УДК 512.543.16 MSC: 20F06, 20F12, 20F67

КОММУТАТОР НЕ МОЖЕТ БЫТЬ СТЕПЕНЬЮ В ГРУППЕ БЕЗ КРУЧЕНИЯ С МЕТРИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ МАЛОГО СОКРАЩЕНИЯ

Антон А. Клячко[♯] Елизавета В. Френкель[♭]

[♯] *Механико-математический факультет* [♭] *Факультет дополнительного образования*

Московского государственного университета, Москва 119991, Ленинские горы, МГУ

klyachko@mech.math.msu.su *lizzy.frenkel@gmail.com*

Неединичный коммутатор не может быть истинной степенью в группе без кручения с условием малого сокращения $C'(\lambda)$ при достаточно маленьких λ.

0. Введение

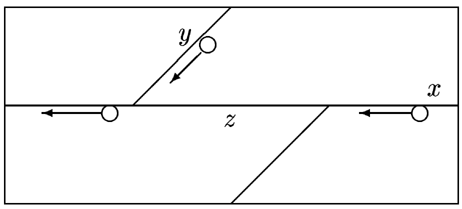
Хорошо известно, что в свободной группе неединичные коммутаторы не являются истинными степенями [Sch59]. В свободных произведениях групп ситуация сложнее, но тоже полностью изучена [CER94]. Для свободных произведений с объединёнными подгруппами известны частичные результаты на эту тему [FRR11]. Мы доказываем следующий факт.

Теорема. *Если группа без кручения обладает копредставлением, удовлетворяющим условию малого сокращения $C'(\lambda)$ с достаточно маленьким λ, то в этой группе никакой неединичный коммутатор не является истинной степенью.*

Напоминаем, что копредставление $\langle X \mid R\rangle$ удовлетворяет *условию малого сокращения* $C'(\lambda)$, если оно симметризовано (то есть множество R вместе с каждым определяющим соотношением r, содержит обратное к нему соотношение r^{-1} и все циклические сдвиги соотношения r) и для любых двух разных определяющих соотношений длина их общего начала меньше длины каждого из этих соотношений, умноженной на λ (см. [ЛШ80], например).

Наше доказательство основано на использовании диаграмм ван Кампена и леммы о столкновениях [Kl93] (см. также [FeR96]), которая ранее применялась для решения совсем других задач (см., например, [CG95], [FeR96], [Kl97], [FeR98], [CG00], [CR01], [FoR05], [Кл05], [Кл06a], [Кл06b], [Кл07], [Kl09], [Le09] и [KlL12]), а именно, для изучения уравнений над группами и относительных копредставлений.

Суть нашего подхода мы попытаемся сейчас объяснить на «игрушечном» примере. Допустим, мы хотим показать, что неединичный коммутатор не может быть кубом в свободной группе $F(a,b)$. Предположим противное. По теореме Уикса [Wic62] некоторая циклическая перестановка любого циклически несократимого слова, являющегося коммутатором, графически имеет вид $xyzx^{-1}y^{-1}z^{-1}$, где x, y и z — некоторые несократимые слова. Таким образом мы имеем графическое равенство вида $xyzx^{-1}y^{-1}z^{-1} = www$. Геометрически эту ситуацию можно описать следующим образом. На торе имеется граф, все вершины которого имеют степень два, кроме двух вершин, степень которых равна трём, или кроме одной вершины, степень которой четыре (это соответствует ситуации, когда одно из слов x,y,z пустое). Рёбра графа ориентированы и помечены буквами a и b. Дополнение до этого графа гомеоморфно диску:



(на рисунке тор изображён как прямоугольник с отождествлёнными противоположными сторонами). Границу этого диска объезжают против часовой стрелки три автомобиля, которые движутся равномерно со скоростью одно ребро в минуту. Это движение периодично с периодом $|w|$, то есть через каждые $|w|$ минут автомобили циклически меняются местами (за $|w|$ минут каждый автомобиль «прочитывает» слово w). По лемме о столкновениях (см. параграф 2) при любом таком периодическом движении на торе автомобили должны где-то столкнуться. Столкновение может произойти только в вершине, так как если какой-то автомобиль находится внутри ребра с меткой, например, a и проезжает его, например, в положительном направлении (относительно ориентации этого ребра), то все остальные автомобили в этот момент времени также находятся на ребрах с меткой a и проезжают их также в положительном направлении (и, значит, столкнуться не могут). Столкновения же в вершине, как нетрудно заметить, противоречит несократимости метки границы диска (то есть слова $xyzx^{-1}y^{-1}z^{-1}$).

Работа первого автора была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №11-01-00945.

В случае несвободной группы ситуация осложняется тем, что вместо простейшего графа, изображённого выше, мы имеем диаграмму ван Кампена. Однако для групп с условием малого сокращения эта диаграмма оказывается тонкой и очень похожей на изображённый выше граф (см. рис. 2), что и позволяет нам применить автомобильную технику, но рассуждения заметно усложняются.

Мы будем пользоваться принципом малого параметра (как в [Оль89]), то есть мы считаем фиксированными маленькие положительные числа $\lambda \ll \lambda_1 \ll \lambda_2 \ll \lambda_3 \ll \lambda_4 \ll \lambda_5 \ll \lambda_6 \ll \lambda_7 \ll 1$ и всякий раз, когда возникает какое-нибудь неравенство, например, $2013\lambda_2 < \lambda_3$, мы считаем его автоматически выполненным по выбору λ_i. Для удобства читателей мы приводим здесь краткий справочник по этим параметрам.

Параметр	*Понятие*	§
λ	$C'(\lambda)$	0, 1, 3
λ_1	Модель	1
λ_2	Расстояние по улицам	1
λ_3	Очень близко	4
λ_4	Близко	4
λ_5	Существенно особый город	3
λ_6	Глобально очень близко	4
λ_7	Глобально близко	4

Авторы благодарят Г. О. Астафурова за полезные замечания.

1. Карты с условием малого сокращения на торе с дыркой

Картой на замкнутой поверхности мы называем конечный граф на этой поверхности, который делит поверхность на односвязные области, называемые *клетками* или *гранями*; причём несколько (возможно, ноль) клеток выделены и называются *внешними клетками* или *дырами*, остальные клетки называются *внутренними*. *Граница* $\partial\Gamma$ и *периметр* $|\partial\Gamma|$ клетки Γ определяются естественным образом.

Куском называется простой путь ненулевой длины в карте (то есть в соответствующем графе), соединяющий две вершины (возможно, совпадающие) степени, отличной от двух, и не проходящий через другие вершины степени, отличной от двух.

Мы будем говорить, что карта без вершин степени один *удовлетворяет условию* $C'(\lambda)$ или является $C'(\lambda)$-*картой*, где λ — неотрицательное вещественное число, если длина любого общего куска границы двух внутренних клеток Γ_1 и Γ_2, меньше $\lambda|\partial\Gamma_1|$, а длина любого куска, разделяющего внутреннюю клетку Γ и дыру, не превосходит $(\frac{1}{2}+\lambda)|\partial\Gamma|$.

Далее мы будем рассматривать карты на торе с единственной дырой.

Лемма 1. *Если $\lambda \ll 1$, то каждая внутренняя клетка $C'(\lambda)$-карты на торе с дырой граничит с дырой хотя бы по двум кускам.*

Доказательство. Нам понадобится следующее простое, но полезное утверждение, называемое иногда комбинаторной формулой Гаусса–Боне.

Весовой тест [Ger87], [Pri88], см. также [MCW02]. *Если каждому углу c некоторой карты на замкнутой поверхности S поставлено в соответствие число $\nu(c)$* (которое мы будем называть *весом* или *величиной угла c*), *то*

$$\sum_v K(v) + \sum_D K(D) = 2\chi(S).$$

Здесь суммирования распространяются на все вершины v и все клетки D рассматриваемой карты, а величины $K(v)$ и $K(D)$ называемые **кривизнами** *соответствующей вершины и клетки определяются так:*

$$K(v) \overset{\text{опр}}{=} 2 - \sum_c \nu(c), \qquad K(D) \overset{\text{опр}}{=} 2 - \sum_c (1-\nu(c)),$$

где первая сумма распространяется на все углы при вершине v, а вторая — на все углы клетки D. Здесь $\chi(S)$ — это эйлерова характеристика поверхности S.

Продолжим доказательство леммы 1. Припишем каждому углу c величину $\nu(c)$ по следующему правилу:
- все углы дыры имеют величину 1;
- каждый угол внутренней клетки, находящийся при вершине степени $k+l$, при которой имеется k углов дыры и $l > 0$ углов внутренних клеток, имеет величину $\nu(c) = \frac{2-k}{l}$.

Таким образом, дыра имеет кривизну 2, а каждая вершина имеет неположительную кривизну, причём кривизна нулевая, если при вершине есть хотя бы один угол внутренней клетки. Поскольку эйлерова характеристика тора равна нулю, весовой тест показывает, что

суммарная кривизна всех внутренних клеток не меньше минус двух.

Шаг 1. Кривизна внутренней клетки не может быть положительной.

Рассмотрим гипотетическую внутреннюю клетку Γ с положительной кривизной. Если граница этой клетки состоит из d кусков, то её кривизна не больше чем $2 - \frac{1}{3}d$ (см. рис. 0). Значит, кривизна такой клетки может быть положительной, только если $d \leqslant 5$. Такая клетка обязана граничить с дырой, поскольку иначе получается противоречие с условием малого сокращения. Если клетка по одному куску граничит с дырой, то

$$0 < K(\Gamma) \leqslant 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(d-2) = 1 - \frac{1}{3}(d-2), \quad \text{то есть} \quad d \leqslant 4. \qquad (*)$$

По определению $C'(\lambda)$-карты длина общего куска границы клетки Γ с дырой не превосходит примерно половины периметра этой клетки, а длина каждого из не больше чем трёх остальных кусков границы меньше $\lambda|\partial\Gamma|$, что опять приводит к противоречию в силу малости λ. Если же клетка Γ имеет по крайней мере два участка границы с дырой, то на концах этих кусков клетка Γ имеет либо четыре угла веса $\leqslant \frac{1}{2}$, либо два угла с весами $\leqslant \frac{1}{2}$ и один угол веса $\leqslant 0$, либо два угла веса $\leqslant 0$ (рис. 0). Таким образом $K(\Gamma) \leqslant 0$.

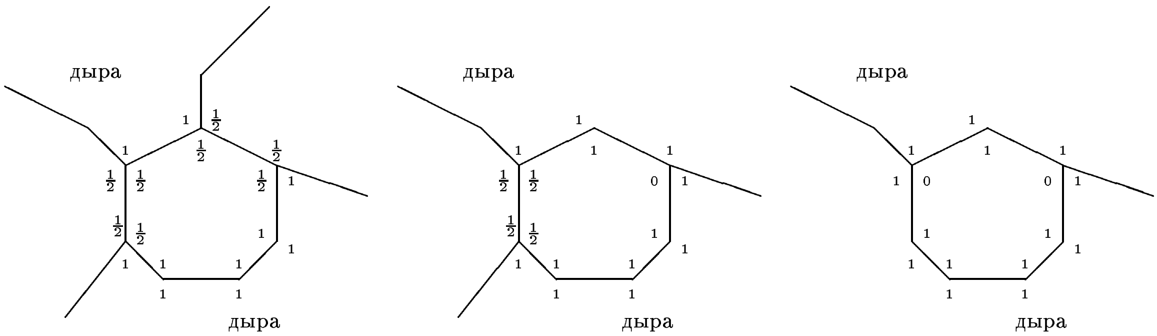


Рис. 0

Шаг 2. Завершение доказательства. Каждая внутренняя клетка граничит с дырой хотя бы по двум кускам.

Действительно, в противном случае клетка имела бы очень большую отрицательную кривизну (как показывает второе неравенство в формуле $(*)$, поскольку $d \gg 1$ в силу условия малого сокращения), а это противоречит тому, что внутренние клетки имеют неположительную кривизну, а сумма их кривизн не меньше минус двух. Лемма доказана.

Назовём внутреннюю клетку *неособой*, если её граница имеет два общих куска с границей дыры. Назовём внутреннюю клетку *1-особой*, если её граница имеет три общих куска с границей дыры. Назовём внутреннюю клетку *2-особой*, если её граница имеет четыре общих куска с границей дыры.

Лемма 2. *Если $\lambda \ll 1$, то у любой $C'(\lambda)$-карты на торе с дырой каждая внутренняя клетка либо неособая, либо 1-особая, либо 2-особая. При этом особых клеток не больше двух, а если есть 2-особая клетка, то других особых клеток нет. Кроме того, все вершины, кроме быть может двух, относятся к одному из следующих классов: вершины степени два; вершины степени три, лежащие на границе дыры; вершины степени четыре, при которых ровно два угла являются углами дыры, причём эти углы несмежны.*

Доказательство. Снова воспользуемся весовым тестом, но припишем углам веса немного по-другому:

- угол внутренней клетки при вершине степени > 2, смежный одному углу дыры, имеет величину $\frac{1}{2}$;
- угол внутренней клетки при вершине степени > 2, смежный двум углам дыры, имеет величину 0;
- все остальные углы имеют величину 1.

Кривизна каждой вершины окажется неположительной (если вершина лежит на границе дыры, то при ней имеется угол величины 1 и либо два угла величины $\frac{1}{2}$, либо ещё один угол величины 1; если же вершина не лежит на границы дыры, то все углы при ней имеют величину один). Кривизна дыры окажется равной двойке, так как все углы дыры имеют величину один. Кривизна внутренней грани окажется неположительной по лемме 1. Кривизна неособой, 1-особой и 2-особой клетки равна 0, -1 и -2, соответственно. Кривизны других гипотетических клеток (ещё более особых) не превосходят -3.

Кривизна же каждой вершины, не относящейся ни к одному из перечисленных классов, окажется не больше чем -1. Но в соответствии с весовым тестом суммарная кривизна должна быть нулевой, что и доказывает лемму.

Лемма 3. *Рёбра, не лежащие на границе дыры, образуют лес, имеющий не больше двух вершин степени большей чем два.*

Доказательство. Если есть цикл из рёбер, не лежащих на границе дыры, то, разрезав тор по этому циклу, мы получим либо сферу с тремя дырами, либо тор с дырой и сферу с двумя дырами, либо тор с двумя дырами и сферу с дырой. При этом ко всем дырам, кроме одной, в сферической части каждая клетка примыкает слабо в силу условия малого сокращения (так как цикл, по которому был произведён разрез, состоял не более чем из четырёх кусков по лемме 2).

Стянув новые дыры в точку, мы получим $C'(\lambda_1)$-карту на сфере без дыр или с одной дырой, чего, конечно, не может быть при малых λ_1. Таким образом, циклов нет и мы имеем дело с лесом. Количество вершин степени больше чем два в этом лесе не превосходит двойки по лемме 2. Лемма доказана.

Стянем в точку каждое ребро, не лежащее на границе дыры. Из леммы 3 следует, что при этом поверхность останется тором. Полученную карту будем называть *моделью* исходной карты на торе. Внутренние клетки модели будем называть *городами*, вершины, при которых имеется более двух углов дыры, назовём *перекрёстками*, а куски границы дыры, по обе стороны от которых расположена дыра, назовём *автострадами*. Каждая автострада соединяет либо два города, либо два перекрёстка, либо город и перекрёсток. Вставим в модель «автострады нулевой длины» так, чтобы все вершины получившейся карты имели степень два или три; например, если при некоторой вершине степени четыре имеется два угла городов, то будем считать, что эти два города соединены автострадой нулевой длины. Аналогично, мы считаем, что город и перекрёсток соединены автострадой нулевой длины, если перекрёсток лежит на границе города; а перекрёсток степени 4 будем считать парой тройных перекрёстков, соединённых автострадой нулевой длины.

Таким образом, модель представляет собой карту на торе, клетки которой — это дыра и города. По лемме 2 из каждого города выходит две (*неособый город*), три (*1-особый город*) или четыре (*2-особый город*) автострады, каждая из которых ведёт к другому (или тому же) городу или к перекрёстку (степени три).

Отметим, что из леммы 3 следует, что периметр каждого города примерно равен (с точностью до λ_1 умножить на периметр) периметру исходной клетки, из которой этот город получен стягиванием рёбер.

Лемма 4. *В полученной модели имеется*

либо два 1-особых города и ни одного перекрёстка,

либо один 2-особый город и ни одного перекрёстка,

либо один 1-особый город и один тройной (*то есть степени три*) *перекрёсток,*

либо ни одного особого города и два тройных перекрёстка (см. рис. 1).

На рисунке 1 тор представлен в виде квадрата с отождествлёнными сторонами. Буквой «o» на рисунке 1 помечены особые города, а на пунктирные линии пока не нужно обращать внимание.

Доказательство. Припишем веса так же, как в лемме 2. Тогда перекрёстки и 1-особые города будут иметь кривизну -1, 2-особые города — -2, дыра — 2, а все остальные города и вершины будут иметь нулевую кривизну, поэтому утверждение немедленно вытекает из весового теста.

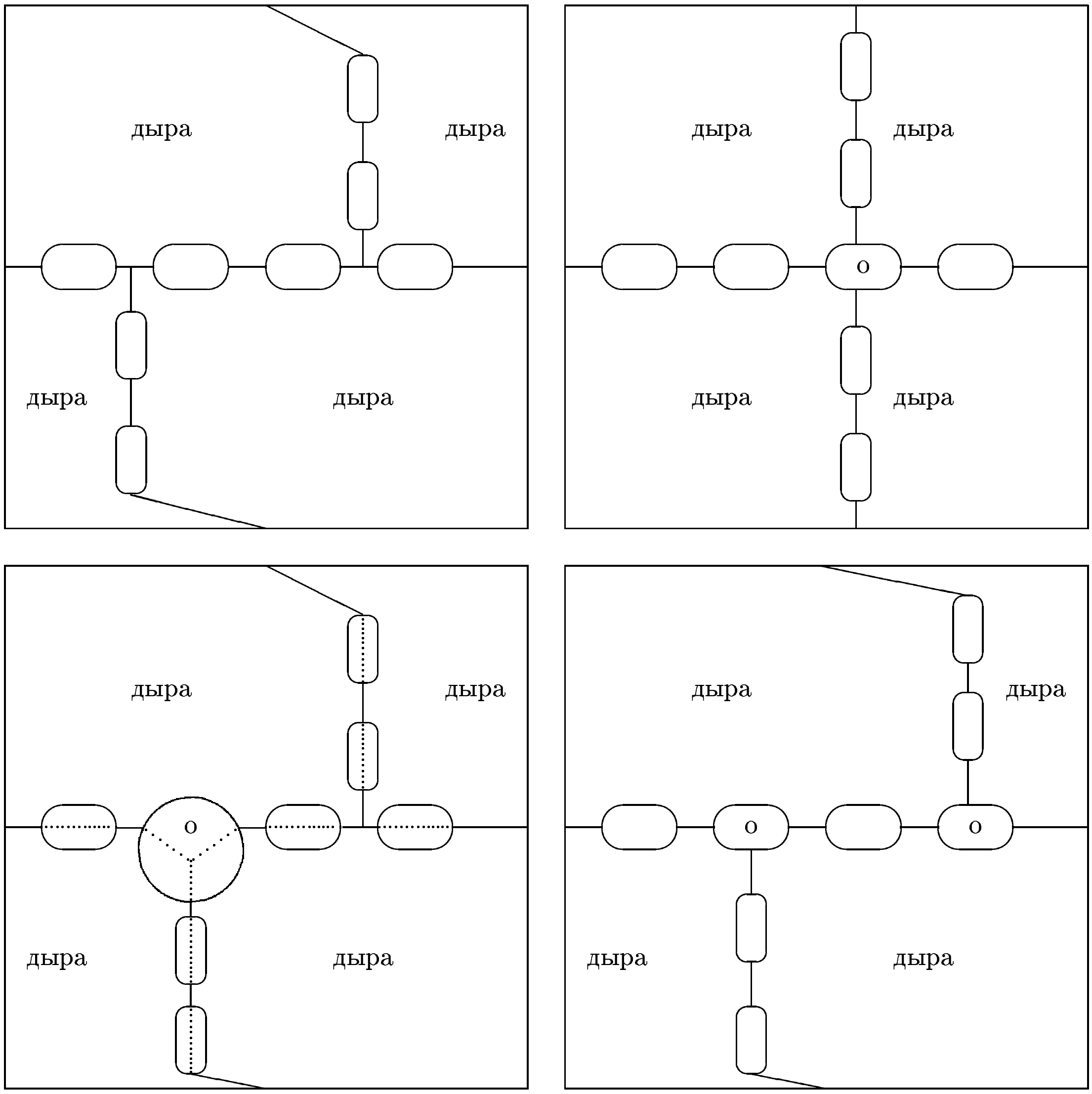


Рис. 1

Примерное изображение исходной $C'(\lambda)$-карты можно увидеть на рисунке 2, где места соединения «цепочек» закрыты чёрными кружками, за которыми имеются особые клетки или перекрёстки.

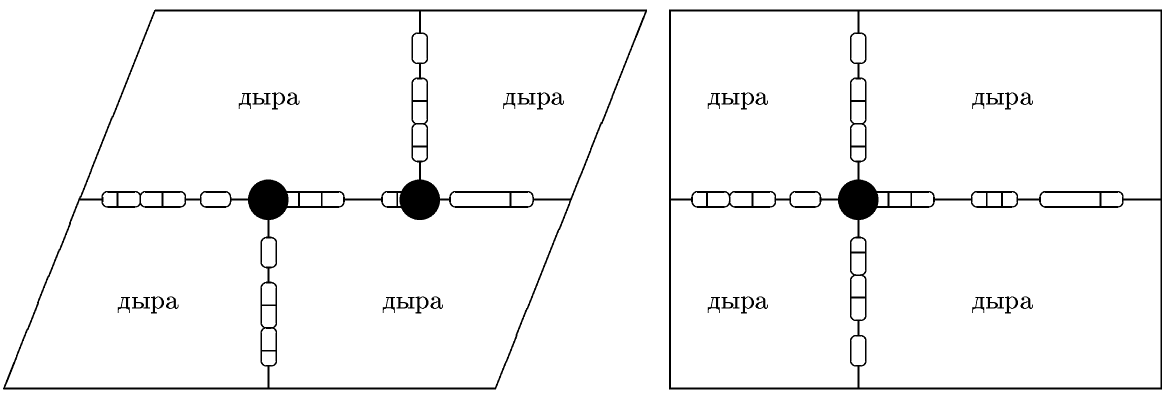


Рис. 2

2. Движения

Все определения и утверждения этого параграфа мы позаимствовали из работы [Кл05] (слегка упростив их применительно к интересующему нас здесь случаю).

Пусть на замкнутой ориентированной поверхности S имеется карта M. *Автомобилем*, объезжающим грань D этой карты, называют сохраняющее ориентацию накрытие границы ∂D грани D ориентированной окружностью R (*окружностью времени*).

Говоря по-простому, автомобиль объезжает границу своей грани против часовой стрелки (внутренность грани остается слева от автомобиля), не разворачиваясь и не останавливаясь. При этом движение периодично.

Если число автомобилей, оказавшихся в момент времени t в точке p одномерного остова поверхности S, равно кратности этой точки, то мы говорим, что в точке p в момент t происходит *полное столкновение*. При этом точка p называется *точкой полного столкновения*. Точки полного столкновения, лежащие на ребрах, мы называем просто *точками столкновения*.

Кратным движением периода T на карте M называется набор автомобилей $\alpha_{D,j}: R \to \partial D$, где $j = 1, \ldots, d_D$, такой что

1) $d_D \geqslant 1$ (то есть каждую грань объезжает по крайней мере один автомобиль);
2) $\alpha_{D,j}(t+T) = \alpha_{D,j+1}(t)$ для любого $t \in R$ и $j = \{1, \ldots, d_D\}$ (здесь индексы берутся по модулю d_D, а сложение точек окружности R производится естественным образом: $R = \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$);
3) существует такое разбиение каждой из окружностей ∂D на d_D дуг (с непересекающимися внутренностями), что на протяжении интервала времени $[0, T]$ каждый автомобиль $\alpha_{D,j}$ движется по j-й дуге.

Лемма о столкновениях [Кл05], [Kl97]. *Для любого кратного движения на карте на замкнутой ориентированной поверхности S число точек полного столкновения не меньше чем*

$$\chi(S) + \sum_D (d_D - 1),$$

где сумма распространяются на все грани D карты.

3. Диаграммы ван Кампена, автобусы и таксомоторы

Приступим к доказательству теоремы. Предположим, что некоторая истинная степень $w^n \neq 1$ является коммутатором в $C'(\lambda)$-группе $G = \langle X \mid R \rangle$ без кручения. Отсутствие кручения в группах с малым сокращением равносильно тому, что никакое соотношение не является истинной степенью (см. [ЛШ80], например). Хорошо известно и легко доказывается, что слово является коммутатором в группе $G = \langle X \mid R \rangle$ тогда и только тогда, когда оно может быть прочитано на контуре дыры некоторой диаграммы ван Кампена на торе с дырой. Если группа удовлетворяет условию $C'(\lambda)$, то эта диаграмма ван Кампена является $C'(\lambda)$-картой, как показывает следующая (вероятно) известная лемма, доказательство которой мы приводим для полноты.

Лемма о степенях. *Пусть копредставление $G = \langle X \mid R \rangle$ удовлетворяет условию $C'(\lambda)$, где $\lambda \ll 1$, группа G не имеет кручения, слово w не сопряжено в группе G никакому слову меньшей длины и $n \in \mathbb{N}$. Тогда если слово v является общим началом одного из определяющих соотношений $r \in R$ и слова w^n, то $|v| < \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)|r|$.*

Доказательство. Слово v, будучи началом слова w^n, имеет вид $v = w^k t$, где t — начало слова w. Если $k = 0$, то $|v| \leqslant \frac{1}{2}|r|$ в силу несократимости слова w (и его начала t). Пусть $k \geqslant 1$. Тогда слово w^{k-1} является куском (входит дважды в слово r). Поэтому из условия малого сокращения следует, что $|w^{k-1}| = (k-1)|w| < \lambda|r|$. Если $k > 1$, то мы получаем, что $|w| < \lambda|r|$ и $|v| = |w^k t| = |w^{k-1}| + |w| + |t| < 3\lambda|r|$. Поэтому при достаточно маленьких λ доказываемое неравенство выполнено. Если же $k = 1$, то есть $v = wt$, то слово t является куском и, следовательно, $|t| < \lambda|r|$. Доказываемое неравенство теперь следует из того, что $|w| \leqslant \frac{1}{2}|r|$ в силу несократимости слова w.

Рассмотрим модель (рис. 1) карты. На границе дыры этой модели естественным образом определяется движение n автомобилей, которые мы будем теперь называть *автобусами*. Каждый автобус движется со скоростью одно ребро в минуту и в течении i-й минуты проезжает ребро, метка которого есть i-я буква слова w (где i рассматривается по модулю $|w|$). Это периодическое движение с периодом $|w|$.

Проведём теперь внутри каждого города дополнительные рёбра, называемые *улицами*, так, чтобы улицы каждого города образовывали дерево, соединяющее выезды из города (то есть множество вершин степени один этого дерева должно совпадать с множеством концов автострад, лежащих на границе города). Сделаем это так, чтобы расстояние по улицам между любыми двумя соседними выездами из города было примерно равно (с точностью до λ_2 на периметр города) расстоянию между этими выездами по границе города. Ясно, что это можно сделать, так как каждый кусок границы города составляет не сильно больше половины его периметра (то есть $\leqslant (\frac{1}{2}+\lambda_2)|\partial\Gamma|$). Улицы и автострады образуют карту (с одной клеткой) на торе. Смотрите рисунок 1 (левый нижний вариант), на котором улицы нарисованы пунктиром. Вершины степени больше чем два, возникшие в особых городах, мы тоже будем считать *перекрёстками*, начиная с этого момента. Перекрёсток (улиц) степени четыре мы будем считать парой перекрёстков степени три, соединённых автострадой нулевой длины. Будем называть особый город Γ *существенно особым*, если все перекрёстки улиц в нём находятся дальше чем $\lambda_5|\partial\Gamma|$ от границы.

На этой карте мы определим движение n автомобилей, называемых *таксомоторами*. По автостраде таксомотор едет так же, как соответствующий автобус, а въехав в город, таксомотор начинает двигаться по улицам с постоянной (примерно единичной) скоростью так, чтобы выехать из города одновременно с соответствующим автобусом (который едет в это время по границе города). На рисунке 3 в виде круга изображён город (особый) и положения автобуса (чёрный кружок) и таксомотора (белый кружок) в четыре довольно близких момента времени.

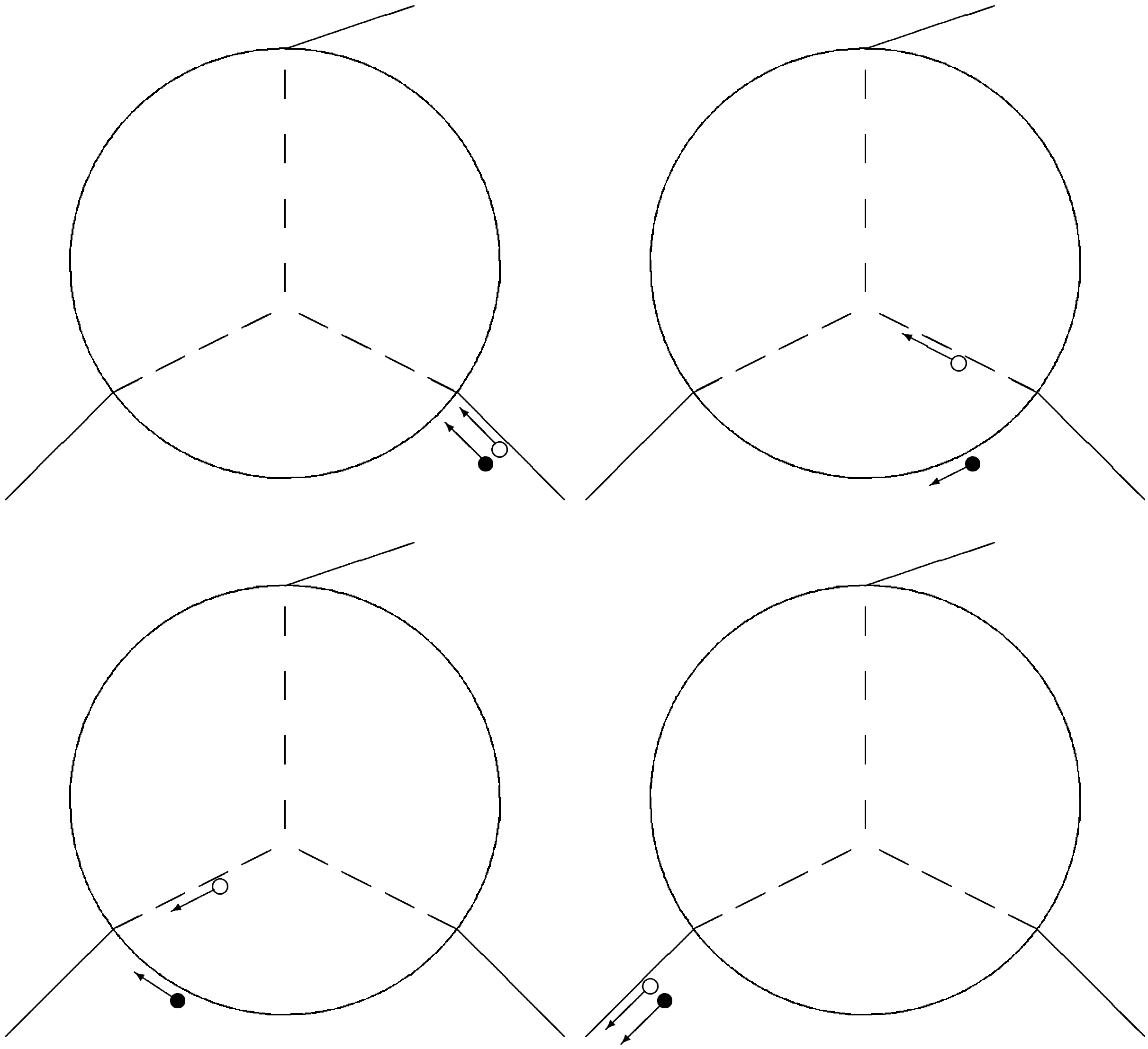


Рис. 3

4. Близость

Пусть x и y — точки графа, образованного автострадами, улицами и границами городов. Мы будем говорить, что точка x расположена (*локально*) *близко от точки* y, если либо $x = y$, либо точка y лежит в некотором городе*) Γ и расстояние в графе между точками x и y не превосходит $\lambda_4|\partial\Gamma|$. Если это расстояние не превосходит $\lambda_3|\partial\Gamma|$, то мы будем говорить, что точка x расположена (*локально*) *очень близко от точки* y.

Мы будем говорить, что точки x и y расположены *глобально близко* друг от друга, если расстояние между ними не превосходит $\lambda_7|w|$, где $|w|$ — это период движения. Если это расстояние не превосходит $\lambda_6|w|$, то мы

*) Точки, находящиеся на нулевом расстоянии от города, тоже считаются лежащими в городе.

будем говорить, что эти точки расположены *глобально очень близко*. Отметим, что если точка x расположена близко от точки y, то эти точки глобально очень близки.

5. Где происходят столкновения?

Лемма о столкновениях гарантирует, что по крайней мере в $n-1$ точке произойдёт полное столкновение таксомоторов (так как карта, образованная улицами и автострадами, имеет одну клетку, по границе которой правильно едут n таксомоторов, а эйлерова характеристика тора равна нулю). Остается понять, где такие столкновения могут происходить.

Лемма о столкновениях вдалеке от перекрёстков. *Пусть таксомоторы сталкиваются в точке p, которая не является перекрёстком. Тогда точка p находится в городе и либо очень близко от неё есть перекрёсток, либо она лежит на автостраде нулевой длины, соединяющей два разных особых города с одинаковыми метками* (то есть метки соответствующих клеток исходной диаграммы равны, если их читать, начиная от точки p).

Доказательство. Разберем несколько случаев.

I. *Столкновение не может произойти на автостраде ненулевой длины вне перекрестка.*

В самом деле, пусть произошло столкновение таксомоторов на ребре, помеченном буквой x. Так как таксомоторы по автострадам едут так же, как автобусы, это означает, что один из автобусов проезжает в момент столкновения ребро с меткой x, а другой автобус движется навстречу ему в противоположном направлении, то есть проезжает ребро с меткой x^{-1}. Но это противоречит определению движения, так как все автобусы в каждый момент времени проходят ребра с одинаковыми метками. Столкновение в некоторой вершине на автостраде также невозможно, поскольку опять же по определению движения автобусов это означало бы, что слово w имеет участок xx^{-1}, что противоречит предположению о редуцированности w.

II. *Если два таксомотора столкнулись в городе Γ, то по крайней мере один из них покинет город не позже чем через $\lambda_1|\partial\Gamma|$ минут после столкновения.*

Действительно, по условию $C'(\lambda_1)$ граница города Γ не имеет двух участков с одинаковыми метками длины $\lambda_1|\partial\Gamma|$ или больше. Поэтому два таксомотора не могут одновременно находиться в одном городе дольше чем $\lambda_1|\partial\Gamma|$ минут.

III. *Если два таксомотора столкнулись в городе Γ и столкновение произошло дальше чем $\lambda_2|\partial\Gamma|$ от перекрестка, то в течении $\lambda_1|\partial\Gamma|$ минут после столкновения город Γ покинет ровно один из столкнувшихся таксомоторов.*

В самом деле, если оба таксомотора покидают город в течении $\lambda_1|\partial\Gamma|$ минут, то расстояние между двумя въездами в город не превосходит $\lambda_2|\partial\Gamma|$. Такое возможно только в особом городе вблизи перекрестка (так как в неособом городе расстояние между двумя въездами примерно равно половине периметра, а в особом городе между двумя въездами всегда есть перекрёсток).

IV. *Автострада r, по которой один из столкнувшихся таксомоторов покинет город Γ в течении $\lambda_1|\partial\Gamma|$ минут, имеет длину не больше $\lambda_2|\partial\Gamma|$.*

Действительно, предположим, что эта автострада длинная. Тогда на ней можно выбрать участок s длины большей $\lambda_1|\partial\Gamma|$ такой, что незадолго перед столкновением один из автобусов проезжает участок s, тогда как другой в это время движется по $\partial\Gamma$, а вскоре после столкновения один из автобусов будет проезжать участок s (в противоположном направлении), тогда как другой в это время будет двигаться по $\partial\Gamma$. Это означает, что метка контура клетки Γ содержит и f, и f^{-1} в качестве подслов, где f — метка участка s, что невозможно по условию малого сокращения.

V. *Автострада r ведёт в город Δ, метка*) которого равна метке города Γ.*

Действительно, вскоре после столкновения один из автобусов проедет автостраду r и будет двигаться по границе города Δ по крайней мере $\lambda_1|\partial\Gamma|$ минут (так как мы предполагаем, что близко от точки p нет перекрёстков), а другой автобус в это время будет ехать по границе города Γ. Из условия малого сокращения вытекает, что метки городов Γ и Δ равны.

VI. *Автострада r имеет нулевую длину.*

Как мы уже видели, один из автобусов едет от точки $A \in \partial\Gamma$ до точки $B \in \partial\Delta$, а другой автобус в это время едет от точки $A' \in \partial\Delta$ до точки $B' \in \partial\Gamma$ (рис. 4). Каждый из них проходит за это время путь с одной и той же меткой u. При этом метки городов Γ и Δ равны, если их читать, начиная с точек A и A'; причём то же верно, если читать метки городов, начиная с точек B' и B. Значит, метка v участка границы города Γ от B' до A (против часовой стрелки) равна метке участка границы города Δ от B до A'. Следовательно, $(uv)^2 = 1$ в свободной группе. Это означает, что $uv = 1$ в свободной группе. Стало быть, автострада r имеет нулевую длину в силу несократимости.

*) Меткой города мы называем метку соответствующей клетки исходной диаграммы, то есть одно из определяющих соотношений группы G.

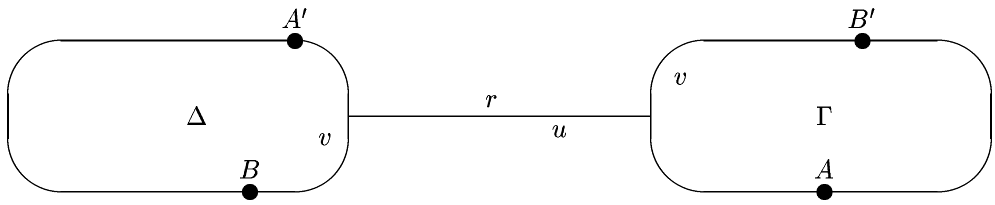


Рис. 4

VII. *Города* Δ *и* Γ *особые.*

Предположим противное. Неособый город выходит на границу дыры почти половиной своего периметра, а особый город выходит (в этом месте) на границу дыры значительной частью ($\geqslant \lambda_4|\partial\Gamma|$), так как мы считаем, что близко от точки p нет перекрёстков (иначе доказывать нечего). Метки городов Γ и Δ одинаковые, если их читать, начиная с точки примыкания, поэтому на границе дыры мы имеем участок, метка которого составляет значительно более половины длины определяющего соотношения (участок uv на рис. 5), чего не может быть по лемме о степенях. Лемма доказана.

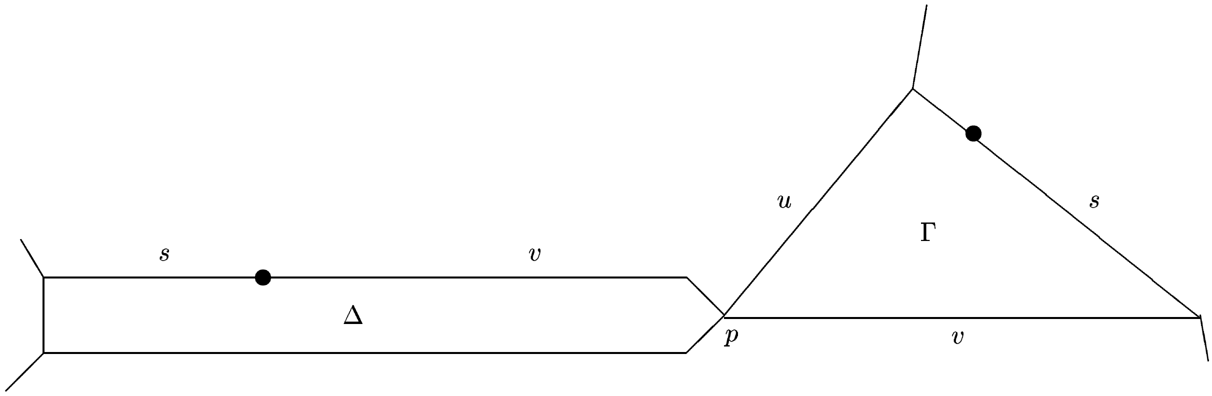


Рис. 5

Лемма о единственности. *Глобально далеко от перекрёстков может произойти не более одного столкновения.*

Доказательство. По лемме о столкновениях вдалеке от перекрёстков достаточно доказать, что не может случиться так, что имеются два особых города Γ и Δ, соединённых двумя автострадами нулевой длины p и q, на каждой из которых происходит столкновение (рис. 6).

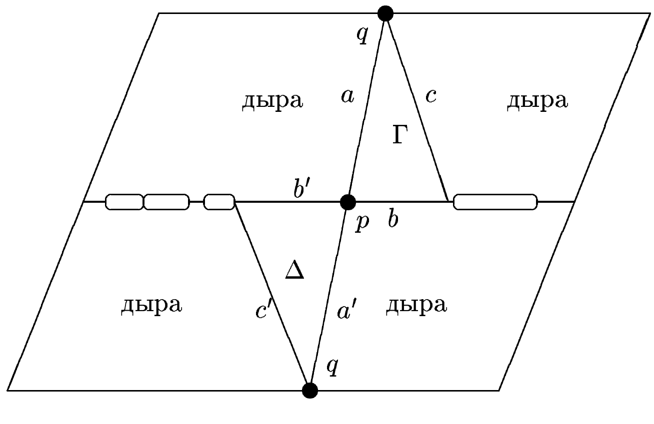


Рис. 6

Три выезда из города Γ делят его границу на три участка: a, b и c (перечисление против часовой стрелки, начиная с участка между p и q). Аналогичные участки границы города Δ обозначим буквами a', b' и c'. Метки городов Γ и Δ равны, если их читать начиная с точки p (или с точки q) по лемме о столкновениях вдалеке от перекрёстков. Поэтому метки участков $a \cup b'$, $a' \cup b$, $c \cup a'$ и $c' \cup a$ границы дыры равны подсловам метки города Γ. Следовательно, по лемме о степенях эти участки не могут быть очень длинными:

$$|a| + |b'| \preccurlyeq \frac{1}{2}|\partial\Gamma|, \quad |a'| + |b| \preccurlyeq \frac{1}{2}|\partial\Gamma|, \quad |c| + |a'| \preccurlyeq \frac{1}{2}|\partial\Gamma|, \quad |c'| + |a| \preccurlyeq \frac{1}{2}|\partial\Gamma|,$$

где $x \preccurlyeq y$ обозначает $x < y + k\lambda_1|\partial\Gamma|$ для некоторой абсолютной константы k. Сложив эти четыре неравенства, мы получим $2|a| + 2|a'| + |b| + |b'| + |c| + |c'| \preccurlyeq 2|\partial\Gamma|$. Учитывая, что $|a| + |b| + |c| = |a'| + |b'| + |c'| = |\partial\Gamma|$, мы получаем $|a| + |a'| \preccurlyeq 0$, что явно противоречит тому, что точки столкновения p и q расположены далеко от перекрёстка (который находится внутри Γ).

6. Окрестности перекрёстков и доказательство теоремы для $n \neq 3$

Как мы уже знаем, (глобально) вдалеке от перекрёстков находится не более одной точки столкновения, перекрёстков не более чем два. Значит, если бы (глобально) вблизи каждого перекрёстка находилось бы не более одной точки столкновения, то общее число точек столкновения не превосходило бы трёх, что в силу леммы о столкновениях означало бы, что кратность движения (то есть n) не превосходит четырёх, что доказывало бы теорему для всех $n \geqslant 5$. Однако неединичный коммутатор в группе с условием малого сокращения без кручения не может быть квадратом, а значит, не может быть и четвёртой степенью, как хорошо известно (см. [Sch80], [Gu89]). Поэтому теорема оказалась бы доказанной при всех n, кроме тройки.

Проблема, состоящая в том, что мы не знаем, сколько точек столкновения имеется вблизи перекрёстков, решается при помощи следующей леммы.

Лемма об изменении режима движения в окрестности перекрёстков. *В $\lambda_7|w|$-окрестностях перекрёстков (то есть глобально вблизи них) режим движения можно так изменить, что в каждой связной компоненте объединения этих окрестностей будет происходить не более одного столкновения.*

Доказательство. Рассмотрим граф, образованный улицами и автострадами; города нам больше не нужны и мы не будем обращать на них внимание. В этом графе выделим окрестности перекрёстков радиуса $\lambda_7|w|$. Утолстим их чуть-чуть, чтобы получить открытые окрестности перекрёстков на торе. Объединение U этих окрестностей представляет собой либо два диска, либо один диск, либо один цилиндр (рис. 7, сверху). Сотрём теперь рёбра графа, находящиеся внутри U, но добавим к графу границу области U, а в случае цилиндрической области добавим ещё одно ребро, рассекающее цилиндр и превращающее его в односвязную область (рис. 7, снизу).

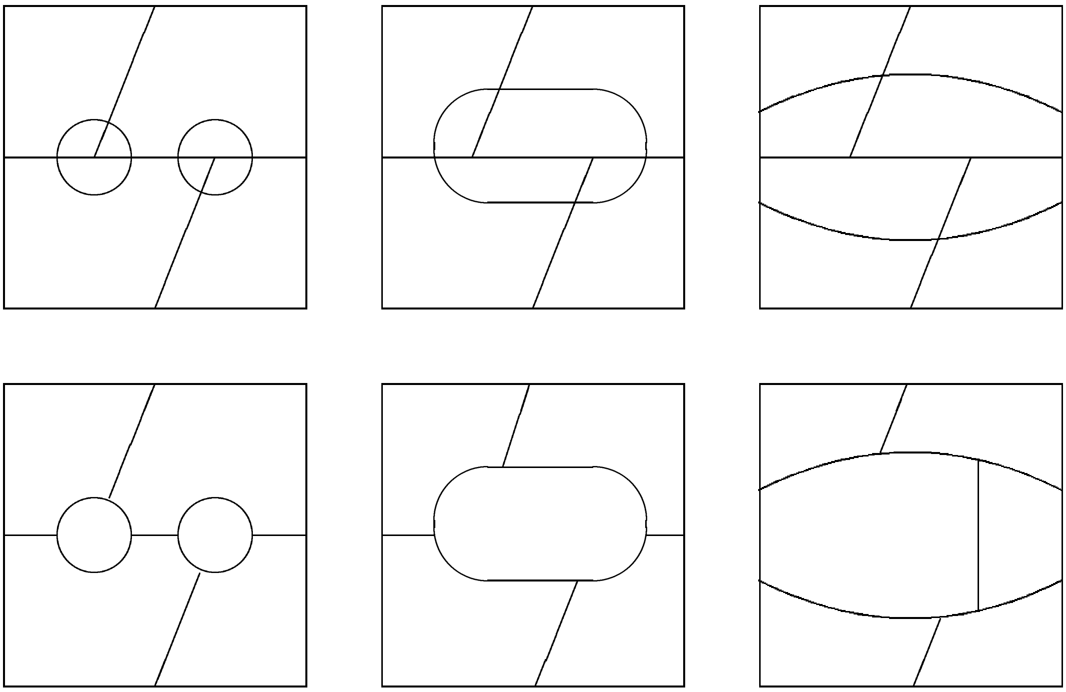


Рис. 7

Мы получили карту на торе с тремя (в первом случае) или двумя (во втором и третьем случае) гранями. Определим движение на этой карте. Таксомоторы, объезжающие старую грань (дыру) едут почти как раньше, но то время, которое они проводили внутри U, они теперь едут по границе области U. По новым граням пустим новые таксомоторы следующим образом: в тот момент, когда на границе соответствующей грани других таксомоторов нет (такой момент существует, так как на границе области U старые таксомоторы проводят мало времени: меньше чем λ_7 умножить на период), новый таксомотор объезжает быстро почти всю грань, а потом медленно движется по оставшемуся отрезку до конца периода. Это движение периодично с тем же периодом, на новых гранях движение однократное, причём каждый из новых таксомоторов участвует не более чем в одном столкновении (во время медленного движения). Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы (при $n \neq 3$) осталось воспользоваться этой леммой. Глобально вдалеке от перекрёстков лежит, как мы видели, не более одной точки столкновения. Поэтому рассуждения, приведённые в начале параграфа завершают доказательство теоремы для всех n, кроме тройки.

7. Доказательство теоремы для $n = 3$

Лемма о близких перекрёстках. *Если перекрёстки находятся глобально очень близко друг от друга, то все столкновения происходят глобально близко от этих перекрёстков.*

Доказательство. Допустим противное. По лемме о столкновениях вдалеке от перекрёстков перекрёстки должны содержаться в различных особых городах Γ и Δ с одинаковыми метками и далёкое от перекрёстков столкновение должно происходить в точке p примыкания этих городов (рис. 8). При этом перекрёстки глобально очень близки, то есть они находятся глобально очень близко к выездам из городов на (глобально очень короткую) автостраду r. Это, в частности, означает, что участки c и c' границ городов, противоположные выездам на автостраду r, составляют около половины периметра:*)

$$|c| \geqslant \frac{1}{2}|\partial\Gamma| - 10\lambda_6|w| \leqslant |c'|.$$

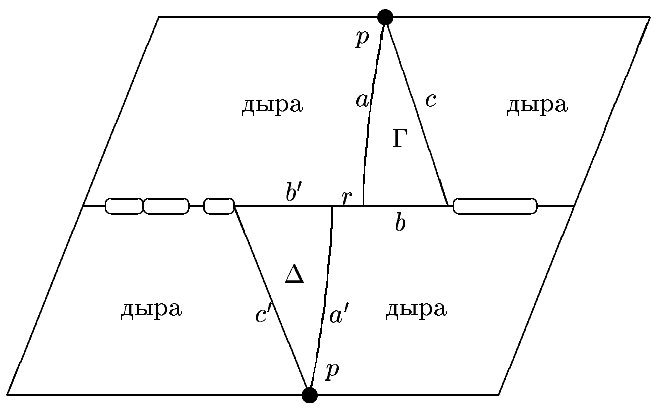


Рис. 8

Если точка столкновения p находится глобально неблизко от перекрёстков, то участки a и a' границ городов, соединяющие эту точку с выездами на автостраду r, длинные:

$$|a'| \geqslant \lambda_7|w| \leqslant |a|.$$

Сложив эти неравенства, мы получим

$$|c| + |a'| \geqslant \frac{1}{2}|\partial\Gamma| + (\lambda_7 - 10\lambda_6)|w| \leqslant |c'| + |a|.$$

Но $c \cup a'$ — это участок границы дыры и его длина не может быть больше $\frac{1}{2}|\partial\Gamma| + \lambda_1|\partial\Gamma|$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Лемма о безопасных перекрёстках. *Пусть столкновение происходит в точке p и очень близко от неё находится ровно один перекрёсток, причём в момент столкновения очень близко от точки p находятся меньше трёх таксомоторов. Тогда очень близко от точки p режим движения таксомоторов можно так изменить, что столкновений в этой окрестности точки p не будет.*

*) Расстояние по улицам между двумя въездами в город примерно равно расстоянию между этими въездами по границе города, поэтому, если одна из улиц короткая, то сумма длин двух других улиц примерно равна половине периметра города.

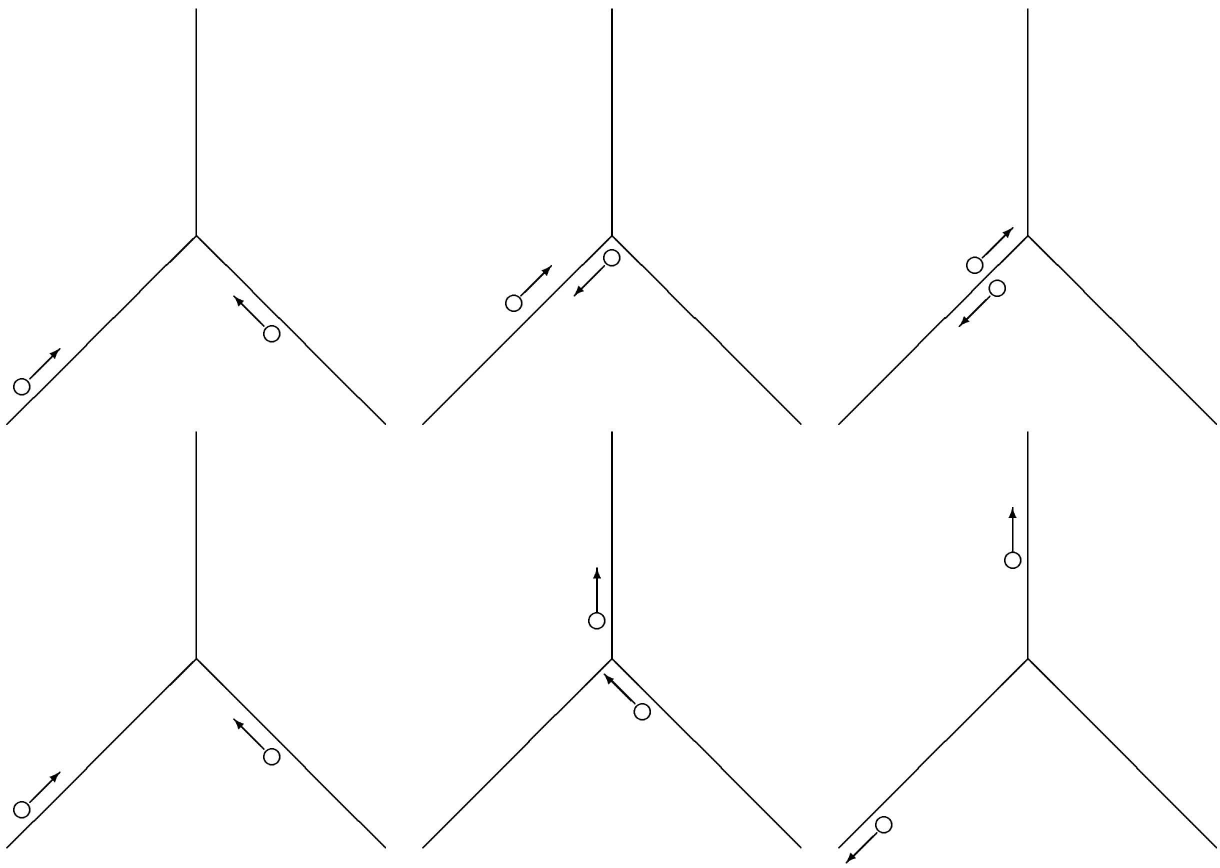


Рис. 9

Доказательство. Два таксомотора сталкиваются вблизи перекрёстка, а остальные таксомоторы находятся в этот момент где-то далеко (рис. 9, сверху). Изменим немного режим движения: заставим первый таксомотор при подъезде к перекрёстку немного притормозить, пропустить второй таксомотор, дальше ускориться и выехать из рассматриваемой окрестности перекрёстка в тот же момент, в какой он выезжал по первоначальному расписанию (рис. 9, снизу).

Лемма об отсутствии опасных перекрёстков. *Пусть перекрёстки находятся глобально не очень близко друг от друга, столкновение происходит в точке p и очень близко от неё находится перекрёсток j. Тогда в момент столкновения очень близко от точки p не могут находиться три таксомотора.*

Доказательство. Допустим противное. Имеется пять вариантов (рис. 10).

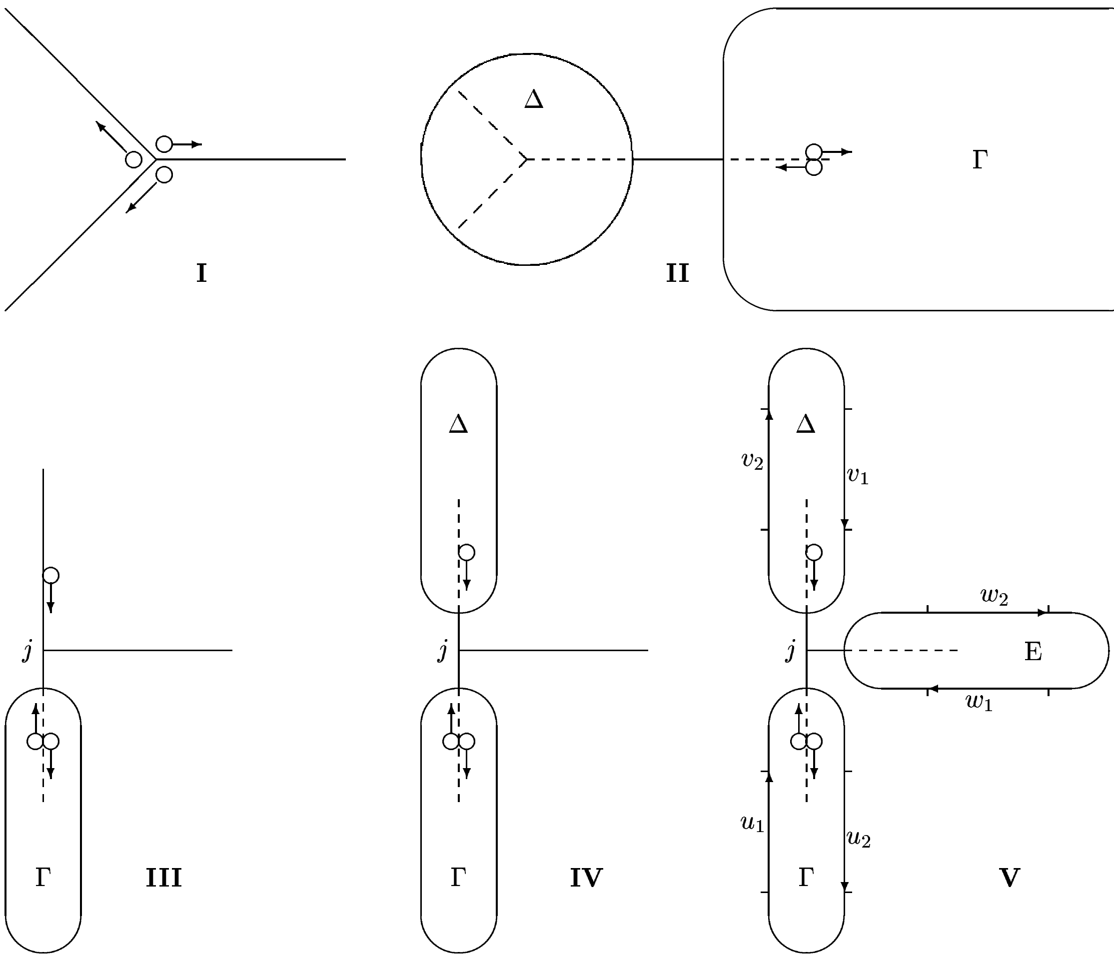


Рис. 10

I. *Точка p находится не в городе.*

По определению близости это означает, что $p = j$ и в этой точке сталкиваются три автобуса одновременно. Следовательно, все три ребра, ведущих в этот перекрёсток имеют одинаковые метки и слово, написанное на границе дыры сократимо, чего не может быть по предположению. Далее считаем, что точка p находится в городе Γ. Отметим, что расстояние от точки p до второго перекрёстка (отличного от j), даже если он находится в Γ, велико, не меньше чем $\lambda_5|w|$, так как перекрёстки находятся глобально не очень близко друг от друга.

II. *Перекрёсток j находится в существенно особом городе Δ.*

Точка p не может находиться в том же самом городе, так как это означало бы, что два разных длинных (длины большей $\lambda_1|\partial\Gamma|$) участка границы города $\Gamma = \Delta$ имеют одинаковые метки, чего не может быть по условию (аналогично пункту **II** в доказательстве леммы о столкновениях вдалеке от перекрёстков). Значит, $p \in \Gamma \neq \Delta \ni j$. В этом случае, дословно повторяя рассуждения пункта **V** доказательства леммы о столкновениях вдалеке от перекрёстков, мы убеждаемся, что метки городов Γ и Δ равны. Но тогда

$$\lambda_5|\partial\Delta| \leqslant \rho(p,j) \leqslant \lambda_3|\partial\Gamma| = \lambda_3|\partial\Delta| \quad \text{(здесь и далее } \rho \text{ — это расстояние).}$$

(Первое неравенство имеет место, так как город Δ существенно особый, а второе — так как перекрёсток j находится очень близко от точки p.) Это противоречит тому, что $\lambda_3 \ll \lambda_5$.

III. *Близко от точки p есть только один город* (*то есть* Γ).

Рассмотрим $\lambda_4|\partial\Gamma|$-окрестность точки p, исключим из неё $\lambda_3|\partial\Gamma|$-окрестность точки p и пересечём эту разность с одномерным остовом модели. Мы получим дизъюнктное объединение четырёх путей: u_1, u_2, v и w, где u_1 и u_2 лежат на границе города Γ, а v и w — на автострадах, ведущих к перекрёстку j. Метки путей u_1, v и w примерно равны (то есть эти три слова содержат общее подслово длины по крайней мере $(\lambda_4 - 10\lambda_3)|\partial\Gamma|$), так как по этим путям одновременно движутся автобусы, приближаясь к перекрёстку. С другой стороны, метки путей u_2^{-1}, v^{-1} и w^{-1} тоже примерно равны в том же смысле, так как по этим путям одновременно движутся автобусы, отдаляясь от перекрёстка. Следовательно, метки путей u_1 и u_2 примерно равны (содержат общее подслово длины по крайней мере $(\lambda_4 - 20\lambda_3)|\partial\Gamma|$), что противоречит условию малого сокращения.

IV. *Близко от точки p есть ровно два города.*

В этом случае абсолютно аналогично мы получаем два длинных участка с одинаковыми метками на границе города Г.

V. *Близко от точки p есть ровно три города.*

Обозначим эти города Г, Δ и Е. Рассуждая так же как в предыдущих двух случаях, мы получим шесть длинных (длины по крайней мере $(\lambda_4 - 20\lambda_3)|\partial\Gamma|$) путей: u_1, u_2, v_1, v_2, w_1 и w_2, первые два из которых лежат на границе города Г, вторые два — на границе города Δ, а третьи два — на границе города Е, причём метки путей u_1, v_1 и w_1 равны (по этим путям автобусы одновременно приближаются к перекрёстку) и метки путей u_2, v_2 и w_2 равны (по этим путям автобусы одновременно отдаляются от перекрёстков). В силу условия малого сокращения, это означает, что клетки исходной $C'(\lambda)$-карты на торе, соответствующие этим трём городам, имеют одинаковые метки, причём метки клеток получатся одинаковыми, если их читать, начиная с путей u_1, v_1 и w_1 или начиная с путей u_2, v_2 и w_2.

Это означает, что участки границ этих трёх клеток между $[u_2^-, u_1^+]$, $[v_2^-, v_1^+]$, и $[w_2^-, w_1^+]$ тоже имеют одинаковую метку g, где π^- и π^+ обозначают начало и конец пути π (мы считаем, что все пути ориентированы против часовой стрелки относительно дыры). Далее, три пути в модели: от u_1^+ до v_2^-, от v_1^+ до w_2^- и от w_1^+ до u_2^-, также имеют одинаковую метку h, так как проходятся автобусами одновременно. При этом эти шесть путей в исходной диаграмме образуют замкнутый контур, внутри которого нет клеток. Следовательно, $(gh)^3 = 1$ в свободной группе, то есть $h = g^{-1}$.

Однако метка дыры в исходной диаграмме является несократимым словом, поэтому границы трёх клеток имеют общую точку и метки этих клеток равны, если их читать, начиная с этой точки (рис 11). Это означает, что перекрёсток j находится не внутри города, то есть только одна из трёх клеток может быть особой (содержать другой перекрёсток). Дословно повторив рассуждения пункта **VII** доказательства леммы о столкновениях вдалеке от перекрёстков, мы приходим к выводу, что метка границы дыры содержит общее подслово с одним из определяющих соотношений и длина этого подслова существенно превышает половину длины определяющего соотношения: если, например, города Г и Δ на рисунке 11 неособые, то метка участка границы дыры от x до y содержит в качестве подслова почти целое соотношение. Это противоречие с леммой о степенях завершает доказательство.

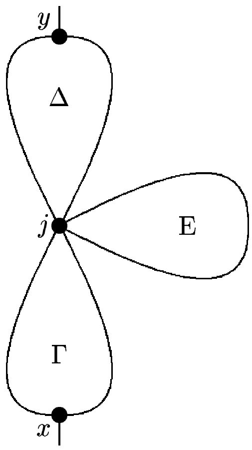


Рис. 11

Продолжим доказательство теоремы. По лемме о столкновениях достаточно показать, что точек столкновения не может быть больше одной.

Если перекрёстки глобально очень близки, то по лемме о близких перекрёстках все точки столкновения глобально близки к этим перекрёсткам. А по лемме об изменении режима движения в окрестности перекрёстков, можно считать, что глобально близко от перекрёстков имеется не больше одной точки столкновения. Это означает, что всего имеется не больше одной точки столкновения, что и требовалось.

Если же перекрёстки глобально не очень близки, то, воспользовавшись леммой об отсутствии опасных перекрёстков и леммой о безопасных перекрёстках, мы снова приходим к режиму движения с не более чем одной точкой столкновения. Это завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Кл05] Клячко Ант. А. Гипотеза Кервера–Лауденбаха и копредставления простых групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44. №4. С. 399–437. См. также arXiv:math.GR/0409146

[Кл06а] Клячко Ант. А. Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами // Мат. заметки. 2006. Т.79. №3. С. 409–419. См. также arXiv:math.GR/0406382.

[Кл06b] Клячко Ант. А. SQ-универсальность относительных копредставлений с одним соотношением // Мат. сборник. 2006. Т.197. №10. С.87–108. См. также arXiv:math.GR/0603468.

[Кл07] Клячко Ант. А. Свободные подгруппы относительных копредставлений с одним соотношением // Алгебра и логика. 2007. Т.46. №3. С.290–298. См. также arXiv:math.GR/0510582.

[ЛШ80] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[Оль89] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.

[CG95] Clifford A., Goldstein R.Z. Tesselations of S^2 and equations over torsion-free groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1995. V.38. P.485–493.

[CG00] Clifford A., Goldstein R.Z. Equations with torsion-free coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2000. V.43. P.295–307.

[CR01] Cohen M. M., Rourke C. The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups // Geometry & Topology. 2001. V.5. P.127–142. См. также arXiv:math.GR/0009101

[CER94] Comerford L. P., Edmunds C. C., Rosenberger G. Commutators as powers in free products of groups. Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), 47-52.

[FeR96] Fenn R., Rourke C. Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups // L'Enseignment Mathématique. 1996. T.42. P.49–74.

[FeR98] Fenn R., Rourke C. Characterisation of a class of equations with solution over torsion-free groups, from "The Epstein Birthday Schrift", (I. Rivin, C. Rourke and C. Series, editors), Geometry and Topology Monographs. 1998. V.1. P.159-166.

[FRR11] Fine B., Rosenberger A., Rosenberger, G. Quadratic properties in group amalgams // Journal of Group Theory. V.14, no.5, P.657-671

[FoR05] Forester M., Rourke C. Diagrams and the second homotopy group // Comm. Anal. Geom. 2005. V.13. P.801-820. См. также arXiv:math.AT/0306088

[Ger87] Gersten S.M. Reducible diagrams and equations over groups. In Essays in group theory, P.15–73. Springer, New York-Berlin, 1987.

[Gu89] Zhi-Bin Gu. Hyperbolic surfaces and quadratic equations in groups // Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), 859-866.

[Kl93] Klyachko Ant. A. A funny property of a sphere and equations over groups // Comm. Algebra. 1993. V.21. P.2555–2575.

[Kl97] Klyachko Ant. A. Asphericity tests // IJAC. 1997. V.7. P.415–431.

[Kl09] Klyachko Ant. A. The structure of one-relator relative presentations and their centres // Journal of Group Theory, 2009, 12:6, 923–947. См. также arXiv:math.GR/0701308

[KlL12] Klyachko Ant. A., Lurye D. E. Relative hyperbolicity and similar properties of one-generator one-relator relative presentations with powered unimodular relator // J. Pure Appl. Algebra, 216:3, (2012), 524-534. See also arXiv:1010.4220.

[Le09] Le Thi Giang. The relative hyperbolicity of one-relator relative presentations // Journal of Group Theory. 2009. 12:6, 949–959. См. также arXiv:0807.2487

[MCW02] McCammond J.P., Wise D.T. Fans and ladders in small cancellation theory // Proc. London Math. Soc. (3). 2002. 84(3):599–644.

[Pri88] Pride S.J. Star-complexes, and the dependence problems for hyperbolic complexes // Glasgow Math. J. 1988. 30(2):155–170.

[Sch59] Schützenberger M. P. Sur l'equation $a^{2+n} = b^{2+m}c^{2+p}$ dans un groupe libre // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 248 (1959), 2435–2436.

[Sch80] Schupp P .E. Quadratic equations in groups, cancellation diagrams on compact surfaces, and automorphisms of surface groups. Word problems II. Amsterdam:North-Holland, 1980.

[Wic62] Wicks M. J. Commutators in free products // J. London Math. Soc. 37 (1962), 433–444.