УДК 512.543.72 + 512.544.33 MSC: 20F70, 20F16

ПОЧТИ СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ БЕЗ КОНЕЧНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП СИЛЬНО ВЕРБАЛЬНО ЗАМКНУТЫ

Антон А. Клячко Андрей М. Мажуга Вероника Ю. Мирошниченко

Механико-математический факультет Московского государственного университета

Москва 119991, Ленинские горы, МГУ

klyachko@mech.math.msu.su mazhuga.andrew@yandex.ru werunik179@gmail.com

Всякая почти свободная группа H, не имеющая неединичных конечных нормальных подгрупп, (в частности, бесконечная диэдральная группа) является ретрактом любой конечно порождённой группы, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы.

0. Введение

Подгруппа H группы G называется *вербально замкнутой* [MR14] (см. также [Rom12], [PX13], [Mazh17], [КлМа18], [Mazh18]), если всякое уравнение вида

$$w(x_1,x_2,\ldots)=h,\quad \text{где } w \text{ — это элемент свободной группы } F(x_1,x_2,\ldots) \text{ и } h\in H,$$

имеющее решение в G, имеет решение в H. Если же каждая конечная система уравнений с коэффициентами из H

$$\{w_1(x_1,x_2,\ldots)=1,\ldots,w_m(x_1,x_2,\ldots)=1\},\quad \text{где } w_i\in H*F(x_1,x_2,\ldots),$$

имеющая решение в G, имеет решение в H, то подгруппу H называют *алгебраически замкнутой* в G.

Разумеется, алгебраическая замкнутость сильнее, чем вербальная замкнутость. Однако во многих случаях эти свойства оказываются эквивалентными. Группу H называют *сильно вербально замкнутой* [Mazh18], если она алгебраически замкнута во всякой группе, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы. (Таким образом, вербальная замкнутость — это свойство подгруппы, а сильная вербальная замкнутость — это свойство абстрактной группы.) Например, сильно вербально замкнутыми являются

- все абелевы группы [Mazh18];
- все свободные группы [КлМа18];
- фундаментальные группы всех связных поверхностей, кроме, возможно, бутылки Клейна [Mazh18].

Основной результат этой статьи можно сформулировать так.

Теорема 1. *Сильно вербально замкнутыми являются*

1) *все почти свободные группы, не имеющие неединичных нормальных конечных подгрупп;*
2) *все свободные произведения $\mathop{\ast}\limits_{i\in I} H_i$, где I — конечное или бесконечное множество, $|I|>1$ и H_i — нетривиальные группы, удовлетворяющие нетривиальным тождествам (возможно, разным).*

Значительная часть теоремы 1 была известна ранее: в работе [Mazh18] доказано утверждение 2) для всех недиэдральных групп, при дополнительном предположении, что множество I конечно; а в работе [КлМа18] была доказана сильная вербальная замкнутость всех бесконечных почти свободных недиэдральных групп, не содержащих бесконечных абелевых нециклических подгрупп. В работе [КлМа18] можно найти также примеры почти свободных групп, не являющихся сильно вербально замкнутыми.

Фактически бóльшую часть данной статьи занимает доказательство следующего частного случая (обоих утверждений) теоремы 1:

бесконечная диэдральная группа сильно вербально замкнута.

Для всех недиэдральных групп теорема 1 сравнительно легко выводится из известных фактов (в параграфе 1).

Проблема с бесконечной диэдральной группой состоит в том, что она, с одной стороны, «слишком абелева», чтобы к ней могли быть применены изощрённые инструменты, основанные на словах Ли [Lee02] (смотрите [MR14], [Mazh17], [КлМа18], [Mazh18]), а с другой стороны, «слишком неабелева», чтобы с ней работали простые соображения (смотрите [КлМа18], [Mazh18]). Разумеется, диэдральная группа метабелева, и это лежит в основе нашего подхода. В параграфе 3 мы приводим «явный» критерий вербальной (и алгебраической) замкнутости бесконечной диэдральной подгруппы, аналогичный (в некотором смысле) следующему простому утверждению об абелевых подгруппах, которое фактически доказано в [Mazh18]:

абелева подгруппа H вербально (и алгебраически) замкнута в группе G тогда и только тогда, когда она тривиально пересекается с коммутантом G' группы G, и образ H в факторгруппе G/G' является сервантной подгруппой.

Работа первых двух авторов выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 15-01-05823.

Понятие алгебраической замкнутости может быть охарактеризовано на структурном языке, если группа H *нётерова по уравнениям* (любая система уравнений над H от конечного числа неизвестных эквивалентна своей конечной подсистеме), а именно, алгебраическая замкнутость в этом случае эквивалентна «локальной ретрактности» (смотрите параграф 1):

> *нётерова по уравнениям подгруппа H группы G алгебраически замкнута в G тогда и только тогда, когда она является ретрактом каждой конечно порождённой над H подгруппы группы G* (то есть подгруппы вида $\langle H, X\rangle$, где множество $X \subseteq G$ конечно).

Все почти свободные группы (включая бесконечную диэдральную) нётеровы по уравнениям [КлМа18], поэтому теорема 1 означает, что

> *каждая почти свободная группа H, не содержащая неединичных конечных нормальных подгрупп, является ретрактом каждой конечно порождённой группы, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы.*

В параграфе 1 мы доказываем некоторые вспомогательные факты общего характера, которые помогают свести доказательство основной теоремы к случаю, когда объемлющая группа G, содержащая вербально замкнутую диэдральную подгруппу H, является расширением абелевой группы Q при помощи элементарной абелевой 2-группы C, и, таким образом, подгруппа Q является C-модулем. Параграф 2 содержит необходимые сведения о таких модулях. В параграфе 3 мы формулируем и доказываем критерий алгебраической (и вербальной) замкнутости бесконечной диэдральной подгруппы.

В последнем параграфе мы разбираем основной этап доказательства на конкретном примере. По сути это простейший пример ситуации, когда отсутствие алгебраической замкнутости почти очевидно, а доказательство отсутствия вербальной замкнутости требует нетривиальных построений. Мы постарались сделать последний параграф независимым от всего остального, поэтому читатели могут ознакомиться с этим параграфом сначала, чтобы получить представление о том, что происходит. Предупреждаем, однако, что разобранный там пример иллюстрирует не все трудности, с которыми нам пришлось столкнуться.

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если X — подмножество некоторой группы, то $|X|$, $\langle X\rangle$ и $C(X)$ означают, соответственно, мощность множества X, подгруппу, порождённую множеством X, и централизатор множества X. Буквы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ обозначают множество целых и рациональных чисел. Циклическую группу порядка k, порождённую элементом x, мы обозначаем символом $\langle x\rangle_k$. Свободную группу с базисом $x_1,\dots,x_n$ мы обозначаем $F(x_1,\dots,x_n)$ (или F_n, если базис неважен).

1. Вспомогательные леммы

Утверждение 1. *Нётерова по уравнениям подгруппа H алгебраически замкнута в группе G тогда и только тогда, когда H является ретрактом каждой конечно порожденной над H подгруппы группы G.*

Доказательство. Пусть подгруппа H алгебраически замкнута в группе G. Тогда H алгебраически замкнута в любой подгруппе $\widetilde{G}$ группы G, содержащей H. Если подгруппа $\widetilde{G}$ конечно порождена над H, то H есть ретракт группы $\widetilde{G}$ в силу следующего факта [MR14]:

> *нётерова по уравнениям алгебраически замкнутая подгруппа H конечно порождённой над H группы является ретрактом.*

Пусть H является ретрактом каждой конечно порожденной над H подгруппы группы G, и пусть система уравнений $S = \{w_1(x_1,\dots,x_n) = 1,\dots,w_m(x_1,\dots,x_n) = 1\}$, где $w_i \in F(x_1,\dots,x_n) * H$, имеет решение $g_1,\dots,g_n$ в G. По условию существует ретракция $\rho\colon \langle H, g_1,\dots,g_n\rangle \to H$. Значит $\rho(g_1),\dots,\rho(g_n)$ — это решение системы S в H, что и требовалось.

Утверждение 2. *Группа H, в которой каждое конечное подмножество содержится в сильно вербально замкнутой подгруппе, вербально замкнутой в H, сильно вербально замкнута.*

Доказательство. Предположим, что группа H вложена в некоторую бóльшую группу G в качестве вербально замкнутой подгруппы, и некоторая конечная система уравнений S с коэффициентами из H имеет решение в G. Множество коэффициентов этой системы содержится в некоторой подгруппе $H_1 \subseteq H$, которая одновременно сильно вербально замкнута и вербально замкнута в H. Последнее означает, что H_1 вербально замкнута в G (поскольку вербальная замкнутость — это транзитивное свойство). Теперь сильная вербальная замкнутость подгруппы H_1 влечёт разрешимость системы S в группе $H_1 \subseteq H$, что и требовалось.

Следствие. *Утверждение* 2) *теоремы 1 верно для всех групп, кроме, возможно, бесконечной диэдральной.*

Доказательство. Утверждения 2 позволяет свести доказательство к случаю, когда множество I конечно, поскольку подпроизведение $H_1 = \mathop{\ast}\limits_{i\in J} H_i$ очевидным образом вербально замкнуто (и даже является ретрактом) в группе $H = \mathop{\ast}\limits_{i\in I} H_i$ для любого $J \subseteq I$. В случае же, когда множество I конечно, утверждение 2) теоремы 1 доказано для всех недиэдральных групп в [Mazh18].

Утверждение 3. *Утверждение* 1) *теоремы 1 верно для всех групп, кроме, возможно, бесконечной диэдральной.*

Доказательство. Если группа H является почти циклической, то в ней найдётся конечная нормальная подгруппа K, факторгруппа по которой либо тривиальная, либо бесконечная циклическая, либо бесконечная диэдральная [Sta71]. Конечная нормальная подгруппа K обязана быть тривиальной по условию. Все абелевы группы сильно вербально замкнуты [Mazh18], и всё доказано в этом случае.

Если же группа H не является почти циклической, то в ней найдётся неабелева свободная нормальная подгруппа F конечного индекса n. Это означает, что централизатор вербальной подгруппы $V = \langle\{h^n \mid h \in H\}\rangle \subseteq F$ нормален и конечен (поскольку централизатор любой неабелевой свободной подгруппы в почти свободной группе конечен). Значит $C(V) = \{1\}$ по условию. Стало быть, централизатор некоторой конечно порождённой подгруппы $V_1 \subseteq V$ тривиален (поскольку опять централизатор неабелевой свободной подгруппы почти свободной группы всегда конечен, и убывающая цепочка конечных групп стабилизируется). Остаётся воспользоваться следующим утверждением ([Mazh18], следствие 1):

> *если вербальная подгруппа V некоторой группы H свободная неабелева, и централизатор некоторой конечно порождённой подгруппы группы V тривиален, то группа H сильно вербально замкнута.*

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству сильной вербальной замкнутости бесконечной диэдральной группы.

Лемма 1 ([PX13], лемма 1.1). *Если $V(G)$ — вербальная подгруппа группы G, а H — вербально замкнутая подгруппа группы G, то образ подгруппы H при естественном гомоморфизме $G \to G/V(G)$ вербально замкнут.*

2. Коммутирующие инволюции на абелевых группах

Пусть конечная элементарная абелева 2-группа C (конечная прямая степень группы из двух элементов) действует автоморфизмами на конечно порождённой абелевой группе, то есть Q является C-модулем. Пусть X — множество всех гомоморфизмов (*характеров*) $\chi\colon C \to \{\pm 1\}$ и

$$Q_\chi = \{q \in Q \mid cq = \chi(c)q \text{ для всех } c \in C\}.$$

Имеется естественный гомоморфизм из группы Q в аддитивную группу векторного пространства (над полем рациональных чисел) $\mathbb{Q} \otimes Q$, посылающий $q \in Q$ в $1 \otimes q$ (тензорное произведение здесь и далее над $\mathbb{Z}$). Ядром этого гомоморфизма служит периодическая часть $T(Q)$ группы Q. Действие группы C на Q естественным образом продолжается до линейного представления $C \to \mathbf{GL}(\mathbb{Q} \otimes Q)$. Это представление вполне приводимо и неприводимые представления одномерны (это характеры группы C). Таким образом, $\mathbb{Q} \otimes Q = \bigoplus\limits_{\chi\in X} (\mathbb{Q} \otimes Q_\chi)$. Естественные проекции $\mathbb{Q} \otimes Q \to \mathbb{Q} \otimes Q_\chi$ мы обозначим p_χ. Векторы $p_\chi(v) \in \mathbb{Q} \otimes Q_\chi$ мы будем называть *χ-компонентами* вектора $v \in \mathbb{Q} \otimes Q$ и обозначать v_χ. Ясно, что $\bigoplus\limits_{\chi\in X} (1 \otimes Q_\chi) \subseteq 1 \otimes Q \subseteq \bigoplus\limits_{\chi\in X} p_\chi(1 \otimes Q)$, причём если одно из этих включений является равенством, то и другое является равенством; в этом случае мы будем говорить, что C-модуль $1 \otimes Q$ *разложим*. В общем случае C-модуль $\bigoplus\limits_{\chi\in X} p_\chi(1 \otimes Q)$ можно назвать *разложимым замыканием* модуля $1 \otimes Q$.

Нам понадобится следующая простая формула, справедливая для любого характера χ и любого $q \in Q$:

$$1 \otimes \left(\left(\prod_{c\in C}\Big(1 + \chi(c)c\Big)\right) \cdot q\right) = \Big(2^{|C|} \otimes q\Big)_\chi \quad \text{и} \quad |T(Q)| \cdot \prod_{c\in C}\Big(1 + \chi(c)c\Big) \cdot q = \Big(2^{|C|} \cdot |T(Q)| \cdot q\Big)_\chi, \qquad (1)$$

(где $x_\chi \in Q_\chi$ в правой части второго равенства — это компоненты элемента $x \in \bigoplus Q_\chi \subseteq Q$). Второе равенство здесь следует из первого, поскольку ядром гомоморфизма $q \mapsto 1 \otimes q$ служит периодическая часть группы Q (и первое равенство показывает, что модуль $2^{|C|} \cdot |T(Q)| \cdot Q$ содержится в прямой сумме χ-компонент модуля Q). Для доказательства первого равенства заметим, что χ-компонента элемента $1 \otimes q$ в левой части равенства умножится на два $|C|$ раз. Что касается всех остальных компонент, то они обнулятся, поскольку для каждого характера $\chi' \neq \chi$ найдётся такой $c \in C$, что $\chi(c) = -\chi'(c)$. Из формулы (1) вытекает, что для всех $q \in Q$ имеет место равенство

$$1 \otimes \left(\sum_{\chi \in X} \left(\prod_{c \in C} \Big(1 + \chi(c)c \Big) \right) \cdot q \right) = 2^{|C|} \otimes q \quad \text{и} \quad |T(Q)| \cdot \sum_{\chi \in X} \left(\prod_{c \in C} \Big(1 + \chi(c)c \Big) \right) \cdot q = |T(Q)| \cdot 2^{|C|} \cdot q. \tag{2}$$

Отметим ещё следующее простое обобщение формулы (1): *Если $\varphi\colon C \to \widehat{C}$ — эпиморфизм из одной конечной элементарной абелевой 2-группы на другую и $\widehat{q} \in \widehat{Q}$ — элемент разложимого $\widehat{C}$-модуля $\widehat{Q}$, то для любого характера χ группы C*

$$1 \otimes \left(\left(\prod_{c \in C} \Big(1 + \chi(c)\varphi(c) \Big) \right) \cdot \widehat{q} \right) = \begin{cases} 2^{|C|} \otimes \widehat{q}_{\widehat{\chi}}, & \text{если } \chi = \widehat{\chi} \circ \varphi; \\ 0, & \text{если } \chi \neq \widehat{\chi} \circ \varphi \text{ ни для какого характера } \widehat{\chi}\colon \widehat{C} \to \{\pm 1\}. \end{cases} \tag{$*$}$$

Назовём элемент $q \in Q$ *простым*, если χ-компонента $(1 \otimes q)_\chi = p_\chi(1 \otimes q)$ для некоторого характера χ является примитивным элементом свободной абелевой группы $p_\chi(1 \otimes Q)$, то есть $p_\chi(1 \otimes q) \notin k \cdot p_\chi(1 \otimes Q) = p_\chi(k \otimes Q)$ при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$.

Лемма о простых элементах. *Элемент $q \in Q$ является простым тогда и только тогда, когда его порядок бесконечен, и группа Q раскладывается в прямую сумму $Q = \langle q \rangle \oplus M$, причём подгруппа $M \subset Q$ является C-подмодулем, то есть $cm \in M$ для всех $c \in C$ и $m \in M$.*

Доказательство. Пусть q — простой элемент, то есть $(1 \otimes q)_\chi$ является примитивным элементом группы $p_\chi(1 \otimes Q)$. Ясно, что это означает бесконечность порядка элемента q (иначе $1 \otimes q = 0$). Кроме того, $p_\chi(1 \otimes Q) = \langle (1 \otimes q)_\chi \rangle \oplus D$ для некоторой подгруппы D (поскольку примитивный элемент свободной абелевой группы может быть включён в некоторый базис). Это означает, что $1 \otimes Q = \langle 1 \otimes q \rangle \oplus \big(p_\chi^{-1}(D) \cap (1 \otimes Q) \big)$. При этом группа $A = p_\chi^{-1}(D)$ является C-подмодулем. Следовательно, $Q = \langle q \rangle \oplus \psi^{-1}(A)$, где $\psi\colon Q \to \mathbb{Q} \otimes Q$ — естественный гомоморфизм, посылающий x в $1 \otimes x$.

Доказательство в другую сторону мы оставляем читателям в качестве упражнения, поскольку мы не собираемся этим пользоваться.

Пример. Пусть группа $C = \langle c \rangle_2$ действует на $Q = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ перестановкой координат. Тогда имеется два характера: $X = \{\chi_+, \chi_-\}$, где $\chi_+(c) = 1$ и $\chi_-(c) = -1$. При этом $Q_{\chi_+} = \langle (1,1) \rangle$, а $Q_{\chi_-} = \langle (1,-1) \rangle$. Подгруппа $Q_{\chi_+} \oplus Q_{\chi_-}$ имеет индекс два в Q. Разложимое замыкание имеет вид

$$\overline{Q} = \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\rangle \oplus \left\langle \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\rangle = \{ (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x + y \in \mathbb{Z} \ni x - y \}.$$

Проекции $p_{\chi_\pm}\colon \overline{Q} \to \left(\overline{Q} \right)_{\chi_\pm}$ имеют вид $p_{\chi_+}(x,y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right)$ и $p_{\chi_-}(x,y) \mapsto \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2} \right)$. Элемент $(2,5)$ не является простым, поскольку $(2,5) = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$. Вообще, нетрудно убедиться, что в этом примере элемент $(x,y) \in Q$ является простым тогда и только тогда, когда $x \pm y = \pm 1$ при каком-то выборе знаков.

3. Алгебраически замкнутые бесконечные диэдральные подгруппы

Мы будем иметь дело с конечно порождённой группой G, у которой подгруппа $Q = \big\langle \{ g^2 \mid g \in G \} \big\rangle$, порождённая квадратами всех элементов, абелева. Группа Q в этой ситуации представляет собой конечно порождённую абелеву группу, на которой действует автоморфизмами конечная элементарная 2-абелева группа $C = G/Q$ по правилу

$$(gQ) \circ q \overset{\text{опр}}{=} gqg^{-1} \quad \text{(эта формула корректна, так как } Q \text{ абелева).}$$

Таким образом, группа Q превращается в C-модуль, и мы можем применять результаты предыдущего параграфа. Отметим только, что теперь мы придерживаемся мультипликативных обозначений, то есть пишем, например, $cq_1c^{-1}q_2^2$ вместо $cq_1 + 2q_2$. Для упрощения обозначений мы положим $\widetilde{q} \overset{\text{опр}}{=} q^{|T(Q)|}$. Формула (1) приобретает вид

$$w_\chi(\widetilde{q}) \overset{\text{опр}}{=} f_\chi(c_1, f_\chi(c_2, \ldots, f_\chi(c_{|C|}, \widetilde{q}) \ldots)) = \left((\widetilde{q})^{2^{|C|}} \right)_\chi, \quad \text{где } \{c_1, \ldots, c_{|C|}\} = C, \tag{1$'$}$$

а $f_\chi(gQ, x) \overset{\text{опр}}{=} xgx^{\chi(gQ)}g^{-1}$ — «косой коммутатор» (который определён корректно, то есть не зависит от выбора представителя g в смежном классе $c = gQ$).

Аналог формулы (2) приобретает вид

$$\prod_{\chi \in X} w_\chi(\widetilde{q}) = (\widetilde{q})^{2^{|C|}} \quad \text{для всех } q \in Q. \tag{2$'$}$$

Сильная вербальная замкнутость бесконечной диэдральной группы очевидным образом вытекает из утверждения 1 и следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $H = \langle b\rangle_2 \leftthreetimes \langle a\rangle_\infty$ — бесконечная диэдральная подгруппа конечно порождённой группы G. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *подгруппа H вербально замкнута в G;*
2) *подгруппа H алгебраически замкнута в G;*
3) *подгруппа H — ретракт группы G* (то есть образ эндоморфизма ρ такого, что $\rho\circ\rho=\rho$)*;*
4) *a^2Q' является простым элементом G/Q-модуля Q/Q', где $Q = \left\langle \{g^2 \mid g\in G\}\right\rangle$.*

Доказательство. Для доказательства импликации 4) $\Longrightarrow$ 3) сперва заметим, что $H\cap Q' = \{1\}$ (иначе бы элемент a^2Q' имел бы конечный порядок в Q/Q' и не был бы простым).

Теперь по лемме о простых элементах мы получаем нормальную в G/Q' подгруппу $M\subset Q/Q'$ такую, что $Q/Q' = \left\langle a^2Q'\right\rangle \times M$. Тогда композиция естественных гомоморфизмов $G\to G/Q'\to (G/Q')/M = G_1$ действует инъективно на H, а получившаяся группа G_1 является почти циклической группой (подгруппа, порождённая квадратами всех её элементов, порождается образом элемента a^2). Как известно, почти циклическая группа всегда содержит конечную нормальную подгруппу N, факторгруппа по которой либо циклическая, либо диэдральная (см., например, [Sta71]). Следовательно, композиция гомоморфизмов $G\to G/Q'\to (G/Q')/M = G_1\to G_1/N$ есть искомая ретракция на H (здесь мы воспользовались тем, что в бесконечной диэдральной группе нет конечных нормальных подгрупп и тем, что в группе G_1 подгруппа, порождённая квадратами всех её элементов, порождается образом элемента a^2).

Импликации 3) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 1) — это общие факты, верные для любых групп (смотрите введение).

Осталось доказать импликацию 1) $\Longrightarrow$ 4). По лемме 1 мы можем считать, что группа G удовлетворяет тождеству $[x^2,y^2]=1$, то есть подгруппа Q, порождённая квадратами всех элементов группы G, абелева (и конечно порождённая, поскольку это подгруппа имеет конечный индекс в конечно порождённой группе G). Действительно, при факторизации группы G по коммутанту подгруппы, порождённой квадратами всех элементов, не пострадает ни подгруппа H, ни условие 1) (по лемме 1), ни условие 4).

Допустим, что элемент a^2 не простой. Это означает, что

$$\widetilde{(a^2)} \overset{\text{опр}}{=} a^{2|T(Q)|} = \prod_{\chi\in X} \widetilde{q(\chi)}_\chi^{k_\chi}, \quad \text{для некоторых } k_\chi\in\mathbb{Z}\setminus\{\pm1\} \text{ и } q(\chi)\in Q$$

(где x_χ — компоненты элемента $x\in |T(Q)|Q \subseteq \mathbb{Q}\otimes Q = \bigoplus_\chi(\mathbb{Q}\otimes Q_\chi)$). Из формулы $(2')$ получаем

$$\prod_{\chi\in X} w_\chi\left((\widetilde{q(\chi)})^{k_\chi}\right) = \widetilde{(a^2)}^{2^{|C|}}. \tag{3}$$

Теперь разложим конечную элементарную абелеву 2-группу G/Q в прямое произведение групп порядка два: $G/Q = \langle d_1Q\rangle_2\times\ldots\times\langle d_mQ\rangle_2$ и рассмотрим слова $v_\chi(x_1,\ldots,x_m,y)\in F(x_1,\ldots,x_m,y)$ в свободной группе, полученные из слов w_χ (смотрите формулу $(1')$) подстановкой вместо c_i их выражений через образующие $d_1,\ldots,d_m$ и подстановкой буквы y вместо q:

$$v_\chi(d_1,\ldots,d_m,q) = w_\chi(\widetilde{q}).$$

Формула (3) показывает, что уравнение

$$\prod_{\chi\in X}\left(v_\chi\left(x_1,\ldots,x_m,\prod_{i=1}^n y_{\chi,i}^{2|T(Q)|}\right)\right)^{k_\chi} = \left(a^2\right)^{2^{|C|}\cdot|T(Q)|}, \tag{4}$$

где n — такое число, что каждый элемент из Q является произведением n квадратов (например, $n=\mathrm{rk}Q+1$), имеет решение в группе G:

$$x_j = d_j,\quad y_{\chi,i} = g_{\chi,i},\quad \text{где } g_{\chi,i}\in G \text{ таковы, что } \prod_i g_{\chi,i}^2 = q(\chi).$$

Осталось показать, что уравнение (4) не имеет решений в диэдральной группе $H = \langle b\rangle_2\leftthreetimes\langle a\rangle_\infty$.

Подстановка $x_j = b^{\varepsilon_j}a^{k_j}$ определяет гомоморфизм $\varphi\colon C\to H/\left\langle a^2\right\rangle$ и характер $\chi'\colon C\to\{\pm1\}$ естественным образом:

$$\chi'(d_jQ) = (-1)^{\varepsilon_j},\quad \text{то есть } \chi' = \widehat{\chi}\circ\varphi, \text{ где } \widehat{\chi}\colon H/\left\langle a^2\right\rangle\to\{\pm1\} \text{ — характер действия } H/\left\langle a^2\right\rangle \text{ на } \left\langle a^2\right\rangle.$$

Подставим теперь вместо переменных $y_{\chi,i}$ элементы $h_{\chi,i}\in H$ и заметим, что

$$\prod_{i=1}^n y_{\chi,i}^2 = \prod_{i=1}^n h_{\chi,i}^2 = a^{2l_\chi}\quad \text{для некоторых } l_\chi\in\mathbb{Z}.$$

Тогда по мультипликативному аналогу формулы $(*)$ мы имеем

$$v_\chi\left(x_1,\ldots,x_m,\prod_{i=1}^n y_{\chi,i}^{2|T(Q)|}\right)=v_\chi\left(x_1,\ldots,x_m,a^{2l_\chi\cdot|T(Q)|}\right)=\begin{cases}\left(a^{2l_{\chi'}}\right)^{2^{|C|}\cdot|T(Q)|}, & \text{если } \chi=\chi';\\ 1, & \text{если } \chi\neq\chi'.\end{cases}$$

Следовательно, левая часть уравнения (4) после такой подстановки превратится в

$$a^{2l_{\chi'}\cdot 2^{|C|}\cdot|T(Q)|\cdot k_\chi}\neq a^{2\cdot 2^{|C|}\cdot|T(Q)|},\quad \text{поскольку } k_\chi\neq\pm1,$$

и уравнение (4) не имеет решений в H, что и требовалось.

4. Пример

Рассмотрим доказательство импликации из 1) в 4) на примере:

$$G=D_\infty\times D_\infty=\Big(\langle b_1\rangle_2\leftthreetimes\langle a_1\rangle_\infty\Big)\times\Big(\langle b_2\rangle_2\leftthreetimes\langle a_2\rangle_\infty\Big)\quad\text{и}\quad G\supset H=\langle b\rangle_2\leftthreetimes\langle a\rangle_\infty\simeq D_\infty,\quad\text{где}\quad b=b_1b_2 \text{ и } a=a_1^3a_2^5.$$

В этом случае $Q=\big\langle\{g^2\mid g\in G\}\big\rangle=\langle a_1^2\rangle_\infty\times\langle a_2^2\rangle_\infty\simeq\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ и $C=G/Q=\langle a_1Q\rangle_2\times\langle b_1Q\rangle_2\times\langle a_2Q\rangle_2\times\langle b_2Q\rangle_2$. Итак, у нас имеется $2^4=16$ различных характеров $C\to\{\pm1\}$. При этом только для двух из них, α и β, подгруппы Q_χ нетривиальны:

$$\alpha: b_1\mapsto -1,\ a_1,a_2,b_2\mapsto 1,\qquad \beta: b_2\mapsto -1,\ a_1,b_1,a_2\mapsto 1.$$

Ясно, что элемент a^2 не является простым, и мы должны доказать, что подгруппа H не является вербально замкнутой.

Длинное слово $v_\chi(x_1,x_2,x_3,x_4,y)$ есть композиция (в произвольном порядке) следующих шестнадцати слов (как функций от y):

$$\begin{gathered}f_\chi(1,y),\ f_\chi(x_1,y),\ f_\chi(x_1x_2,y),\ f_\chi(x_1x_2x_3,y),\ f_\chi(x_1x_2x_3x_4,y),\ f_\chi(x_1x_2x_4,y),\ f_\chi(x_1x_3,y),\ f_\chi(x_1x_3x_4,y),\\ f_\chi(x_1x_4,y),\ f_\chi(x_2,y),\ f_\chi(x_2x_3,y),\ f_\chi(x_2x_3x_4,y),\ f_\chi(x_2x_4,y),\ f_\chi(x_3,y),\ f_\chi(x_3x_4,y),\ f_\chi(x_4,y).\end{gathered}\tag{$**$}$$

Здесь в качестве первого аргумента выступают всевозможные выражения вида $x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}x_4^{\varepsilon_4}$, где $\varepsilon_i\in\{0,1\}$, а

$$f_\chi(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}x_4^{\varepsilon_4},y)=y\cdot x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}x_4^{\varepsilon_4}\cdot y^{\chi(a_1^{\varepsilon_1}b_1^{\varepsilon_2}a_2^{\varepsilon_3}b_2^{\varepsilon_4})}\cdot(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}x_4^{\varepsilon_4})^{-1}.$$

Например, $f_\alpha(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}x_4^{\varepsilon_4},y)=y\cdot x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}x_4^{\varepsilon_4}\cdot y^{(-1)^{\varepsilon_2}}\cdot(x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}x_4^{\varepsilon_4})^{-1}$. Мы видим, что в диэдральной группе

$$f_\alpha\Big(\left(a^{k_1}b^{\delta_1}\right)^{\varepsilon_1}\left(a^{k_2}b^{\delta_2}\right)^{\varepsilon_2}\left(a^{k_3}b^{\delta_3}\right)^{\varepsilon_3}\left(a^{k_4}b^{\delta_4}\right)^{\varepsilon_4},a^{2k}\Big)=\begin{cases}a^{4k}, & \text{если } \varepsilon_2+\sum\limits_{i=1}^4\delta_i\varepsilon_i \text{ чётно};\\ 1, & \text{если } \varepsilon_2+\sum\limits_{i=1}^4\delta_i\varepsilon_i \text{ нечётно};\end{cases}\quad \text{где } k_i\in\mathbb{Z} \text{ и } \delta_i,\varepsilon_i\in\{0,1\}.$$

Таким образом, если взять $\delta_2=1$, а $\delta_1=\delta_3=\delta_4=0$, то $f_\alpha\Big(\left(a^{k_1}b^{\delta_1}\right)^{\varepsilon_1}\left(a^{k_2}b^{\delta_2}\right)^{\varepsilon_2}\left(a^{k_3}b^{\delta_3}\right)^{\varepsilon_3}\left(a^{k_4}b^{\delta_4}\right)^{\varepsilon_4},a^{2k}\Big)$ окажется равным a^{4k} при любом выборе ε_i; если же взять любой другой набор $\delta_i\in\{0,1\}$, то хотя бы одно из шестнадцати выражений $(**)$ станет равным единице после подстановки $x_i\to a^{k_i}b^{\delta_i}$ и $y\to a^{2k}$. Это означает, что для композиции v_α выражений $(**)$ мы имеем

$$v_\alpha\Big(\left(a^{k_1}b^{\delta_1}\right)^{\varepsilon_1},\left(a^{k_2}b^{\delta_2}\right)^{\varepsilon_2},\left(a^{k_3}b^{\delta_3}\right)^{\varepsilon_3},\left(a^{k_4}b^{\delta_4}\right)^{\varepsilon_4},a^{2k}\Big)=\begin{cases}a^{2^{17}k}, & \text{если } (\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)=(0,1,0,0);\\ 1, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Аналогичным образом ведут себя все остальные характеры. Например,

$$v_{\alpha\beta}\Big(\left(a^{k_1}b^{\delta_1}\right)^{\varepsilon_1},\left(a^{k_2}b^{\delta_2}\right)^{\varepsilon_2},\left(a^{k_3}b^{\delta_3}\right)^{\varepsilon_3},\left(a^{k_4}b^{\delta_4}\right)^{\varepsilon_4},a^{2k}\Big)=\begin{cases}a^{2^{17}k}, & \text{если } (\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)=(0,1,0,1);\\ 1, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Уравнения (4) в данном случае имеет вид

$$\Big(v_\alpha\left(x_1,x_2,x_3,x_4,y_{\alpha,1}^2\right)\Big)^3\cdot\Big(v_\beta\left(x_1,x_2,x_3,x_4,y_{\beta,1}^2\right)\Big)^5\cdot\prod_{\chi\neq\alpha,\beta}\Big(v_\chi\left(x_1,x_2,x_3,x_4,y_{\chi,1}^2\right)\Big)^{2018}=a^{2^{17}}.$$

(Мы написали в показателе 2018, чтобы подчеркнуть, что здесь можно писать любое число, кроме ± 1; разумеется, проще всего заменить 2018 на 0.)

Сказанное означает, что при любой подстановке $x_i \to a^{k_i} b^{\delta_i}$ левая часть этого уравнения примет значение из

$$\left\langle a^{2^{17}\cdot 3} \right\rangle, \text{ если } (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = (0,1,0,0);$$
$$\left\langle a^{2^{17}\cdot 5} \right\rangle, \text{ если } (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = (0,0,0,1);$$
$$\left\langle a^{2^{17}\cdot 2018} \right\rangle \text{ во всех остальных случаях.}$$

Это означает, что уравнение (4) не имеет решений в диэдральной группе. С другой стороны, в группе G решение есть: $x_1 = a_1$, $x_2 = b_1$, $x_3 = a_2$, $x_4 = b_2$, $y_{\alpha,1} = a_1$, $y_{\beta,1} = a_2$, $y_{\chi,1} = 1$ при $\chi \notin \{\alpha, \beta\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[КлМа18] Ант. А. Клячко, А. М. Мажуга, Вербально замкнутые почти свободные подгруппы, *Мат. сборник* (в печати).
Смотрите также arXiv:1702.07761.

[РХ13] В. А. Романьков, Н. Г. Хисамиев, Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп, *Алгебра и логика*, **52:4** (2013), 502-525.

[Lee02] D. Lee, On certain C-test words for free groups. *J. Algebra*, **247** (2002), 509-540.

[Mazh17] A. M. Mazhuga, On free decompositions of verbally closed subgroups of free products of finite groups, *J. Group Theory*, **20:5** (2017), 971-986.
Смотрите также arXiv:1605.01766.

[Mazh18] A. M. Mazhuga, Strongly verbally closed groups, *J. Algebra*, **493** (2018), 171-184.
Смотрите также arXiv:1707.02464

[MR14] A. Myasnikov, V. Roman'kov, Verbally closed subgroups of free groups, *J. Group Theory*, **17** (2014), 29-40.
Смотрите также arXiv:1201.0497.

[Rom12] V. A. Roman'kov, Equations over groups, *Groups Complexity Cryptology*, **4:2** (2012), 191-239.

[Sta71] J. Stallings, Group theory and three-dimensional manifolds, Yale Math. Monographs (1971).