в образе μ_i. Аналогично, мы говорим, что грань D_i содержится в некотором подмножестве $X \subseteq S$ поверхности S, если $\mathrm{M}(D_i) \subseteq X$.

На рисунке 1 представлена карта на сфере с пятью гранями: A, B, C, D и E, восемнадцатью углами: a_i, b_i, c_i, d_i и e_i, шестью вершинами, девятью рёбрами и восемнадцатью прорёбрами. Заметим, что число углов всегда равно числу прорёбер и вдвое больше числа рёбер, а величина

$$e(S) \overset{\text{опр}}{=} (\textit{число вершин}) - (\textit{число ребер}) + (\textit{число граней})$$

не зависит от выбора карты на поверхности S и называется *эйлеровой характеристикой* этой поверхности. Эйлерова характеристика сферы (единственной поверхности, которая нас на самом деле интересует в этой статье) равна двум.

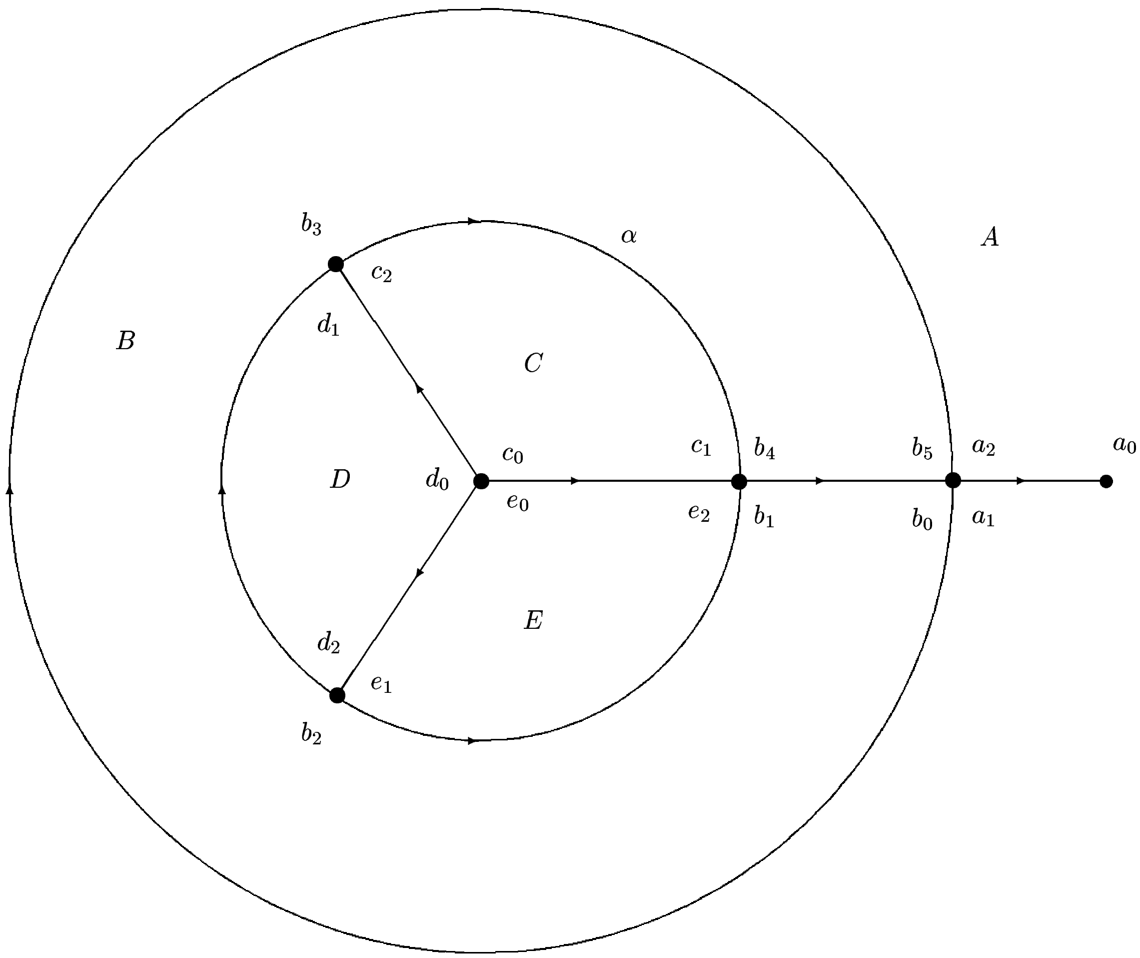


Рис. 1

Пусть имеется карта M на поверхности S, углы которой помечены элементами некоторой группы H, а рёбра ориентированны (на рисунках на них имеются стрелки) и помечены элементами некоторого множества $\{t_1, t_2, \ldots\}$, не пересекающегося с группой H. Метку угла или ребра x будем обозначать $\lambda(x)$.

Метка вершины v в такой ситуации определяется формулой

$$\lambda(v) = \prod_{i=1}^{k} \lambda(c_i),$$

где $c_1, \ldots, c_k$ — это все углы при вершине v, перечисленные по часовой стрелке. Метка вершины является элементом группы H, определённым с точностью до сопряжённости.

Например, метка самой верхней вершины на рисунке 1 есть $\lambda(b_3)\lambda(c_2)\lambda(d_1)$.

Метка грани D определяется формулой

$$\lambda(D) = \prod_{i=1}^{k} \big(\lambda(\mathrm{M}(e_i))\big)^{\varepsilon_i} \lambda(c_i),$$

где $e_1, \ldots, e_k$ и $c_1, \ldots, c_k$ — это все прорёбра и все углы грани D, перечисленные против часовой стрелки, причём концами проребра e_i являются углы c_{i-1} и c_i (индексы по модулю k), а $\varepsilon_i = \pm 1$ в зависимости от того, сохраняет или обращает ориентацию гомеоморфизм $e_i \overset{\mathrm{M}}{\to} \mathrm{M}(e_i)$. Говоря по-простому, чтобы получить метку грани, надо обойти её границу против часовой стрелки, выписывая метки всех встречающихся углов и рёбер, причём метку ребра надо записывать в минус первой степени, если мы его проходим против стрелки.

Метка грани является элементом группы $H * F(t_1, t_2, \ldots)$ (свободного произведения H и свободной группы с базисом $\{t_1, t_2, \ldots\}$), определённым с точностью до циклической перестановки. Более точно, правую часть нашей формулы для $\lambda(D)$ мы называем *меткой грани D, написанной начиная с проребра e_1.*

Например, если на рисунке 1 метки всех рёбер равны t, то метка грани B, написанная начиная с проребра α равна

$$t\lambda(b_4)t\lambda(b_5)t^{-1}\lambda(b_0)t^{-1}\lambda(b_1)t^{-1}\lambda(b_2)t\lambda(b_3).$$

Размеченную таким образом карту мы называем *диаграммой Хауи* (или просто *диаграммой*) над относительным копредставлением

$$K = \langle H, t_1, t_2, \ldots \mid w_1 = 1, w_2 = 1, \ldots \rangle\,, \tag{$*$}$$

если

1) некоторые вершины и некоторые грани выделены и называются *внешними*, остальные вершины и грани называются *внутренними*;
2) метка каждой внутренней грани является циклической перестановкой одного из слов $w_i^{\pm 1}$;
3) метка каждой внутренней вершины равна единице в группе H.

Диаграмма Хауи называется *приведённой*, если она не содержит такого ребра e, что две грани, его содержащие, являются внутренними, эти грани различны, а их метки, написанные начиная с М-прообразов ребра e, взаимнообратны; такая пара клеток с общим ребром называется *сократимой парой*. Например, клетки C и E на рисунке 1 образуют сократимую пару, если $\lambda(c_0) = \lambda(e_0)$, $\lambda(c_1) = \lambda(e_2)$, $\lambda(c_2) = \lambda(e_1)$ и метки всех рёбер равны.

Следующая лемма является аналогом леммы ван Кампена для относительных копредставлений.

Лемма 1 [H83]. *Естественное отображение группы H в группу, заданную относительным копредставлением $(*)$, не является инъективным тогда и только тогда, когда существует сферическая диаграмма над этим копредставлением с единственной внешней вершиной и без внешних граней, причём метка внешней вершины не равна единице в группе H. Минимальная (по числу клеток) из таких диаграмм является приведённой. Если это естественное отображение инъективно, то имеет место эквивалентность: образ элемента $u \in H * F(t_1, t_2, \ldots) \setminus \{1\}$ равен единице в группе $(*)$ тогда и только тогда, когда существует сферическая диаграмма над этим копредставлением без внешних вершин и с единственной внешней гранью, метка которой равна u. Минимальная (по числу клеток) из таких диаграмм также является приведённой.*

Диаграммы на сфере с единственной внешней гранью и без внешних вершин называют также *дисковыми* диаграммами, границу внешней грани такой диаграммы называют *контуром* диаграммы.

Пусть $\varphi\colon P \to P^{\varphi}$ — изоморфизм между двумя подгруппами группы H. Относительное копредставление вида

$$\left\langle H, t \mid \{p^t = p^{\varphi};\ p \in P \setminus \{1\}\}, w_1 = 1,\ w_2 = 1,\ \ldots \right\rangle \tag{$**$}$$

назовём *φ-копредставлением*. Диаграмму над φ-копредставлением $(**)$ назовём *φ-приведённой* если она приведена и различные внутренние клетки, метки которых имеют вид $p^t p^{-\varphi}$, $p \in P$, не имеют общих рёбер.

Лемма 2 [Кл05]. *Минимальная (по числу клеток) из всех сферических диаграмм над данным φ-копредставлением без внешних граней и с единственной внешней вершиной, метка которой не равна единице, является φ-приведённой. Если таких диаграмм не существует, то минимальная дисковая диаграмма с данной меткой контура является φ-приведённой.* Другими словами, имеет место полный φ-аналог леммы 1.

На рисунке 2 показана идея доказательства этой леммы.

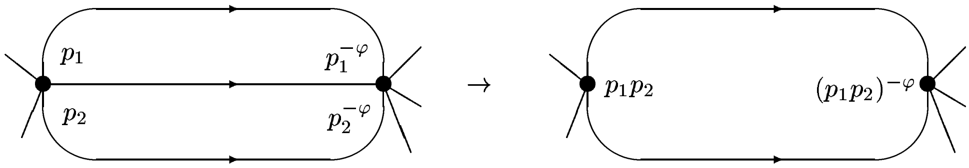


Рис. 2

Относительное копредставление (φ-копредставление), над которым не существует приведённых (соответственно, φ-приведённых) сферических диаграмм с единственной внешней вершиной и без внешних граней, будем называть *асферичными* (соответственно, *φ-асферичными*).

Лемма 3. *Пусть H — группа, слово $v \in H * F(t_1, t_2, \ldots)$ не является истинной степенью в $H * F(t_1, t_2, \ldots)$, а натуральное число l таково, что v^l несопряжено в $H * F(t_1, t_2, \ldots)$ ни с одним из элементов множества $H \cup \{w_i^{\pm 1}\}$ и копредставление*

$$L = \left\langle H, t_1, t_2, \ldots \,\middle|\, v^l = 1, w_1 = 1, w_2 = 1, \ldots \right\rangle,$$

полученное из копредставления $(*)$ *добавлением соотношения* $v^l = 1$ *асферично (или* φ*-асферично, если исходное копредставление* $(*)$ *является* φ*-копредставлением). Тогда*

1) *в группе* K, *заданной копредставлением* $(*)$, *централизатор элемента* v^k *совпадает с циклической группой* $\langle v \rangle$ *при всех натуральных* k;
2) *если группа* H *нетривиальна, то центр группы* K *тривиален.*

Доказательство. Первое утверждение доказывается стандартным рассуждением. Во-первых можно считать, что $k = l$, поскольку $C(v^k) \subseteq C(v^{kl})$, а из асферичности копредставления L вытекает асферичность копредставления

$$L_k = \left\langle H, t_1, t_2, \ldots \,\middle|\, v^{kl} = 1, w_1 = 1, w_2 = 1, \ldots \right\rangle$$

при каждом натуральном k (поскольку клетку с меткой w^k можно преобразовать в k клеток с метками w, см. [BoP92]).

Рассмотрим слово u, коммутирующее с v^l в группе K и дисковую диаграмму над копредставлением $(*)$ с меткой контура $[u, v^l]$. Склеим из этой диаграммы кольцо A (добавляя, если надо, клетки, метки которых равны единице в $H * F(t_1, t_2, \ldots)$) метки контуров, которого равны v^l и v^{-l}. Приклеив по этим контурам две новые клетки Γ_+ и Γ_-, мы получим сферическую диаграмму D без внешних вершин и граней над копредставлением L. Эта диаграмма обладает следующими свойствами (рис.3):

а) метка контура грани $\Gamma_\pm$, написанная начиная с некоторой точки $p_\pm \in \partial\Gamma_\pm$ равна $v^{\pm l}$;
б) метки контуров остальных граней лежат в $\{w_i^{\pm 1}\} \cup \{1\}$;
в) точки p_+ и p_- соединены некоторым путём π с меткой u;
г) точка p_+ соединена с некоторой точкой $p'_- \in \partial\Gamma_-$ некоторым путём π', метка которого равна единице в свободном произведении $H * F(t_1, t_2, \ldots)$; при этом метка контура клетки Γ_-, написанная начиная с точки p'_-, имеет вид v^{-l}.

Последнее свойство следует из того, что копредставление L асферично, а в диаграмме D и в диаграммах, которые получаются из неё приведением (уничтожением сократимых пар), клетка Γ_+ может образовать сократимую пару только с клеткой Γ_-.

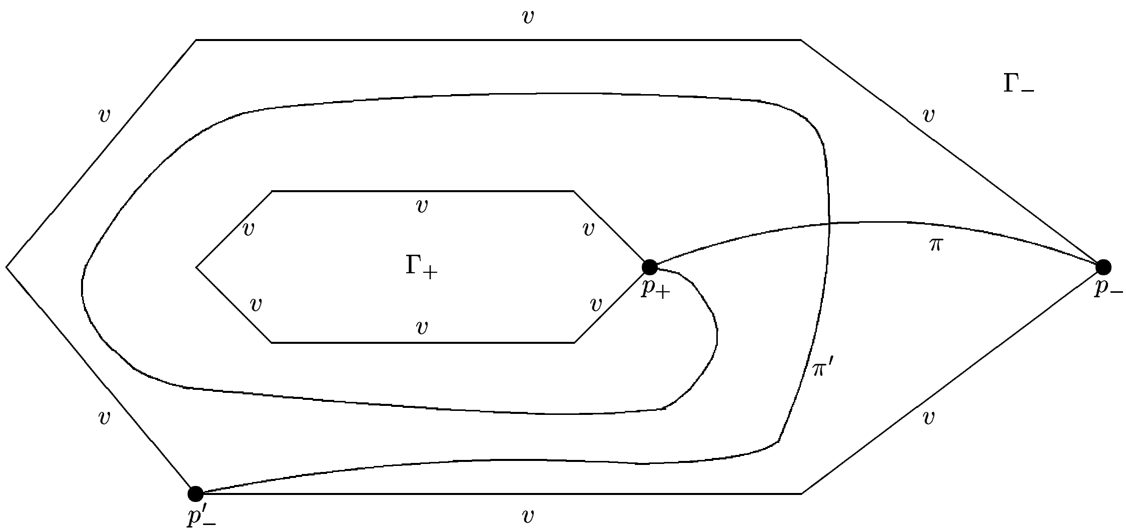


Рис. 3

Из свойств а) и г) и того, что v не является истинной степенью, вытекает, что метка участка σ контура клетки Γ_- между точками p_- и p'_- имеет вид v^i. Осталось заметить, что путь $\pi\sigma$ гомотопен в кольце $A = D \setminus \{\Gamma_\pm\}$ некоторому пути вида $\pi'\delta^j$, где δ — путь с меткой v^{-l} вокруг клетки Γ_-, начинающийся и кончающийся в p'_-. Из этой гомотопности вытекает, что метка u пути π равна в группе K слову v^{-lj-i}, что доказывает первое утверждение леммы.

Докажем второе утверждение. По утверждению 1) центр группы K обязан содержаться в циклической группе $\langle v \rangle$. Применяя ещё раз утверждение 1) к гипотетическому центральному элементу вида v^k, мы получаем, что $K = \langle v \rangle$. Значит, $v^{ks} = h$ для некоторых $s \in \mathbb{N}$ и $h \in H$, что противоречит (φ-)асферичности копредставления L.

2. Доказательство теоремы 1

В работе [Кл05] показано, что группа $\widetilde{G}$ всегда (кроме некоторых очевидных исключений) задаётся относительным (φ-)копредставлением, которое (φ-)асферично и остаётся таковым при наложении некоторого дополнительного соотношения. В силу леммы 3 это влечёт справедливость теоремы 1. Более точно, доказательство распадается на два случая.

Случай 1: слово w имеет вид $ct\prod_{i=0}^{m}(b_ia_i^t)=1$, где $c,a_i,b_i\in G$ (то есть сложность слова w не превосходит единицы в терминологии [FoR05]).

Лемма 4 ([Кл05], лемма 23). *Если G — группа без кручения и $m\geqslant 0$, то найдётся такое $d\in\{2,3\}$, что копредставление*

$$\left\langle G,t\ \middle|\ ct\prod_{i=0}^{m}(b_ia_i^t)=1,\ (a^{t^d}b)^4=1\right\rangle$$

асферично для любых элементов $a,b\in G$ таких, что $a^2\notin\langle a_m\rangle$ и $b^2\notin\langle b_0\rangle$.

Если $G^2\overset{\text{опр}}{=}\{g^2\ ;\ g\in G\}\not\subseteq\langle a_m\rangle$ и $G^2\not\subseteq\langle b_0\rangle$, то утверждение теоремы 1 вытекает из лемм 3 и 4. Для завершения доказательства осталось сослаться на следующий простой факт, который мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Лемма 5. *Если G — группа без кручения и $\langle G^2\rangle$ — циклическая группа, то и сама группа G является циклической.*

Случай 2: слово w не сопряжено слову вида $ct\prod_{i=0}^{m}(b_ia_i^t)=1$ (то есть сложность слова w больше единицы в терминологии [FoR05]).

В этом случае утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из леммы 3 и следующих двух лемм.

Лемма 6 ([Кл05], лемма 2; смотрите также [Kl93], [Fer96]). *Группа $\widetilde{G}$ обладает относительным копредставлением вида*

$$\widetilde{G}\simeq\left\langle H,t\ \middle|\ \{p^t=p^\varphi,\ p\in P\setminus\{1\}\},\ ct\prod_{i=0}^{m}(b_ia_i^t)=1\right\rangle,\tag{1}$$

где $a_i,b_i,c\in H$, P и P^φ — изоморфные подгруппы группы H, $\varphi\colon P\to P^\varphi$ — изоморфизм между ними. При этом группы H, P и P^φ являются свободным произведением конечного числа изоморфных копий группы G. Если слово w не сопряжено в $G*\langle t\rangle_\infty$ слову вида $ct\prod_{i=0}^{m}(b_ia_i^t)$, то группы P и P^φ нетривиальны.

Лемма 7 ([Кл05], лемма 10). *Если G — нециклическая группа без кручения и $P\neq\{1\}$ в копредставлении (1), то существуют такие элементы $a,b\in H$, что копредставление*

$$\widetilde{G}\Big/\left\langle\!\left\langle a^{t^2}b\right\rangle\!\right\rangle\simeq\left\langle H,t\ \middle|\ \{p^t=p^\varphi,\ p\in P\setminus\{1\}\},\ ct\prod_{i=0}^{m}(b_ia_i^t)=1,\ a^{t^2}b=1\right\rangle,$$

полученное из копредставления (1) добавлением соотношения $a^{t^2}b=1$, φ-асферично.

Теорема 1 доказана. Оставшаяся часть статьи посвящена изучению обобщённых унимодулярных копредставлений.

3. Свободные итерированные произведения с объединёнными подгруппами

Этот раздел представляет собой расширенный вариант аналогичного раздела работы [Кл06b].

Пусть $\{M_j\ ;\ j\in J\}$ — некоторое семейство групп. Определим группу M_J, *[строгое] свободное итерированное произведение с объединёнными подгруппами (СИПСОП)* групп M_j, индуктивно:

- если $J=\varnothing$, то положим $M_J=\{1\}$;
- если J — конечное непустое множество, то [строгим] СИПСОПом семейства групп $\{M_j\ ;\ j\in J\}$ мы называем всякое свободное произведение с объединёнными подгруппами вида
$$M_J=M_{j_0}\mathop{*}_{H=H^\varphi}M_{J\setminus\{j_0\}},$$
где j_0 — некоторый элемент множества J, $M_{J\setminus\{j_0\}}$ — [строгий] СИПСОП семейства групп $\{M_j\ ;\ j\in J\setminus\{j_0\}\}$, а $\varphi:H\to H^\varphi$ — некоторый изоморфизм между [собственной] подгруппой $H\subseteq M_{j_0}$ и некоторой подгруппой $H^\varphi\subseteq M_{J\setminus\{j_0\}}$;
- если множество J бесконечно, то [строгим] СИПСОПом семейства групп $\{M_j\ ;\ j\in J\}$ мы называем прямой предел
$$M_J=\lim\{M_K;\ K\text{ — конечное подмножество множества }J\},$$
где M_K — [строгий] СИПСОП семейства групп $\{M_j\ ;\ j\in K\}$; причём для каждой пары конечных подмножеств $K\subset K'\subset J$ имеется гомоморфизм $M_K\to M_{K'}$ тождественный на группах M_j, где $j\in K$, и прямой предел берётся относительно этого семейства гомоморфизмов.

Замечание. В определение строгого СИПСОПа мы требуем, чтобы объединяемая подгруппа H была собственной только в одном из сомножителей — в M_{j_0}. Поэтому всякая нетривиальная группа G может быть разложена в строгий СИПСОП: $G = \{1\} * G$ (а тривиальная группа является строгим СИПСОПом пустого семейства групп). Аналогично, если группа G является объединением некоторой строго возрастающей цепочки своих подгрупп, $G = \bigcup G_i$, где $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$, то группа G раскладывается в строгий СИПСОП групп G_i.

Пусть I — некоторое множество и Ω — некоторое семейство подмножеств множества I. Для каждого $i \in I$ рассмотрим некоторую группу G_i, и для каждого $\omega \in \Omega$ рассмотрим некоторую факторгруппу G_ω свободного произведения $\mathop{\ast}\limits_{i\in\omega} G_i$:

$$G_\omega = \left(\mathop{\ast}_{i\in\omega} G_i\right) \Big/ N_\omega.$$

Возникает естественный вопрос: при каких условиях естественные отображения

$$\varphi_\omega\colon G_\omega \to G_I \overset{\text{опр}}{=} \left(\mathop{\ast}_{i\in I} G_i\right) \Big/ \left\langle\!\!\left\langle \bigcup_{\omega\in\Omega} N_\omega \right\rangle\!\!\right\rangle$$

инъективны? Или, при каких условиях группа G_I является свободным итерированным произведением с объединёнными подгруппами групп G_ω?

Следующее утверждение даёт некоторые достаточные условия для положительного ответа на эти вопросы.

Утверждение 1. *Пусть*

$$N_\omega \cap \left(\mathop{\ast}_{j\in\omega\setminus\{i\}} G_j\right) = \{1\} \qquad (***)$$

для каждого $\omega \in \Omega$ *и каждого* $i \in \omega \setminus (\bigcap \Omega)$. *Допустим, что, кроме того, для каждого конечного подсемейства* $F \subseteq \Omega$ *такого, что* $|F| \geqslant 2$, *найдутся такие элементы* $\min, \max \in \bigcup F$, *что*

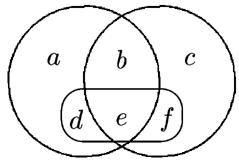
1) *элемент* $\min$ *содержится ровно в одном множестве* $\omega_{\min} \in F$;
2) *элемент* $\max$ *содержится ровно в одном множестве* $\omega_{\max} \in F$;
3) $\omega_{\min} \neq \omega_{\max}$.

Тогда все естественные отображения $\varphi_\omega\colon G_\omega \to G_I$ *инъективны и группа* G_I *является итерированным свободным произведением с объединёнными подгруппами групп* G_ω. *Если, кроме того,*

$$\left(\mathop{\ast}_{j\in\omega\setminus\{i\}} G_j\right) N_\omega \not\supseteq G_i$$

для каждого $\omega \in \Omega$ *и каждого* $i \in \omega \setminus (\bigcap \Omega)$, *то свободное итерированное произведение с объединёнными подгруппами является строгим.*

Пример. Пусть $I = \{a, b, c, d, e, f\}$ и $\Omega = \{\{a, b, d, e\}, \{b, c, e, f\}, \{d, e, f\}\}$.



Соответствующие шесть групп G_i мы обозначим $A, \ldots, F$, а три группы G_ω мы обозначим $\mathbf{ABDE}$, $\mathbf{BCEF}$ и $\mathbf{DEF}$. Нетрудно убедиться, что в данном случае условия 1), 2) и 3) выполнены для семейства Ω и каждого его подсемейства, состоящего из двух множеств. Допустим, что выполнено также условие $(***)$. Тогда справедливость утверждения 1 (в данном случае) вытекает из следующего разложения группы G_I в свободное произведение с объединёнными подгруппами:

$$G_I = \left((\mathbf{DEF} * B) \mathop{\ast}_{B*D*E} \mathbf{ABDE}\right) \mathop{\ast}_{B*E*F} \mathbf{BCEF}.$$

Для доказательства утверждения в общем случае докажем сперва лемму.

Лемма 8 ([Кл06b] лемма 1). *Пусть выполнены условия утверждения 1, Ω' — конечное подсемейство семейства Ω, $\omega \in \Omega$ и $\alpha \subseteq \omega \cap (\bigcup \Omega')$ — некоторое собственное подмножество множества ω, лежащее в $\bigcup \Omega'$ и содержащее $\bigcap \Omega$. Тогда естественное отображение*

$$\mathop{\ast}_{i\in\alpha} G_i \to G_{\Omega'} \stackrel{\text{опр}}{=} \left(\mathop{\ast}_{i\in\bigcup\Omega'} G_i \right) \Big/ \left\langle\!\!\left\langle \bigcup_{\omega'\in\Omega'} N_{\omega'} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

инъективно.

Доказательство.
Случай 1: $\omega \in \Omega'$**.** Воспользуемся индукцией по мощности семейства Ω'. Если $|\Omega'| = 1$ (то есть $\Omega' = \{\omega\}$), то утверждение леммы верно по условию ($\ast\ast\ast$). Допустим, что $|\Omega'| \geqslant 2$. В этом случае в соответствии с условиями 1), 2) и 3) семейство $F = \Omega'$ содержит множество $\omega' \neq \omega$, содержащее элемент $m \in \omega'$, не лежащий в $\bigcup(\Omega' \setminus \{\omega'\})$.

По предположению индукции (применённому к множеству ω' в качестве ω и семейству $\Omega' \setminus \{\omega'\}$ в качестве Ω') группы

$$G_i \text{ с номерами } i \in \beta \stackrel{\text{опр}}{=} \omega' \cap \left(\bigcup(\Omega' \setminus \{\omega'\})\right)$$

свободно порождают своё свободное произведение в группе $G_{\Omega'\setminus\{\omega'\}}$. А по условию ($\ast\ast\ast$) те же группы G_i, где $i \in \beta$, свободно порождают своё свободное произведение в группе $G_{\omega'}$ (поскольку ω' содержит элемент m, не лежащий в β). Значит, группа $G_{\Omega'}$ раскладывается в свободное произведение групп $G_{\Omega'\setminus\{\omega'\}}$ и $G_{\omega'}$ с объединённой подгруппой $\mathop{\ast}\limits_{i\in\beta} G_i$. При этом интересующие нас группы G_i с номерами $i \in \alpha$ лежат в сомножителе $G_{\Omega'\setminus\{\omega'\}}$. Следовательно, утверждение леммы следует из предположения индукции, применённого к множеству ω и семейству $\Omega' \setminus \{\omega'\}$ в качестве Ω'.
Случай 2: $\omega \notin \Omega'$**.** Доказательство в этом случае устроено похожим образом. Снова воспользуемся индукцией по мощности семейства Ω'. Если $\Omega' = \varnothing$, то доказывать нечего. Допустим, что $|\Omega'| \geqslant 1$. В этом случае в соответствии с условиями 1), 2) и 3) семейство $F = \Omega' \cup \{\omega\}$ содержит множество $\omega' \neq \omega$, содержащее элемент $m \in \omega'$, не лежащий в $\bigcup(F \setminus \{\omega'\})$ (рис.4).

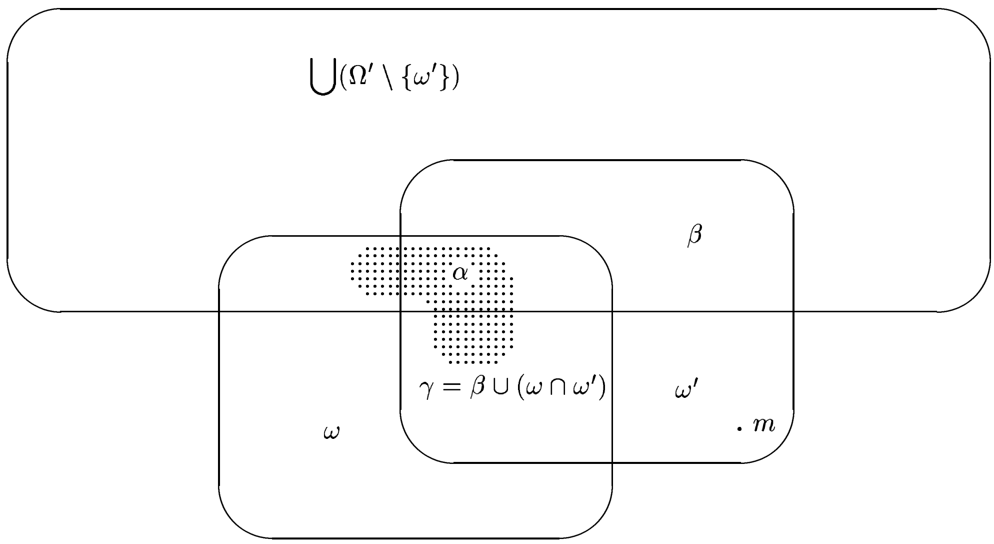


Рис. 4

По предположению индукции (применённому к множеству ω' в качестве ω и семейству $\Omega' \setminus \{\omega'\}$ в качестве Ω') группы

$$G_i \text{ с номерами } i \in \beta \stackrel{\text{опр}}{=} \omega' \cap \left(\bigcup(\Omega' \setminus \{\omega'\})\right)$$

свободно порождают своё свободное произведение в группе $G_{\Omega'\setminus\{\omega'\}}$. Значит, группы

$$G_i \text{ с номерами } i \in \gamma \stackrel{\text{опр}}{=} \beta \cup (\omega \cap \omega') = \omega' \cap \left(\bigcup((\Omega' \cup \omega) \setminus \{\omega'\})\right)$$

свободно порождают своё произведение в группе

$$H = \left(\mathop{\ast}_{j\in(\omega\cap\omega')\setminus\beta} G_j \right) \ast G_{\Omega'\setminus\{\omega'\}}.$$

Но по условию (***) те же группы G_i, где $i \in \gamma$, свободно порождают своё свободное произведение в группе $G_{\omega'}$ (поскольку ω' содержит элемент m, не лежащий в γ). Значит, группа $G_{\Omega'}$ раскладывается в свободное произведение с объединённой подгруппой групп H и $G_{\omega'}$:

$$G_{\Omega'} = H \underset{\langle G_i\ ;\ i\in\gamma\rangle}{\ast} G_{\omega'}.$$

При этом интересующие нас группы G_i с номерами $i \in \alpha$ лежат в сомножителе H. Следовательно, по предположения индукции, применённому к множеству ω и семейству $\Omega' \setminus \{\omega'\}$ в качестве Ω', группы G_i с номерами $i \in \alpha \cap (\bigcup(\Omega' \setminus \{\omega'\})$ свободно порождают своё свободное произведение в группе $G_{\Omega' \setminus \{\omega'\}}$. Отсюда немедленно вытекает, что группы G_i с номерами $i \in \alpha$ свободно порождают своё свободное произведение в группе H и, следовательно, в группе $G_{\Omega'}$, содержащей, как мы видели, H в качестве подгруппы. Лемма доказана.

Доказательство утверждения 1. Ясно, что утверждение достаточно доказать для конечного семейства Ω мощности большей единицы. Но в этом случае

$$G_I = G_\Omega * \left(\underset{i\notin\bigcup\Omega}{\ast} G_i \right),$$

а группа G_Ω раскладывается в свободное произведение с объединённой подгруппой:

$$G_\Omega = G_{\omega_{\min}} \underset{K}{\ast} G_{\Omega\setminus\{\omega_{\min}\}},$$

где объединяемая группа K является свободным произведением групп G_i с номерами из множества $\omega_{\min} \cap \bigcup(\Omega \setminus \{\omega_{\min}\})$ в силу леммы 8. Поэтому утверждение очевидным образом вытекает из индуктивных соображений.

Далее нам понадобится одно свойство итерированных свободных произведений с объединёнными подгруппами.

Утверждение 2. *Пусть группа M_J является строгим итерированным свободным произведением с объединёнными подгруппами конечно порождённых групп M_j, где $j \in J$. Тогда*
1) *в группе M_J все подгруппы M_j, где $j \in J$, попарно различны;*
2) *если элемент $h \in M$ переставляет группы M_j, то есть для каждого $j \in J$ найдётся такое $k \in J$, что $M_j^h = M_k$, то h лежит в одной из групп M_i, где $i \in J$; в частности, каждый центральный элемент группы M содержится в центре одной из групп M_i.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Допустим, что $M_i = M_k$, где i и k — различные элементы множества J. В силу конечной порождённости группы M_i равенство $M_i = M_k$ выполняется в одном из СИПСОПов M_P конечного числа групп, пределом которых является группа M_J. Здесь P — некоторое конечное множество, содержащее i и k. Далее доказываем индукцией по мощности множества P. Группа M_P раскладывается в свободное произведение с объединённой подгруппой

$$M_P = M_{p_0} \underset{H}{\ast} M_{P\setminus\{p_0\}}.$$

Подгруппа H является собственной подгруппой в M_{p_0} по определению строгого СИПСОПа. Поэтому M_{p_0} не может совпадать ни с одной из подгрупп группы $M_{P\setminus\{p_0\}}$. В частности, $i \neq p_0 \neq k$. Но тогда равенство $M_i = M_k$ выполняется уже в группе $M_{P\setminus\{p_0\}}$. Ссылка на предположение индукции завершает доказательство первого утверждения.

Второе утверждение доказывается аналогично. Пусть $h \in \langle M_{j_1}, \ldots, M_{j_l} \rangle$. Рассмотрим равенства

$$M_{j_1}^h = M_{k_1}, \ldots, M_{j_l}^h = M_{k_l}.$$

В силу конечной порождённости групп M_j эти равенства выполняются в одном из СИПСОПов M_P конечного числа групп, пределом которых является группа M_J. Здесь P — некоторое конечное множество, содержащее $j_1, \ldots, j_l$ и $k_1, \ldots, k_l$. Далее доказываем индукцией по мощности множества P. Группа M_P раскладывается в свободное произведение с объединённой подгруппой

$$M_P = M_{p_0} \underset{H}{\ast} M_{P\setminus\{p_0\}}.$$

Подгруппа H является собственной подгруппой в M_{p_0} по определению строгого СИПСОПа. Кроме того, мы можем считать также, что H является собственной подгруппой в $M_{P\setminus\{p_0\}}$, поскольку в противном случае элемент h будет содержаться в M_{p_0} и доказывать будет нечего.

Если $p_0 \notin \{j_1, \ldots, j_l, k_1, \ldots, k_l\}$, то $h \in M_{P \setminus \{p_0\}}$, интересующие нас равенства выполняются уже в группе $M_{P \setminus \{p_0\}}$ и утверждение можно считать доказанным по предположению индукции.

Если же $p_0 = j_i$, то группа $(M_{p_0})^h$ либо будет содержаться в сомножителе $M_{P \setminus \{p_0\}}$, либо будет совпадать с M_{p_0} (в зависимости от того равны k_i и j_i, или нет). Из стандартных свойств свободного произведения с объединённой подгруппой вытекает, что первый случай невозможен, а второй случай возможен лишь при $h \in M_{p_0}$.

Случай $p_0 = k_i$ рассматривается аналогичным образом: в рассуждении из предыдущего абзаца надо h заменить на h^{-1}. Утверждение 2 доказано.

Замечание. Можно показать, что в этом утверждение нельзя отбросить ни требование строгости СИПСОПа, ни требование конечной порождённости сомножителей.

4. Полупрямые произведения с объединёнными подгруппами

Пусть группа A действует на группе B автоморфизмами $\varphi\colon A \to \operatorname{Aut} B$, а $N \triangleleft A$ и $N^\psi \subseteq B$ — изоморфные подгруппы групп A и B, причём N нормальна в A и изоморфизм $\psi\colon N \to N^\psi$ *согласован с действием* φ, то есть

$$(n^a)^\psi = (n^\psi)^{a^\varphi} \quad \text{и} \quad b^{n^\varphi} = b^{n^\psi} \quad \text{для всех } a \in A,\ b \in B \text{ и } n \in N.$$

Рассмотрим полупрямое произведение $A \leftthreetimes B$, отвечающее действию φ, то есть группу, состоящую из формальных произведений ab, умножаемых по правилу $(ab)(a_1b_1) = (aa_1)(b^{a_1^\varphi} b_1)$. Элементы вида $nn^{-\psi}$, где $n \in N$, составляют подгруппу полупрямого произведения $A \leftthreetimes B$:

$$(nn^{-\psi})(n_1n_1^{-\psi}) = (nn_1)((n^{-\psi})^{n_1^\varphi} n_1^{-\psi}) = (nn_1)((n^{-\psi})^{n_1^\psi} n_1^{-\psi}) = (nn_1)((n^{-1})^{n_1} n_1^{-1})^\psi = (nn_1)(nn_1)^{-\psi};$$
$$(nn^{-\psi})^{-1} = n^\psi n^{-1} = n^{-1}(n^\psi)^{n^{-\varphi}} = n^{-1}(n^\psi)^{n^{-\psi}} = n^{-1}(n^{n^{-1}})^\psi = n^{-1}n^\psi.$$

Причём эта подгруппа нормальна:

$$(nn^{-\psi})^a = n^a(n^{-\psi})^{a^\varphi} = n^a(n^{-a})^\psi = n^a(n^a)^{-\psi};$$
$$(nn^{-\psi})^b = b^{-1}(nn^{-\psi})b = nb^{-n^\varphi}n^{-\psi}b = nb^{-n^\psi}n^{-\psi}b = nn^{-\psi}.$$

Полупрямым произведением групп B и A (относительно действия φ) с объединёнными (посредством изоморфизма ψ) подгруппами N и N^ψ мы называем факторгруппу

$$A \underset{N = N^\psi}{\leftthreetimes} B \overset{\text{опр}}{=} (A \leftthreetimes B)/\{nn^{-\psi}\ ;\ n \in N\}.$$

Ясно, что эта группа содержит A и B в качестве подгрупп, является их произведением, причём подгруппа B нормальна и $A \cap B = N$.

5. Строение группы $\widehat{G}$

Пусть G и T — группы без кручения и $w = g_1t_1 \ldots g_qt_q \in G * T$ — циклически несократимое обобщённо унимодулярное слово, то есть

$$\prod t_i = t \in \langle t \rangle_\infty * S = R \triangleleft T \quad \text{и } T/R \text{ — группа с сильно однозначным умножением.}$$

Мы изучаем группу

$$\widehat{G} = \langle G, T \mid w = 1 \rangle \overset{\text{опр}}{=} (G * T) \Big/ \left\langle\!\!\left\langle \prod g_it_i \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Опишем сначала основную идею нашего подхода. Группа $G * T$ раскладывается в полупрямое произведение с объединёнными подгруппами:

$$G * T = T \underset{R}{\leftthreetimes} \langle\!\langle G, R \rangle\!\rangle.$$

Нормальное замыкание $\langle\!\langle G, R \rangle\!\rangle$ подгруппы $G * R$ в группе $G * T$ можно представить, в свою очередь, как свободное произведение

$$\langle\!\langle G, R \rangle\!\rangle = \left(\mathop{\ast}_{y \in T/R} G^y \right) * S * \langle t \rangle_\infty.$$

При этом

$$w \in L_1 = \left(\mathop{\ast}_{y \in X_1} G^y \right) * S * \langle t \rangle_\infty, \quad \text{где } X_1 \text{ — некоторое конечное подмножество группы } T/R.$$

Группу $\langle\langle G, R\rangle\rangle$ можно рассматривать как СИПСОП групп L_1^x, где $x \in T/R$. Условие обобщённой унимодулярности гарантирует, что подобное разложение сохранится после факторизации по нормальному замыканию слова w. Дело в том, что факторгруппа группы L_1^x по нормальному замыканию слова w^x задаётся (обычным) унимодулярным относительным копредставлением над группой

$$H_x = \left(\mathop{\ast}_{y \in xX_1} G^y\right) * S.$$

Перейдём теперь к подробному изложению. Разложим T в объединение смежных классов по подгруппе R:

$$T = \coprod_{x \in T/R} c_x R, \quad \text{где } c_1 = 1.$$

Запишем соотношение $\prod t_i g_i = 1$ в виде

$$t \prod_{i=1}^{q} g_i^{\,c_{x_i} r_i} = 1, \tag{2}$$

где $r_i \in R$, $x_i = t_i t_{i+1} \ldots t_q R$ и $c_{x_i} r_i = t_i t_{i+1} \ldots t_q$. Пусть X_1 — это множество всех $x_i \in T/R$, встречающихся в соотношении (2). Для каждого $x \in T/R$ рассмотрим изоморфную копию $G^{(c_x)}$ группы G (подразумевая, что изоморфизм отображает элемент $g \in G$ в элемент $g^{(c_x)} \in G^{(c_x)}$). Возьмём также изоморфную копию $\overline{R} = \langle \overline{t}\rangle_\infty * \overline{S}$ группы $R = \langle t\rangle_\infty * S$. Положим

$$H_1 = \overline{S} * \left(\mathop{\ast}_{y \in X_1} G^{(c_y)}\right)$$

и рассмотрим унимодулярное относительное копредставление

$$\widetilde{H}_1 = \left\langle H_1, \overline{t} \;\middle|\; \overline{t} \prod_i \left(g_i^{\,(c_{x_i})}\right)^{\overline{r}_i} = 1 \right\rangle$$

над группой H_1. Группа $\widetilde{H}_1$ является факторгруппой группы

$$L_1 = H_1 * \langle \overline{t}\rangle_\infty = \overline{R} * \left(\mathop{\ast}_{y \in X_1} G^{(c_y)}\right)$$

по нормальной подгруппе $N_1 = \langle\langle \overline{t} \prod g_i^{\,(c_{x_i})\overline{r}_i} \rangle\rangle$. Рассмотрим теперь свободное произведение

$$L = \overline{R} * \left(\mathop{\ast}_{y \in T/R} G^{(c_y)}\right)$$

и правое действие $\varphi\colon T \to \operatorname{Aut} L$ группы T на L:

$$(\overline{r})^{x^\varphi} = \overline{r^x}, \quad \left(g^{(c_y)}\right)^{x^\varphi} = \left(g^{(c_{yx})}\right)^{\overline{a}}, \tag{3}$$

где $x \in T$, $y \in T/R$, а элемент $a \in R$ однозначно определяется из равенства $c_y x = c_{yx} a$.

Для каждого $x \in T/R$ положим

$$X_x = X_1 x \subseteq T/R, \quad H_x = \overline{S} * \left(\mathop{\ast}_{y \in X_x} G^{(c_y)}\right), \quad L_x = L_1^{\chi^\varphi} = H_x * \langle \overline{t}\rangle_\infty = \overline{R} * \left(\mathop{\ast}_{y \in X_x} G^{(c_y)}\right),$$
$$N_x = N_1^{\chi^\varphi} \triangleleft L_x, \quad \widetilde{H}_x = L_x / N_x,$$

где $\chi \in T$ — это любой представитель элемента $x \in T/R$.

Утверждение 3. *Группы $\widetilde{H}_x$ обладают следующими свойствами:*

1) *все они изоморфны между собой, изоморфизм $\widetilde{H}_1 \to \widetilde{H}_x$ действует так: $\bar{t} \mapsto \overline{t^{c_x}}$, $\bar{s} \mapsto \overline{s^{c_x}}$, $g^{(c_y)} \mapsto \left(g^{(c_{yx})}\right)^{\bar{r}}$, где элемент $r \in R$ однозначно определяется из равенства $c_y c_x = c_{yx} r$;*
2) *группа $\widetilde{H}_x$ задаётся унимодулярным относительным копредставлением над группой, изоморфной H_1 и представляющей собой свободное произведение группы S и p изоморфных копий группы G, где число $p = |X_x| = |X_1|$ равно числу различных смежных классов в наборе*

$$R,\ t_2 t_3 \dots t_q R,\ t_3 t_4 \dots t_q R,\ \dots,\ t_q R;$$

3) *в группе $\widetilde{H}_x$ имеет место разложение*

$$\left\langle \overline{R}, \{G^{(c_y)}\ ;\ y \in Y\} \right\rangle = \overline{R} * \left(\mathop{\ast}_{y \in Y} G_y \right) \tag{4}$$

для каждого собственного подмножества $Y \subset X_x$; в частности, естественное отображение $\overline{R} \to \widetilde{H}_x$ инъективно, если $w \notin T$;

4) *естественные отображения*

$$\widetilde{H}_x = L_x / N_x \to K \overset{\text{опр}}{=} L \bigg/ \left\langle\!\!\left\langle \bigcup_{y \in T/R} N_y \right\rangle\!\!\right\rangle$$

инъективны и группа K является итерированным свободным произведением с объединёнными подгруппами семейства групп $\{\widetilde{H}_x\ ;\ x \in T/R\}$;

5) *СИПСОП K является строгим, если группа G не является циклической.*

Доказательство.

1) Указанное отображение представляет собой действие φ элемента c_x на L. Это отображение переводит группу L_1 в группу L_x. При этом подгруппа $N_1 \triangleleft L_1$ переходит в подгруппу $N_x \triangleleft L_x$, что влечёт изоморфность факторгрупп $\widetilde{H}_1 = L_1/N_1$ и $\widetilde{H}_x = L_x/N_x$.
2) Для группы $\widetilde{H}_1$ это верно по определению. Выполнение этого свойства для группы $\widetilde{H}_x$ следует из изоморфизма $\widetilde{H}_1 \to \widetilde{H}_x$, указанного в пункте 1).
3) Для группы $\widetilde{H}_1$ это свойство немедленно вытекает из следующей леммы.

Лемма 9 ([Кл06а], лемма 1). *Пусть группа H не имеет кручения, $P \subseteq H$ — свободный сомножитель группы H, слово $v \in H * \langle z \rangle_\infty$ унимодулярно и не сопряжено в $H * \langle z \rangle_\infty$ с элементами подгруппы $P * \langle z \rangle_\infty$.*
Тогда $\langle\!\langle v \rangle\!\rangle \cap (P * \langle z \rangle_\infty) = \{1\}$. Другими словами, элемент z *трансцендентен над* P в группе $\widetilde{H} = \langle H, z \mid v = 1 \rangle$.

Для других групп $\widetilde{H}_x$ это свойство следует из изоморфизма $\widetilde{H}_1 \to \widetilde{H}_x$, указанного в пункте 1).

4) Покажем, что семейство подпроизведений $\{L_x \mid x \in T/R\}$ свободного произведения L вместе с подгруппами $N_x \triangleleft L_x$ удовлетворяет условиям утверждения 1. Действительно, условия 1), 2) и 3) этого утверждения непосредственно вытекают из сильной однозначности умножения в группе T/R. Условие (∗∗∗) следует из разложения (4). Таким образом, доказываемое свойство вытекает из утверждения 1.
5) Согласно утверждению 1, достаточно показать, что для каждого $x \in T/R$ и каждого $y \in X_x$ в группе $\widetilde{H}_x$ мы имеем $G^{(c_y)} \not\subseteq \langle \overline{R}, \{G^{(c_z)}\,;\, z \in X_x \setminus \{y\}\}\rangle$. В силу изоморфизма $\widetilde{H}_x \simeq \widetilde{H}_1$ мы можем без ограничения общности положить $x = 1$ и доказывать невозможность включения

$$G^{(c_y)} \subseteq \left\langle \overline{R}, \{G^{(c_z)}\,;\, z \in X_1 \setminus \{y\}\} \right\rangle \quad \text{в группе} \quad \widetilde{H}_1 = \left\langle H_1, \bar{t} \;\middle|\; \bar{t} \prod_i \left(g_i{}^{(c_{x_i})} \right)^{\bar{r}_i} = 1 \right\rangle. \tag{5}$$

Рассмотрим факторгруппу $U = \widetilde{H}_1 / \langle\!\langle \overline{S}, \{G^{(c_z)}\,;\, z \in X_1 \setminus \{y\}\} \rangle\!\rangle$. Группа U задаётся унимодулярным относительным копредставлением над группой $G^{(c_y)}$, поэтому естественное отображение $G^{(c_y)} \to U$ инъективно [Kl93]. Следовательно, включение (5) означало бы, что группа $G^{(c_y)}$, изоморфная группе G, лежит внутри циклической подгруппы $\langle \bar{t} \rangle$ группы U; то есть, группа G является циклической вопреки условию. Утверждение 3 полностью доказано.

Действие φ группы T на L очевидным образом опускается до действия на K, которое мы обозначим той же буквой $\varphi\colon T \to \operatorname{Aut} K$. Это действие согласовано с изоморфизмом $T \supseteq R \simeq \overline{R} \subseteq K$. Действительно, из формул (3) мы видим, что

$$(\bar{r})^{x^\varphi} = \overline{(r^x)} \quad \text{и} \quad \left(g^{(c_y)}\right)^{r^\varphi} = \left(g^{(c_y)}\right)^{\bar{r}} \quad \text{для всех } x \in T,\ y \in T/R \text{ и } r \in R.$$

Теорема 3. *Полупрямое произведение с объединёнными подгруппами* $P = T \underset{R=\overline{R}}{\leftthreetimes} K$, *соответствующее действию* φ *и изоморфизму* $r \mapsto \overline{r}$, *изоморфно группе* $\widehat{G}$. *Изоморфизм* $P \to \widehat{G}$ *тождественен на* T, *переводит подгруппу* $G^{(1)} \subseteq P$ *в подгруппу* $G \subseteq \widehat{G}$ *и подгруппу* $K \triangleleft P$ *в подгруппу* $\langle\langle G, S\rangle\rangle = \langle\langle G, R\rangle\rangle \triangleleft \widehat{G}$.

Доказательство. Группа G вкладывается в P в качестве подгруппы: $G = G^{(1)} \subseteq K \subseteq P$. Согласно определению действия, мы имеем $G^{(c_x)} = G^{c_x}$, значит, соотношение группы $\widetilde{H}_1$, выполненное в K, и равенство $R = \overline{R}$ в группе P дают соотношение (2). То есть отображение, действующее по правилу $G \ni g \mapsto g^{(1)} \in G^{(1)}$ и $T \ni x \mapsto x$, является гомоморфизмом из группы $\widehat{G}$ в P. Обратный гомоморфизм имеет вид $G^{(c_x)} \ni g^{(c_x)} \mapsto g^{c_x}$ и $T \ni x \mapsto x$.

Замечание. Из теоремы 3 и утверждения 3 (свойство 3) следует, что естественное отображение $T \to \widehat{G}$ инъективно, если $w \notin T$. В случае, когда T – свободная группа, этот факт был впервые получен С. В. Ивановым геометрическими методами (неопубликовано).

6. Доказательство теоремы 2

Первое утверждение теоремы непосредственно вытекает из теоремы 3. Докажем второе утверждение. Рассмотрим циклически несократимое обобщённо унимодулярное слово $w = g_1t_1 \dots g_qt_q$ и положим $t = t_1t_2 \dots t_q$. В силу теоремы 1 мы можем без ограничения общности предполагать, что группа T не является циклической.

Случай 1: $q = 1$ и $g_1 = 1$. В этом случае центр группы $\widehat{G} \simeq G * (T/\langle\langle t\rangle\rangle)$ тривиален, если $\langle\langle t\rangle\rangle \neq T$. Если же $\langle\langle t\rangle\rangle = T$, то $R = T$, $S = \{1\}$ (см. определение унимодулярности) и $T = R = \langle t\rangle * S = \langle t\rangle$, что противоречит предположению о нецикличности группы T.

Случай 2: $q = 1$ и $g_1 \neq 1$. В этом случае $T \neq \langle t\rangle$ (поскольку по условию группа T не является циклической),

$$\widehat{G} \simeq G \underset{g_1 = t^{-1}}{\ast} T$$

и утверждение теоремы вытекает из следующего хорошо известного простого факта (см., например, [ЛШ80]):

Лемма 10. *Центр свободного произведения с объединённой подгруппой, которая является собственной в каждом из сомножителей, совпадает с пересечением центров сомножителей.*

Случай 3: $q > 1$ и группа $\langle t_1, \dots, t_q\rangle$ является циклической (и, следовательно, порождается элементом $t = \prod t_i$ в силу унимодулярности). В этом случае группа $\widehat{G}$ представляется в виде свободного произведения с объединённой подгруппой:

$$\widehat{G} \simeq \langle G, t \mid w = 1\rangle \underset{\langle t\rangle}{\ast} T.$$

В силу леммы 10 центр группы $\widehat{G}$ может быть нетривиальным только в случае, когда центр группы $\widetilde{G} = \langle G, t \mid w = 1\rangle$ нетривиально пересекается с $\langle t\rangle$. По теореме 1 нетривиальность центра группы $\widetilde{G}$ означает, что группа G является циклической, что противоречит условию доказываемой теоремы.

Случай 4: группа $\langle t_1, \dots, t_q\rangle$ не является циклической. В этом случае без потери общности можно считать, что $T = \langle t_1, \dots, t_q\rangle$. Мы предполагаем, что группа G не является циклической и хотим доказать, что центр группы $\widehat{G}$ тривиален.

Во-первых отметим, что утверждение достаточно доказать для конечно порождённой группы G. Действительно, группа $\widehat{G}$ раскладывается в свободное произведение с объединёнными подгруппами

$$\widehat{G} = G \underset{\langle g_1, \dots, g_q\rangle}{\ast} \langle \langle g_1, \dots, g_q\rangle * T \mid g_1t_1 \dots g_qt_q = 1\rangle .$$

Если $G \neq \langle g_1, \dots, g_q\rangle$, то из этого разложения вытекает (по лемме 10), что центр группы $\widehat{G}$ содержится в G. С другой стороны, воспользуемся разложением $\widehat{G} = T \underset{R=\overline{R}}{\leftthreetimes} K$ из теоремы 3. В соответствие с описанием группы K (см. раздел 5), группа G содержится в подгруппе H_1 группы K, представляющей собой свободное произведение группы S и нескольких копий группы G:

$$G = G^{(1)} \subseteq H_1 = \overline{S} * \underset{y \in X_1}{\ast} G^{(c_y)} \subset K.$$

Центр группы H_1 может быть нетривиальным лишь в случае, когда $S = \{1\}$ и $|X_1| = 1$. Это означает (по утверждению 3), что $T = R = \langle t\rangle$, то есть группа T является циклической вопреки предположению.

В дальнейшем считаем, что G является конечно порождённой нециклической группой и $q \geqslant 2$. Нам требуется доказать, что центр группы $\widehat{G}$ тривиален. Снова воспользуемся теоремой 3. Пусть fy — центральный элемент группы $\widehat{G} = T \underset{R=\overline{R}}{\leftthreetimes} K$, где $y \in T$ и $f \in K$. Согласно утверждению 3 группа K является строгим итерированным свободным произведением с объединёнными подгруппами семейства групп $\{\widetilde{H}_x\,;\, x \in T/R\}$. Элемент $f \in K$ переставляет сомножители:

$$\widetilde{H}_x^f = \widetilde{H}_x^{y^{-1}} = \widetilde{H}_{xy^{-1}}.$$

Следовательно, $f \in \widetilde{H}_z$ для некоторого $z \in T/R$ (по утверждению 2). Центральность элемента fy теперь означает, что

$$\widetilde{H}_z = \widetilde{H}_z^{fy} = \widetilde{H}_z^{y} = \widetilde{H}_{zy}.$$

Согласно утверждению 2 такое равенство может выполняться лишь при $z = zy \in T/R$. Отсюда мы получаем, что $y \in R$ и $fy \in Z(K)$. Снова воспользовавшись утверждением 2, мы видим, что $fy \in Z(\widetilde{H}_z)$ при некотором $z \in T/R$. Для завершения доказательства остаётся вспомнить, что согласно теореме 1 центр группы $\widetilde{H}_z \simeq \widetilde{H}_1$ может быть нетривиальным лишь в случае когда группа H_1 является циклической, что противоречит предположению о нецикличности группы $G \simeq G^{(1)} \subseteq H_1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Б81] Бродский С. Д. Аномальные произведения локально индикабельных групп. Алгебраические системы. Ивановскии государственный университет. Иваново. 1981. С.51–77.

[Б84] Бродский С. Д. Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. ж. 1984. Т.25. №2. С.84–103.

[Кл05] Клячко Ант. А. Гипотеза Кервера–Лауденбаха и копредставления простых групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44. №4. С. 399–437. См. также arXiv:math.GR/0409146

[Кл06a] Клячко Ант. А. Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами // Мат. заметки. 2006. Т.79. №3. С. 409–419. См. также arXiv:math.GR/0406382.

[Кл06b] Клячко Ант. А. SQ-универсальность относительных копредставлений с одним соотношением // Мат. сборник. 2006. Т.197. №10. С.87–108. См. также arXiv:math.GR/0603468.

[Кл07] Клячко Ант. А. Свободные подгруппы относительных копредставлений с одним соотношением // Алгебра и логика. 2007. Т.46. №3. С.290–298. См. также arXiv:math.GR/0510582.

[ЛШ80] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[BaTa68] Baumslag G., Taylor T. The centre of groups with one defining relator // Math. Ann. 1968. V.175. P.315–319.

[BoP92] Bogley W. A., Pride S. J. Aspherical relative presentations // Proc. Edinburgh Math. Soc. II. 1992. V.35. no.1. P.1–39.

[CoLy63] Cohen D. E., Lyndon R. C. Free bases for normal subgroups of free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V.108. P.528–537.

[CR01] Cohen M. M., Rourke C. The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups // Geometry & Topology. 2001. V.5. P.127–142. См. также arXiv:math.GR/0009101

[DuH93] Duncan A.J, Howie J. One-relator products with high-powered relator, in: Geometric group theory (G.A.Niblo, M.A.Roller, eds.), P.48–74, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).

[FeR96] Fenn R., Rourke C. Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups // L'Enseignment Mathématique. 1996. T.42. P.49–74.

[FoR05] Forester M., Rourke C. Diagrams and the second homotopy group // Comm. Anal. Geom. 2005. V.13. P.801-820. См. также arXiv:math.AT/0306088

[How83] Howie J. The solution of length three equations over groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1983. V.26. P.89–96.

[How87] Howie J. How to generalize one-relator group theory, in: Combinatorial group theory and topology (S.M. Gersten and J.R. Stallings, eds.), P.53–78, Ann. of Math. Stud., 111, Princeton Univ. Press, (1987).

[Kl93] Klyachko Ant. A. A funny property of a sphere and equations over groups // Comm. Algebra. 1993. V.21. P.2555–2575.

[Met01] Metaftsis V. On the structure of one-relator products of locally indicable groups with centre // J. Pure Appl. Algebra. 2001. V.161. No.3. P.309–325.

[Mu64] Murasugi K. The center of a group with a single defining relation // Math.Ann. 1964. V.155. P.246–251.

[Pi74] Pietrowski A. The isomorphism problem for one-relator groups with non-trivial centre // Math.Z. 1974. V.136. P.95–106.

[Pr88] Promyslow S. D. A simple example of a torsion free nonunique product group // Bull. London Math. Soc. 1988. V.20. P.302–304.

[RS87] Rips E., Segev Y. Torsion free groups without unique product property // J. Algebra 1987. V.108. P.116–126.