УДК 519.157.1+519.175.1+519.176 MSC: 05D15,05C35,05C25

ИНВАРИАНТНЫЕ СИСТЕМЫ ВЗВЕШЕННЫХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ

Антон А. Клячко Михаил С. Терехов
Механико-математический факультет Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
klyachko@mech.math.msu.su *kombox.ver.2.0@yandex.ru*

Известно, что если в графе Γ можно уничтожить все подграфы, изоморфные данному конечному графу K, удалив n рёбер, то в Γ можно уничтожить все подграфы, изоморфные графу K, удалив не более $|E(K)|\cdot n$ рёбер, образующих множество, инвариантное относительно всех автоморфизмов. Мы строим первые примеры (связных) графов K, для которых эта оценка не является точной. В основе наших рассуждений лежит «взвешенный аналог» ранее известной оценки цены симметрии.

1. Введение

> Допустим, что в графе можно выбрать n вершин так, что каждый стоугольник содержит выбранную вершину. Сколько вершин нужно выбрать, если мы хотим, чтобы каждый стоугольник содержал выбранную вершину и, кроме того, хотим, чтобы выбор был *справедливым*, то есть хотим, чтобы множество выбранных вершин было инвариантно относительно всех автоморфизмов графа?

Известно, что ответ такой: *не больше $100n$ заведомо достаточно* (и эта оценка неулучшаема). Более того, в работе [KL21] получен следующий общий факт.

Теорема KL [KL21]. *Пусть группа G действует на множестве U и $\mathcal{F}$ — G-инвариантное семейство конечных подмножеств множества U, мощности которых ограничены в совокупности, а $X \subseteq U$ — конечная система представителей для этого семейства (то есть $X \cap F \neq \varnothing$ для любого $F \in \mathcal{F}$). Тогда найдётся G-инвариантная система представителей Y такая, что $|Y| \leqslant |X| \cdot \max\limits_{F\in\mathcal{F}}|F|$.*

Этот факт можно назвать комбинаторным аналогом (алгебраической) теоремы Макаренко–Хухро [KhM07a] (смотрите также [KhM07b], [KlMe09] и [KlMi15]). Некоторый обзор алгебраических теорем типа Макаренко–Хухро можно найти в [KL21].

Во-первых, мы доказываем (в параграфе 3) следующее обобщение теоремы KL.

Теорема о симметризации систем кратных представителей. *Пусть группа G действует на множестве U и $\mathcal{F}$ — G-инвариантное семейство конечных подмножеств множества U, мощности которых ограничены в совокупности, а $X \subseteq U$ — конечная система k-кратных представителей для этого семейства (то есть $|X \cap F| \geqslant k$ для любого $F \in \mathcal{F}$). Тогда найдётся G-инвариантная система k-кратных представителей Y такая, что $k \cdot |Y| \leqslant |X| \cdot \max\limits_{F\in\mathcal{F}}|F|$.*
При этом в качестве Y можно взять объединение всех G-орбит $G\circ u$ таких, что $|(G\circ u)\cap X|\cdot\max\limits_{F\in\mathcal{F}}|F| \geqslant |G\circ u|\cdot k$. В частности, $k\cdot|Y| \leqslant |X\cap Y|\cdot\max\limits_{F\in\mathcal{F}}|F|$.

Например, если в графе Γ выбрано конечное множество вершин X, содержащее по крайней мере две вершины из каждого стоугольника, то можно выбрать $(\operatorname{Aut}\Gamma)$-инвариантное множество вершин Y, содержащее по крайней мере две вершины из каждого стоугольника, и такое, что $|Y| \leqslant 50|X|$.

На самом деле мы доказываем (в параграфе 4) ещё более общую версию теоремы KL, которая позволят решить, например, следующую «прикладную» задачу:

> *мы формируем студсовет и хотим из каждых десяти студентов, первого из которых уважают девять остальных, выбрать*
> *– либо этого уважаемого (первого),*
> *– либо по крайней мере трёх уважающих (из девяти оставшихся).*
> *При этом минимизировать количество членов студсовета мы хотим. А если хотим ещё справедливость соблюсти, то какова цена справедливости?*

Возникает ориентированный граф с весами. В данном случае это десятивершинная звезда, у центральной вершины вес один, а у каждой из девяти оставшихся вершин вес $\frac{1}{3}$. И есть у нас (большой) ориетированный граф Γ (без всяких весов), описывающий, кто из студентов кого уважает. Мы хотим выбрать некоторые вершины в Γ так, чтобы каждая десятивершинная звезда была представлена, причём с весом не меньше, чем один. Если не заботиться о справедливости, то, предположим, можно выбрать студсовет из сорока человек. А если ещё и справедливость хотим соблюсти (то есть хотим, чтобы студсовет был инвариантен относительно $\operatorname{Aut}\Gamma$), насколько тогда больше придётся выбрать в худшем случае? Ответ такой: $\leqslant 40\cdot\left(1+9\cdot\frac{1}{3}\right) = 160$, поскольку верно следующее естественное обобщение теоремы KL (которое мы доказываем в параграфе 4).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00075.

Теорема о симметризации систем весовых представителей. *Пусть группа G действует на множестве U, $W \subset \mathbb{Q}$ — конечное множество (весов) и $\mathcal{F}$ — G-инвариантное семейство неотрицательных (весовых) функций $U \to W$ с конечным носителем (где G-инвариантность означает, что для каждой функции $F \in \mathcal{F}$ и каждого $g \in G$ функция $u \mapsto F(g \circ u)$ также лежит в $\mathcal{F}$). Пусть $X \subseteq U$ — конечная система весовых представителей для этого семейства, то есть $\sum\limits_{x \in X} F(x) \geqslant 1$ для любого $F \in \mathcal{F}$. Тогда найдётся G-инвариантная система весовых представителей $Y \subseteq U$ такая, что $|Y| \leqslant |X| \cdot \max\limits_{F \in \mathcal{F}} \sum\limits_{u \in U} F(u)$.*

При этом в качестве Y можно взять объединение всех G-орбит $G \circ u$ таких, что $|(G \circ u) \cap X| \cdot \max\limits_{F \in \mathcal{F}} \sum\limits_{u \in U} F(u) \geqslant |G \circ u|$. В частности, $|Y| \leqslant |X \cap Y| \cdot \max\limits_{F \in \mathcal{F}} \sum\limits_{u \in U} F(u)$.

Этот результат мы применяем, чтобы ответить на открытый вопрос о графах ([KL21], вопрос 2). Из теоремы KL немедленно вытекает следующий факт.

Следствие (теоремы KL) [KL21]. *Пусть Γ — граф и K — конечный граф. Тогда*

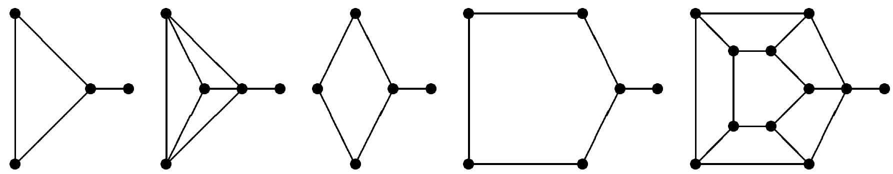
(v) *если в графе Γ можно выбрать конечное множество вершин X так, чтобы каждый подграф графа Γ, изоморфный графу K, имел хоть одну вершину из X, то в графе Γ можно выбрать* $(\operatorname{Aut}\Gamma)$*-инвариантное множество вершин Y так, чтобы опять каждый подграф графа Γ, изоморфный графу K, имел хоть одну вершину из Y, причём $|Y| \leqslant |X| \cdot$* (число вершин графа K);

(e) *если в графе Γ можно выбрать конечное множество рёбер X так, чтобы каждый подграф графа Γ, изоморфный графу K, имел хоть одно ребро из X, то в графе Γ можно выбрать* $(\operatorname{Aut}\Gamma)$*-инвариантное множество рёбер Y так, чтобы опять каждый подграф графа Γ, изоморфный графу K, имел хоть одно ребро из Y, причём $|Y| \leqslant |X| \cdot$* (число рёбер графа K).

Верно ли, что эти оценки неулучшаемы для каждого конкретного связного графа K?

(v) Для оценки (v) ответ положительный в общем случае [KL21], но отрицательный, если дополнительно потребовать связность графа Γ [T22] (причём минимальным контрпримером служит дерево $K = D_5$ с пятью вершинами).

(e) Мы показываем, что для оценки (e) ответ тоже отрицательный (даже если связность графа Γ не требовать), отвечая тем самым на открытый вопрос из [KL21]. Мы применяем теорему о симметризации систем весовых представителей (и разложение Дюльмажа–Мендельсона [DM58]) для построения широкого класса таких примеров *рёберно недорогих* графов K (рис. 1), смотрите следующий параграф (там же можно найти строгое определение «неулучшаемости»).



Примеры «графов-головастиков»

Рис. 1

Слово *граф* в этой статье означает неориентированный (возможно, бесконечный) граф без петель и кратных рёбер. Символы $V(\Gamma)$ и $E(\Gamma)$ обозначают множества вершин и рёбер графа Γ.

Первый автор благодарит фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

2. Рёберно недорогие «графы-головастики»

Рёберной представительностью $\Upsilon_{\mathrm{e}}(K, \Gamma)$ графа K в графе Γ называют [KL21] минимальное число n такое, что в графе Γ найдётся множество рёбер X мощности n, удовлетворяющее следующему условию:

$$\text{каждый подграф графа } \Gamma, \text{ изоморфный графу } K, \text{ содержит ребро из } X. \tag{1}$$

Симметричной рёберной представительностью $\Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K, \Gamma)$ графа K в графе Γ называют [KL21] минимальное число n такое, что в графе Γ найдётся инвариантное в классе всех автоморфизмов множество рёбер X мощности n с условием (1).

Ясно, что $\Upsilon_{\mathrm{e}}(K,\Gamma) \leqslant \Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma)$. Следствие из теоремы KL говорит, что $\Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma) \leqslant \Upsilon_{\mathrm{e}}(K,\Gamma)\cdot|E(K)|$. Граф K называют [KL21] *дорогим в смысле симметричной рёберной представительности* или просто *рёберно дорогим*, если

$$\forall m\in\mathbb{Z} \text{ найдётся граф } \Gamma_m \text{ такой, что } \Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma_m) = \Upsilon_{\mathrm{e}}(K,\Gamma_m)\cdot(\text{число рёбер графа } K) \geqslant m. \qquad (2)$$

Таким образом, граф K рёберно дорогой, если оценка из следствия (о рёбрах) теоремы KL не может быть улучшена для графа K.

Теорема о рёберной представительности «графов-головастиков». *Пусть конечный связный граф K содержит ровно одну вершину степени один, причём граф, получающийся из K удалением этой вершины и инцидентного ей ребра, вершинно транзитивен* (рис. 1). *Тогда $\Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma) \leqslant \big(|E(K)|-1\big)\cdot\Upsilon_{\mathrm{e}}(K,\Gamma)$ для любого графа Γ; в частности, граф K не является рёберно дорогим.*

Доказательство. Пусть K_0 — вершинно транзитивный граф, получающийся из K удалением «хвоста». Первое наблюдение состоит в том, что

> *множество представителей X для семейства $\{E(\widetilde K)\mid \Gamma\supseteq\widetilde K\simeq K\}$ обязано быть одновременно весовой системой представителей для семейства $\mathcal{F}'$ весовых функций следующего вида*
>
> $$F_{K'K''}\colon E(\Gamma)\to\mathbb{Q},\qquad F_{K'K''}(e)=\begin{cases}1, & \text{если } e\in K'\cap K''\\ 1/2, & \text{если } e\in(K'\cup K'')\setminus(K'\cap K'')\\ 0, & \text{если } e\notin(K'\cup K'')\end{cases},$$
>
> *где K' и K'' — подграфы графа Γ, изоморфные графу K_0 такие, что $K'\cup K''$ — связный граф и $V(K')\ne V(K'\cup K'')\ne V(K'')$* (смотрите рисунок 2, на котором K — это хвостатый треугольник).

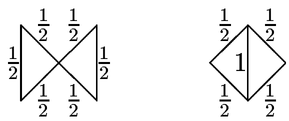


Рис. 2

Действительно, чтобы разрушить все подграфы в $K'\cup K''$, изоморфные графу K, не удаляя при этом рёбер из $K'\cap K''$, нам придётся удалить по крайней мере два ребра, поскольку удаление одного ребра e, скажем, из $K'\setminus(K'\cap K'')$ не разрушит K'', и хвост для K'' тоже останется, так как

- граф $K'\setminus\{e\}$ связный (ибо рёберная связность конечного вершинно транзитивного графа равна, как известно, степени вершины [Ma71], то есть больше, чем один, по условию);
- следовательно, граф $K''\cup K'\setminus\{e\}$ связный;
- существует вершина v, лежащая в K'', но не в K'.

Для каждой функции $F\in\mathcal{F}'$ мы имеем $\sum\limits_{u\in U}F(u)=|E(K_0)|=|E(K)|-1$, поэтому по теореме о симметризации систем весовых представителей некоторая симметричная весовая система представителей Y' для $\mathcal{F}'$ содержит не больше, чем $(|E(K)|-1)\cdot|X\cap Y'|$ рёбер.

Теперь рассматриваем граф $\Gamma'=\Gamma\setminus Y'$, на котором действует группа $G=\operatorname{Aut}\Gamma$ (поскольку множество Y' инвариантно). Мы знаем про этот граф вот что:

1) множество $X'=X\setminus(Y'\cap X)$ является в нём системой представителей для рёбер подграфов, изоморфных графу K;
2) множества вершин любых двух подграфов (в Γ'), изоморфных K_0, либо совпадают, либо не пересекаются.

В силу свойства 1)

> *нам осталось найти симметричную систему представителей Y'' для рёбер подграфов, изоморфных графу K, в Γ' такую, что $|Y''|\leqslant(|E(K)|-1)\cdot|X'|$;* (∗)

поскольку тогда $Y=Y'\cup Y''$ будет искомой симметричной системой представителей в Γ (так как $\Gamma\setminus Y$ не будет содержать подграфов, изоморфных K) и

$$|Y|=|Y'|+|Y''|\leqslant(|E(K)|-1)\cdot|X\cap Y'|+(|E(K)|-1)\cdot|X'|=(|E(K)|-1)\cdot|X|.$$

Рассмотрим следующий вспомогательный двудольный граф Δ:

– вершины доли A — это множества вершин подграфов графа Γ', изоморфных графу K_0 (другими словами, $A = \{V(S) \mid \Gamma' \supseteq S \simeq K_0\}$);
– вершины доли B — это все рёбра графа Γ';
– $a \in A$ и $b \in B$ соединены ребром, если в графе Γ' ровно один из концов ребра b лежит в a.

Множество $Q = \{a \in A \mid \text{некоторое ребро из } X' \text{ соединяет две вершины из } a\} \sqcup \{b \in B \mid b \in X'\} \stackrel{\text{опр}}{=} Q_A \sqcup Q_B$ является вершинным покрытием графа Δ (то есть представляет все рёбра), поскольку граф $\Gamma' \setminus X'$ не содержит подграфов, изоморфных графу K. Далее, $|Q| \leqslant |X'|$, поскольку различные подграфы графа Γ', изоморфные графу K_0, не имеют общих вершин по свойству 2). Из разложения Дюльмажа–Мендельсона [DM58] (смотрите также [LP86], теорема 3.2.4) вытекает, что

> *в каждом двудольном графе существует минимальное вершинное покрытие (то есть вершинное покрытие минимальной возможной мощности), инвариантное относительно всех автоморфизмов этого графа, сохраняющих доли.*

(А именно, в качестве такого покрытия можно взять множество вершин доли A, входящих в любое минимальное покрытие, объединённое с множеством вершин доли B, входящих хоть в какое-то минимальное покрытие.) Напомним, что (*вершинным*) *покрытием* графа называют такое множество вершин, что каждое ребро инцидентно одной из них.

Выберем такое инвариантное минимальное вершинное покрытие Q' в графе Δ и положим

$$Y'' = \{\text{рёбра всех подграфов, изоморфных графу } K_0 \text{ в } Q' \cap A\} \sqcup (Q' \cap B) \stackrel{\text{опр}}{=} Y''_A \sqcup Y''_B.$$

Ясно, что Y'' является системой представителей рёбер всех подграфов, изоморфных графу K, в Γ', а

$$|Y''| = |Y''_A| + |Y''_B| \leqslant (|E(K)| - 1) \cdot |Q' \cap A| + |Q' \cap B| \leqslant (|E(K)| - 1) \cdot (|Q'|) \leqslant (|E(K)| - 1) \cdot |Q| \leqslant (|E(K)| - 1) \cdot |X'|.$$

В силу $(*)$ это завершает доказательство.

3. Доказательство теоремы о симметризации систем кратных представителей

Рассуждение ниже почти дословно копирует доказательство из [KL21]; разница состоит в том, что вместо теоремы Б. Неймана [Neu54] мы используем её обобщение, принадлежащее Суну.

Положим $m = \max\limits_{F \in \mathcal{F}} |F|$ и рассмотрим следующее множество $Y = \left\{ y \in U \;\middle|\; |(G \circ y) \cap X| \geqslant \frac{k}{m} |G \circ y| \right\}$ (в частности, Y не содержит точек с бесконечной орбитой). Ясно, что это множество G-инвариантно. Ясно также, что $k|Y| \leqslant m|X|$ (поскольку для каждой орбиты $G \circ u$ имеет место неравенство $k|(G \circ u) \cap Y| \leqslant m|(G \circ u) \cap X|$).

Осталось показать, что Y является системой представителей для $\mathcal{F}$. Возьмём какое-то множество $F \in \mathcal{F}$. Каждое множество $g \circ F$ (где $g \in G$) принадлежит $\mathcal{F}$ в силу инвариантности семейства $\mathcal{F}$ и, следовательно, $|X \cap g \circ F| \geqslant k$. Значит, группа G k-кратно покрывается семейством множеств

$$G_f = \{g \in G \mid g \circ f \in X\}, \quad \text{где } f \in F.$$

Каждое из множеств G_f является либо пустым, либо объединением конечного числа левых смежных классов группы G по стабилизатору $\mathrm{St}(f)$ точки f:

$$G_f = \{g \in G \mid g \circ f \in X\} = \bigcup_{x \in X} \{g \in G \mid g \circ f = x\} = \bigcup_{x \in X \cap G \circ f} g_x \cdot \mathrm{St}(f), \text{ где } g_x \in G \text{ выбраны так, что } g_x \circ f = x.$$

Таким образом, мы получили k-кратное покрытие группы G левыми смежными классами по некоторым подгруппам. Воспользуемся теперь результатом Суна ([Sun01], лемма 2.2 + [Sun90], следствие 1*)):

> *если группа G k-кратно покрывается конечным числом смежных классов по некоторым (необязательно разным) подгруппам, то $\sum \frac{1}{|G : G_i|} \geqslant k$ (где обратный к бесконечному кардиналу считается нулём).*

Следовательно, (учитывая то, что индекс стабилизатора равен длине орбиты) мы получаем

$$k \leqslant \sum_{f \in F} \frac{1}{|G : \mathrm{St}(f)|} \cdot |G \circ f \cap X| = \sum_{f \in F} \frac{|G \circ f \cap X|}{|G \circ f|}.$$

Поскольку число слагаемых в этой сумме равно $|F| \leqslant m$, по крайней мере одно из слагаемых должно быть не меньше чем k/m, то есть $|G \circ f \cap X| / |G \circ f| \geqslant k/m$, что означает $f \in Y$ (по определению множества Y) и завершает доказательство.

---

*) В [Sun01] это сформулировано для подгрупп конечного индекса, а в [Sun90] показано, что смежные классы по подгруппам бесконечного индекса можно убрать, и при этом k-кратное покрытие останется k-кратным покрытием.

4. Доказательство теоремы о симметризации систем весовых представителей

Мы будем считать, что все веса $w \in W$ не превосходят единицы, поскольку замена каждой весовой функции $F \in \mathcal{F}$ на функцию $x \mapsto \max\bigl(F(x), 1\bigr)$ не влияет на понятие весовой системы представителей.

Возьмём вспомогательное конечное множество E (нужное для моделирования весов) такое, что числа $|E| \cdot w$ целые при всех $w \in W$. На декартовом произведении $\widetilde{U} = U \times E$ (с проекциями $\pi_U \colon \widetilde{U} \to U$ и $\pi_E \colon \widetilde{U} \to E$) естественным образом действует прямое произведение $\widetilde{G} = G \times S(E)$ группы G и симметрической группы $S(E)$ перестановок множества E.

Из того, что множество $X \subseteq U$ является весовой системой представителей для семейства функций $\mathcal{F}$, сразу следует, что множество $\widetilde{X} = X \times E$ является системой представителей кратности $|E|$ для следующего $\widetilde{G}$-инвариантного семейства подмножеств множества $\widetilde{U}$:

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \bigl\{\widetilde{F} \subseteq \widetilde{U} \;\bigm|\; \exists F \in \mathcal{F} \;\forall u \in U \; |\pi_U^{-1}(u) \cap \widetilde{F}| = F(u) \cdot |E|\bigr\}.$$

Другими словами, для каждой весовой функции $F \colon U \to \mathbb{Q}$ в множество $\widetilde{\mathcal{F}}$ мы включаем все подмножества декартова произведения $\widetilde{U} = U \times E$, содержащие $F(u)|E|$ элементов множества E «над» каждой точкой $u \in U$. В примере со студсоветом (смотрите введение) в качестве E можно взять трёхэлементное множество $E = \{1, 2, 3\}$; при этом семейство $\widetilde{\mathcal{F}}$ будет состоять из всех подмножеств множества $\{\textit{студенты}\} \times E$ вида

$$\bigl\{(\mathbf{A}, 1),\ (\mathbf{A}, 2),\ (\mathbf{A}, 3),\ (\mathbf{B}, i_1),\ (\mathbf{C}, i_2), \dots,\ (\mathbf{J}, i_9)\bigr\},$$

где $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{I}, \mathbf{J}$ — девять разных студентов, уважающих другого студента $\mathbf{A}$, а $i_j \in \{1, 2, 3\}$.

По теореме о симметризации систем кратных представителей существует $\widetilde{G}$-инвариантная $|E|$-кратная система представителей $\widetilde{Y}$ для того же семейства, причём $|\widetilde{Y}| \leqslant |\widetilde{X} \cap \widetilde{Y}| \cdot \max\limits_{\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}}} |\widetilde{F}|/|E| = |\widetilde{X} \cap \widetilde{Y}| \cdot \max\limits_{F \in \mathcal{F}} \sum\limits_{u \in U} F(u)$.

Осталось заметить, что проекция $Y = \pi_U(\widetilde{Y}) \subseteq U$ будет искомой G-инвариантной весовой системой представителей для семейства функций $\mathcal{F}$. Действительно,

- мы имеем $|Y| = |\widetilde{Y}|/|E| \leqslant |\widetilde{Y} \cap \widetilde{X}| \cdot \max\limits_{F \in \mathcal{F}} \sum\limits_{u \in U} F(u)/|E| = |Y \cap X| \cdot \max\limits_{F \in \mathcal{F}} \sum\limits_{u \in U} F(u)$ (где первое равенство вытекает из $S(E)$-инвариантности множества $\widetilde{Y}$, неравенство — это оценка из предыдущего абзаца, а последнее равенство $|\widetilde{Y} \cap \widetilde{X}|/|E| = |Y \cap X|$ очевидно (поскольку $\widetilde{X} = X \times E$ по определению множества $\widetilde{X}$, а $\widetilde{Y} = Y \times E$ по определению множества Y и из-за $S(E)$-инвариантности множества $\widetilde{Y}$);
- а то, что Y является весовой системой представителей для семейства функций $\mathcal{F}$, немедленно вытекает из того, что $\widetilde{Y} = Y \times E$ есть система $|E|$-кратных представителей для семейства множеств $\widetilde{\mathcal{F}}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[КлМе09] А. А. Клячко, Ю. Б. Мельникова, Короткое доказательство теоремы Макаренко–Хухро о больших характеристических подгруппах с тождеством, Мат. сборник, 200:5 (2009), 33-36. См. также arXiv:0805.2747.

[Т22] М. С. Терехов, Цена симметрии в связных графах, Мат. заметки, 112:6 (2022), 895-902. См. также arXiv:2202.09590.

[DM58] A. L. Dulmage, N. S. Mendelsohn, Coverings of bipartite graphs, Canadian Journal of Mathematics, 10 (1958), 517-534.

[KhM07a] E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko, Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities, J. London Math. Soc., 75:3 (2007), 635-646.

[KhM07b] E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko, Characteristic nilpotent subgroups of bounded co-rank and automorphically-invariant ideals of bounded codimension in Lie algebras, Quart. J. Math., 58 (2007), 229-247.

[KL21] A. A. Klyachko, N. M. Luneva, Invariant systems of representatives, or the cost of symmetry, Discrete Mathematics, 344:6 (2021), 112361. См. также arXiv:1908.03315.

[KlMi15] A. A. Klyachko, M. V. Milentyeva, Large and symmetric: The Khukhro-Makarenko theorem on laws — without laws, J. Algebra, 424 (2015), 222-241. См. также arXiv:1309.0571.

[LP86] L. Lovász, M. D. Plummer, Matching theory. Elsevier, 1986.

[Ma71] W. Mader, Minimale n-fach kantenzusammenhängende Graphen, Math. Ann. 191:1 (1971), 21-28.

[Neu54] B. H. Neumann, Groups covered by permutable subsets, J. London Math. Soc., s1-29:2 (1954), 236-248.

[Sun90] Zhi-Wei Sun, Finite coverings of groups, Fund. Math., 134:1 (1990), 37-53.

[Sun01] Zhi-Wei Sun, Exact m-covers of groups by cosets, European Journal of Combinatorics, 22:3 (2001), 415-429.