УДК 512.543.7+512.543.16

СВОБОДНЫЕ ПОДГРУППЫ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КОПРЕДСТАВЛЕНИЙ С ОДНИМ СООТНОШЕНИЕМ

Антон А. Клячко
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
Москва 119992, Ленинские горы, МГУ
klyachko@daniil.math.msu.su

Пусть G — нетривиальная группа без кручения и w — произвольное слово в алфавите $G \cup \{x_1^{\pm1}, \ldots, x_n^{\pm1}\}$. Мы доказываем, что при $n \geqslant 2$ группа $\widetilde{G} = \langle G, x_1, x_2, \ldots, x_n \mid w = 1\rangle$ всегда содержит неабелеву свободную подгруппу. При $n = 1$ на вопрос о наличии свободных подгрупп в $\widetilde{G}$ удаётся полностью ответить в унимодулярном случае (то есть когда сумма показателей при x_1 в слове w равна единице). В работе обсуждаются также некоторые обобщения этих результатов.

Ключевые слова: относительные копредставления, группы с одним соотношением, свободные подгруппы.

0. Введение

Следующая теорема была сформулирована в [Ma32]; доказательство, насколько известно автору, впервые появилось в [Mo69].

Теорема о свободных подгруппах групп с одним соотношением. *Группа с одним соотношением*

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \mid w = 1\rangle$$

не содержит неабелевых свободных подгрупп тогда и только тогда, когда она либо циклическая, либо изоморфна группе Баумслага–Солитэра $G_{1,k} = \left\langle x, y \mid y^{-1}xy = x^k\right\rangle$*, где* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Мы пытаемся решить ту же задачу для относительных копредставлений с одним соотношением, то есть для групп вида

$$\widetilde{G} = \langle G, x_1, x_2, \ldots, x_n \mid w = 1\rangle \overset{\text{опр}}{=} (G * F(x_1, x_2, \ldots, x_n)) / \langle\langle w\rangle\rangle .$$

Здесь G — произвольная группа, а w — произвольный элемент свободного произведения группы G и свободной группы $F(x_1, \ldots, x_n)$. Мы будем всегда предполагать, что группа G не имеет кручения.

В случае когда $n \geqslant 2$ ответ оказывается вполне ожидаемым.

Теорема 1. *Если группа G нетривиальна и не имеет кручения, а $n \geqslant 2$, то группа $\widetilde{G} = \langle G, x_1, x_2, \ldots, x_n \mid w = 1\rangle$ содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Отметим, что при $n \geqslant 3$ наличие свободных подгрупп в $\widetilde{G}$ непосредственно вытекает из теоремы о свободных подгруппах групп с одним соотношением. Таким образом, теорема 1 неочевидна только при $n = 2$.

Случай $n = 1$ является самым трудным. Важную роль здесь играет сумма показателей при образующем. Слово $w = \prod g_i t^{\varepsilon_i} \in G * \langle t\rangle_\infty$ мы называем *унимодулярным*, если $\sum \varepsilon_i = 1$. Если сумма показателей в слове w равна любому другому числу $p \neq \pm1$, то неизвестно даже, вкладывается ли группа G в $\widetilde{G} = \langle G, t \mid w = 1\rangle$; другими словами, неизвестно, при каких условиях группа $\widetilde{G}$ отлична от $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. На эту тему имеется много работ, но ответ удаётся получить лишь при наложения дополнительных жёстких ограничений на группу G или/и на слово w (см., например, [Б84], [КП95], [C02], [C03], [CG95], [CG00], [EH91], [FeR98], [GR62], [IK00], [Le62], [Ly80], [S87]). Поэтому здесь мы ограничимся изучением унимодулярных копредставлений.

Инъективность естественного отображения $G \to \widetilde{G}$ в унимодулярном случае была доказана в [Kl93] (см. также [FeR96]). Более тонкие свойства группы $\widetilde{G}$ можно найти в [CR01], [FoR03], [Кл06] и [Кл05].

Теорема 2. *Если группа G не имеет кручения, а слово $w \in G * \langle t\rangle_\infty$ унимодулярно, то группа $\widetilde{G} = \langle G, t \mid w = 1\rangle$ содержит неабелеву свободную подгруппу, за исключением следующих двух случаев:*
1) *$w \equiv g_1 t g_2$, где $g_1, g_2 \in G$ (при этом $\widetilde{G} \simeq G$), и группа G не содержит неабелевых свободных подгрупп;*
2) *G — циклическая группа, а $\widetilde{G}$ изоморфна группе Баумслага–Солитэра $G_{1,2} = \left\langle g, t \mid g^{-1}tg = t^2\right\rangle$.*

В работе [Кл06] было предложено обобщение понятия унимодулярности на случай когда слово w является элементом свободного произведения группы G и произвольной (то есть не обязательно циклической) группы T. Слово $w \equiv g_1 t_1 \ldots g_n t_n \in G * T$ называется *унимодулярным*, если
1) $\prod t_i$ является элементом бесконечного порядка в группе T;
2) циклическая подгруппа $\langle \prod t_i\rangle$ нормальна в T;
3) факторгруппа $T / \langle \prod t_i\rangle$ является группой с сильно однозначным умножением.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №05-01-00895.

Напомним, что группа H называется *группой с однозначным умножением* (или *UP-группой*), если для любых двух её конечных непустых подмножеств $X, Y \subseteq H$ их произведение XY содержит по крайней мере один элемент, раскладывающийся в произведение элемента из X и элемента из Y однозначно. Одно время была гипотеза, что всякая группа без кручения является группой с однозначным умножением (обратное, очевидно, верно). Однако выяснилось, что существует контрпример ([P88], [RS87]).

Мы называем группу H *группой с сильно однозначным умножением*, если для любых двух её конечных непустых подмножеств $X, Y \subseteq H$ таких, что $|Y| \geqslant 2$, их произведение XY содержит по крайней мере два однозначно разложимых элемента x_1y_1 и x_2y_2 таких, что $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ и $y_1 \neq y_2$.

Насколько мы знаем, все известные примеры UP-групп обладают сильно однозначным умножением. Например, этим свойством обладают все правоупорядочиваемые группы, локально индикабельные группы, диффузные группы в смысле Бовдича.

Следующая теорема, с одной стороны, обобщает (точнее, дополняет) теорему 2, а с другой стороны, является ключевым шагом в доказательстве теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть группа G не имеет кручения, группа T нециклическая и слово $w \in G*T$ унимодулярно. Тогда группа $\widetilde{G} = \langle G, T \mid w = 1\rangle \stackrel{\text{опр}}{=} (G*T)/\langle\langle w\rangle\rangle$ не содержит неабелевых свободных подгрупп тогда и только тогда, когда группа G циклическая, группа T не содержит неабелевых свободных подгрупп, а слово w сопряжено в $G*T$ слову вида gt, где $t \in T$, а g – порождающий элемент группы G.*

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если x и y — элементы некоторой группы, а X — подмножество группы, то x^y означает $y^{-1}xy$, коммутатор $[x, y]$ понимается как $x^{-1}y^{-1}xy$, а $\langle X\rangle$ и $\langle\langle X\rangle\rangle$ означают, соответственно, подгруппу, порождённую множеством X и нормальную подгруппу, порождённую множеством X. Символом $|X|$ мы обозначаем мощность множества X.

1. Доказательство теоремы 1

Пусть слово w имеет вид $w \equiv g_1x_{j_1}^{\varepsilon_1}g_2x_{j_2}^{\varepsilon_2}\dots g_px_{j_p}^{\varepsilon_p}$ и слово $w' \in F(x_1, \dots, x_n)$ получается из w стиранием коэффициентов: $w' = x_{j_1}^{\varepsilon_1}x_{j_2}^{\varepsilon_2}\dots x_{j_p}^{\varepsilon_p}$.

Случай 1: w' является истинной степенью в свободной группе $F(x_1, \dots, x_n)$. В этом случае группа $\widetilde{G}$ содержит неабелеву свободную подгруппу, поскольку по теореме о свободных подгруппах групп с одним соотношением такую подгруппу содержит группа с одним соотношением $T_1 = \langle x_1, \dots, x_n \mid w' = 1\rangle$, являющаяся гомоморфным образом группы G.

Случай 2: w' не является истинной степенью. Рассмотрим группы

$$T = \langle x_1, \dots, x_n \mid [x_1, w'] = \dots = [x_n, w'] = 1\rangle \quad \text{и} \quad T_1 = \langle x_1, \dots, x_n \mid w' = 1\rangle = T/\langle\langle w'\rangle\rangle.$$

Группа T является свободным центральным расширением группы с одним соотношением T_1. Хорошо известно, что если w' не является истинной степенью в свободной группе $F(x_1, \dots, x_n)$, то группа T_1 является локально индикабельной ([Б84]) и, следовательно, группой с сильно однозначным умножением. Элемент w' имеет бесконечный порядок в группе T (см. [ЛШ80]). Таким образом, слово w, рассматриваемое как элемент свободного произведения $G*T$, является унимодулярным. Группа T не является циклической, поскольку её факторгруппа по коммутанту является свободной абелевой ранга n и $n \geqslant 2$. Осталось заметить, что группа $\langle G, T \mid w = 1\rangle$ является гомоморфным образом группы $\widetilde{G}$ и, таким образом, утверждение теоремы 1 немедленно вытекает из теоремы 3.

2. Доказательство теоремы 2

Согласно [FoR03] мы говорим, что элемент $v \in G*\langle t\rangle_\infty$ с циклически несократимой формой $v \equiv g_1t^{\varepsilon_1}\dots g_nt^{\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_i \in \{\pm1\}$ и $g_i \in G$, имеет *сложность* 0, если все показатели ε_i равны между собой (то есть если слово либо положительно, либо отрицательно); мы говорим, что сложность слова v равна 1, если среди показателей встречаются и положительные, и отрицательные, но либо два положительных показателя никогда не идут подряд, либо два отрицательных показателя никогда не идут подряд (здесь $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ рассматривается как циклическая последовательность). В остальных случаях мы считаем, что сложность слова v больше единицы. Полное определение сложности можно найти в [FoR03].

Теорема о минимальной сложности [FoR03]. *Если группа G не имеет кручения, циклически приведённое слово $w \in G*\langle t\rangle_\infty$ унимодулярно и сложность слова $v \in G*\langle t\rangle_\infty$ меньше сложности слова w, то $v \neq 1$ в группе $\widetilde{G} = \langle G, t \mid w = 1\rangle$.*

Из этой теоремы немедленно вытекает, что в случае когда сложность слова w больше единицы, $\widetilde{G}$ содержит свободный квадрат группы G (поскольку $\langle G, G^t\rangle = G*G^t$), а значит и неабелевы свободные подгруппы.

Остаётся рассмотреть копредставления с соотношением сложности 1:

$$\widetilde{G} = \left\langle G, t \;\middle|\; ct\prod_{i=0}^{m}(b_i a_i^t) = 1 \right\rangle, \quad \text{где } m \geqslant 0,\ a_i, b_i \in G \setminus \{1\},\ c \in G. \tag{1}$$

В этом случае мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма [Кл05, лемма 22]. *Если группа G не имеет кручения, а группа $\widetilde{G}$ задана копредставлением* (1), *то существует такое $d \in \{2,3\}$, что*

$$u \equiv \prod_{i=1}^{s} y_i x_i^{t^d} \neq 1 \text{ в } \widetilde{G}$$

для любого натурального s и любых $x_i, y_i \in G$ таких, что $\Big|\{i \mid x_i \in \langle a_m\rangle\}\Big| + \Big|\{i \mid y_i \in \langle b_0\rangle\}\Big| \leqslant 2$ и $u \neq 1$ в $G * \langle t\rangle_\infty$.

Эта лемма показывает, что элементы $g_1 h_1^{t^d}$ и $h_2^{t^d} g_2$ группы $\widetilde{G}$ порождают свободную подгруппу ранга 2 при любых $g_1, g_2, h_1, h_2 \in G$ таких, что $h_1, h_2, h_1 h_2 \notin \langle a_m\rangle$ и $g_2, g_1, g_2 g_1 \notin \langle b_0\rangle$. Следовательно, из отсутствия неабелевых свободных подгрупп в $\widetilde{G}$ вытекает, что группа G почти циклическая (либо $|G : \langle a_m\rangle| \leqslant 2$, либо $|G : \langle b_0\rangle| \leqslant 2$), а значит и циклическая (в силу отсутствия кручения в группе G).

Если группа G циклическая, то группа $\widetilde{G}$ является группой с одним соотношением и по теореме о свободных подгруппах групп с одним соотношением либо содержит неабелеву свободную подгруппу, либо является циклической (чего не может быть при $m \geqslant 0$), либо изоморфна группе $G_{1,k}$. В последнем случае из унимодулярности соотношения w вытекает, что число k обязано быть двойкой, в чём легко убедиться, рассмотрев факторгруппу по коммутанту. Теорема 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 3

Пусть слово w имеет вид $w \equiv g_1 t_1 \dots g_n t_n$.

Случай 1: $n = 1$. Ясно, что в этом случае $|T/\langle t_1\rangle| = \infty$,

$$\widetilde{G} \simeq \begin{cases} G \underset{g_1 = t_1^{-1}}{*} T, & \text{если } g_1 \neq 1 \text{ в } G; \\ G * (T/\langle t_1\rangle), & \text{если } g_1 = 1 \text{ в } G \end{cases}$$

и утверждение теоремы вытекает из следующих хорошо известных простых фактов:

1. *Свободное произведение с объединённой подгруппой содержит неабелеву свободную подгруппу, если объединяемая подгруппа является собственной в каждом из сомножителей и в одном из сомножителей её индекс больше двух.*
2. *Пусть $\langle a\rangle$ — циклическая нормальная подгруппа группы A. Тогда A содержит неабелеву свободную подгруппу тогда и только тогда, когда такую подгруппу содержит факторгруппа $A/\langle a\rangle$.*

Случай 2: $n > 1$ и группа $\langle t_1, \dots, t_n\rangle$ является циклической (и, следовательно, порождается элементом $t = \prod t_i$ в силу унимодулярности). В этом случае группа $\widetilde{G}$ представляется в виде свободного произведения с объединённой подгруппой:

$$\widetilde{G} \simeq \langle G, t \mid w = 1\rangle \underset{\langle t\rangle}{*} T.$$

Такое свободное произведение всегда содержит неабелеву свободную подгруппу, поскольку объединяемая подгруппа имеет бесконечный индекс в каждом из сомножителей. Бесконечность индекса подгруппы $\langle t\rangle$ в первом сомножителе следует из теоремы о минимальной сложности, которая, в частности, гарантирует, что $G \cap \langle t\rangle = \{1\}$ при $n > 1$. А то, что $|T : \langle t\rangle| = \infty$, очевидным образом вытекает из унимодулярности слова w и нецикличности группы T.

Случай 3: группа $\langle t_1, \dots, t_n\rangle$ не является циклической. В этом случае без потери общности можно считать, что $T = \langle t_1, \dots, t_n\rangle$.

Положим $t = \prod t_i$. Разложим T в объединение смежных классов:

$$T = \coprod_{x \in T/\langle t\rangle} c_x \langle t\rangle, \quad \text{где } c_1 = 1.$$

Запишем слово w в виде

$$w \equiv t \prod_i {g_i}^{{c_{x_i}}{t^{k_i}}} = 1. \tag{2}$$

Пусть $X_1 = \{x_i\}$ — это множество всех $x \in T/\langle t\rangle$, встречающихся в несократимой записи (2). Заметим, что $|X_1| > 1$, поскольку группа $T = \langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ не является циклической. В работе [Кл06] показано, что в группе $\widetilde{G}$ имеет место разложение

$$H_1 = \langle \{G^{c_y} \mid y \in X_1\}\rangle = \mathop{\ast}_{y\in X_1} G^{c_y}.$$

Отсюда немедленно следует, что группа $\widetilde{G}$ содержит свободный квадрат группы G, а значит и неабелеву свободную подгруппу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Б84] Бродский С. Д. Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. ж. 1984. Т.25. №2. С.84–103.

[КП95] Клячко Ант. А., Прищепов М. И. Метод спуска для уравнений над группами // Вестн. МГУ: Мат., Мех. 1995. №4. С.90–93.

[Кл05] Клячко Ант. А. Гипотеза Кервера–Лауденбаха и копредставления простых групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44. №4. С. 399–437.

[Кл06] Клячко Ант. А. Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами // Мат. заметки. (в печати). См. также arXiv:math.GR/0406382.

[ЛШ80] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[Мо69] Молдаванский Д. И. Об одной теореме Магнуса // Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та 1969. Т.44. С.26–28.

[C02] Clifford A. A class of exponent sum two equations over groups // Glasgow Math. J. 2002. V.44. P.201–207.

[C03] Clifford A. Nonamenable type K equations over groups // Glasgow Math. J. 2003. V.45. P.389–400.

[CG95] Clifford A., Goldstein R. Z. Tesselations of S^2 and equations over torsion-free groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1995. V.38. P.485–493.

[CG00] Clifford A., Goldstein R. Z. Equations with torsion-free coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2000. V.43. P.295–307.

[CR01] Cohen M. M., Rourke C. The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups // Geometry & Topology. 2001. V.5. P.127–142.

[EH91] Edjvet M., Howie J. The solution of length four equations over groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V.326. P.345–369.

[FeR96] Fenn R., Rourke C. Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups // L'Enseignment Mathématique. 1996. T.42. P.49–74.

[FeR98] Fenn R., Rourke C. Characterisation of a class of equations with solution over torsion-free groups, from "The Epstein Birthday Schrift" (eds. I. Rivin, C. Rourke and C. Series), Geometry and Topology Monographs. 1998. V.1. P.159-166.

[FoR03] Forester M., Rourke C. Diagrams and the second homotopy group // arXiv:math.AT/0306088.

[GR62] Gerstenhaber M., Rothaus O. S. The solution of sets of equations in groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1962. V.48 P.1531–1533.

[IK00] Ivanov S. V., Klyachko Ant. A. Solving equations of length at most six over torsion-free groups // J. Group Theory. 2000. V.3. P.329–337.

[Kl93] Klyachko Ant. A. A funny property of a sphere and equations over groups // Comm. Algebra. 1993. V.21. P.2555–2575.

[Le62] Levin F. Solutions of equations over groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V.68. P.603–604.

[Ly80] Lyndon R. C. Equations in groups // Bol. Soc. Bras. Math. 1980. V.11. №1. P.79–102.

[Ma32] Magnus W. Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation // Math. Ann. 1932. V.106. P.295–307.

[P88] Promyslow S. D. A simple example of a torsion free nonunique product group // Bull. London Math. Soc. 1988. V.20. P.302–304.

[RS87] Rips E., Segev Y. Torsion free groups without unique product property // J. Algebra 1987. V.108. P.116–126.

[S87] Stallings J. R. A graph-theoretic lemma and group embeddings // Combinatorial group theory and topology (eds. S. M. Gersten, J. R. Stallings). Annals of Mathematical Studies. 1987. V.111. P.145–155.