УДК 512.543.72 MSC: 20F70, 20F65, 57M07

ЕЩЁ ОДНА ТЕОРЕМА О СВОБОДЕ: КОНЕЧНЫЕ И ЛОКАЛЬНО ИНДИКАБЕЛЬНЫЕ ГРУППЫ

Антон А. Клячко Михаил А. Михеенко
Механико-математический факультет Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
klyachko@mech.math.msu.su mamikheenko@mail.ru

Мы доказываем общий факт, включающий в себя в качестве частных случаев
- с одной стороны, теорему Герстенхабера–Ротхауза (1962) и её обобщение, принадлежащее Ницше и Тому (2022),
- а с другой стороны, теорему Бродского–Хауи–Шорта (1980–1984), обобщающую классическую теорему Магнуса о свободе (1930).

0. Введение

Уравнение $w(x,y,\ldots)=1$ с коэффициентами из группы G, где $w(x,y,\ldots)$ — слово в алфавите $G\sqcup\{x^{\pm1},y^{\pm1},\ldots\}$, называют *разрешимым над* группой G, если в некоторой большей группе $\widetilde G\supseteq G$ найдутся элементы $\widetilde x,\widetilde y,\ldots$ такие, что $w(\widetilde x,\widetilde y,\ldots)=1$.

Исследованию разрешимости уравнений над группами посвящено множество работ (смотрите, например, [GR62], [Le62], [Ly80], [How81], [Б84], [EH91], [How91], [K93], [КП95], [FeR96], [K97], [K99], [CG00], [EdJu00], [IK00], [Juhá03], [K06], [БК12], [KT17], [BE18], [ABA21], [EH21], [NT22] и литературу, там цитируемую). Следующая теорема представляет собой один из самых классических результатов на эту тему.

Теорема Герстенхабера–Ротхауза (для одного уравнения) [GR62] (смотрите также [ЛШ80]). *Если уравнение $g_1x^{\varepsilon_1}\ldots g_nx^{\varepsilon_n}=1$ (с одним неизвестным x) над конечной группой $G\ni g_1,\ldots,g_n$ невырождено, то есть $\sum\varepsilon_i\neq0$, то оно разрешимо над G.*

Верно ли аналогичное утверждение для произвольных (бесконечных) групп, неизвестно — это знаменитая (усиленная) гипотеза Кервера–Лауденбаха; Пестов [P08] показал, что это верно для гиперлинейных групп.*)

Дальнейшее обобщение было получено совсем недавно.

Теорема Ницше–Тома [NT22] (для одного уравнения). *Уравнение $v(x,y,\ldots)=1$ над конечной (и даже над гиперлинейной) группой G разрешимо над G, если содержание слова $v(x,y,\ldots)$ нетривиально.*

Здесь под *содержанием* слова v из свободного произведения $G*F(x,y,\ldots)$ группы G и свободной группы $F(x,y,\ldots)$ понимается образ слова v при естественном гомоморфизме $\varepsilon\colon G*F(x,y,\ldots)\to F(x,y,\ldots)$ (ядро которого есть нормальное замыкание $\langle\langle G\rangle\rangle$ группы G).

Следующая теорема об уравнениях над *локально индикабельной* группой (то есть группой, всякая нетривиальная конечно порождённая подгруппа которой допускает эпиморфизм на $\mathbb{Z}$) представляет собой результат совсем другого рода.

Теорема Бродского–Хауи–Шорта [Б80], [Б84], [How82], [Sh81]. *Естественные отображения*

$$C\to(C*D)/\langle\langle w\rangle\rangle\leftarrow D$$

инъективны, если группы C и D локально индикабельны, а слово $w\in C*D$ не сопряжено элементам множества $C\cup D$.

Это известное обобщение классической теоремы Магнуса о свободе [Mag30] может, как нетрудно сообразить, быть переформулировано на языке уравнений:

всякое неэкзотическое уравнение над локально индикабельной группой разрешимо над ней

(где уравнение $w(x,y,\ldots)=1$ над группой G называется *экзотическим*, если слово $w(x,y,\ldots)\in G*F(x,y,\ldots)$ сопряжено элементу группы G). И наоборот: теорема Ницше–Тома может быть переформулирована, как теорема о свободе:

> *если группа K является свободным произведением конечных групп (или, более общо, группа K гиперлинейна), группа F свободна, а образ слова $w\in K*F$ при естественном гомоморфизме $K*F\to F$ нетривиален, то естественное отображение $K\to(K*F)/\langle\langle w\rangle\rangle$ инъективно.*

Однако никакой связи между теоремами Бродского–Хауи–Шорта и Герстенхабера–Ротхауза известно не было. Цель нашей статьи — заполнить этот пробел, то есть «подружить» конечные группы с локально индикабельными. Следующий факт включает в себя все упомянутые выше результаты.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00075.

*) Определения, примеры и известные свойства гиперлинейных (= Конн-вложимых) групп можно найти, например, в [T18]; здесь мы отметим только, что гиперлинейными заведомо являются все конечные группы и их свободные произведения (а возможно, и вообще все группы — это известный открытый вопрос).

Теорема о свободе. *Если группы C и D локально индикабельны, группа K является GR*-группой, а образ слова $w \in C*D*K$ при естественном гомоморфизме $C*D*K \to C*D$ не сопряжён элементам множества $C \cup D$, то естественные отображения $C*K \to (C*D*K)/\langle\langle w\rangle\rangle \leftarrow D*K$ инъективны.*

Что такое GR*-группы, читатель может узнать из следующего параграфа; примерами таких групп являются все гиперлинейные группы, в частности, все свободные произведения конечных групп. Поэтому в качестве частных случаев этой теоремы получаются известные факты:

- при $K = \{1\}$ мы получаем теорему Бродского–Хауи–Шорта;
- если группы $C = F(x, y, \ldots)$ и $D = F(x_1, y_1, \ldots)$ свободные и $w = v(xx_1, yy_1, \ldots)$, где $v(x', y', \ldots) \in (K * F(x', y', \ldots) \setminus \langle\langle K\rangle\rangle$, то мы получаем теорему Ницше–Тома (для одного уравнения), обобщающую теорему Герстенхабера–Ротхауза (для одного уравнения).

Полную формулировку нашего основного результата можно найти в параграфе 2, а доказательство — в параграфе 4 (параграф 3 же содержит ключевую лемму).

Полные формулировки теорем Герстенхабера–Ротхауза и Ницше–Тома, в которых речь идёт о системах уравнений, можно найти в параграфах 1 и 3. Мы не пытаемся (в этой статье) их обобщить (поскольку в теореме Бродского–Хауи–Шорта существенно, что уравнение одно). Однако мы сильно опираемся на эти результаты (более того, наш подход основан на идеях из [NT22]). Последний параграф содержит доказательство теоремы Ницше–Тома (которая фактически была получена в [NT22], но здесь есть некоторые нюансы, смотрите последний параграф).

Кстати, теорема Бродского–Хауи–Шорта тоже в полной формулировке говорит больше (и мы этим пользуемся), а именно, к формулировке, данной выше, следует добавить слова: „*… При этом группа $(C*D)/\langle\langle w\rangle\rangle$ тоже локально индикабельна, если слово w не является истинной степенью.*“ (а к формулировке на языке уравнений — слова: „*…, причём решение может быть найдено в локально индикабельной группе, содержащей данную*“).

Авторы благодарят фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

1. GR- и GR*-группы

Систему уравнений над группой называют *невырожденной*, если целочисленные строки, составленные из сумм показателей при неизвестных в уравнениях линейно независимы. Например, следующая система с неизвестными x, y, z, t над группой $G \ni a, b, c, d$:

$$\begin{cases} axbycyz^5dz^{-2} = 1 \\ [xt, dz]^{2022}dx^4cy^5bz^6 = 1 \\ ax^7y^8dz^k = 1 \end{cases} \quad \text{имеет матрицу из сумм показателей} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & k & 0 \end{pmatrix},$$

то есть эта система вырождена тогда и только тогда, когда $k = 9$.

Теорема Герстенхабера–Ротхауза [GR62]. *Всякая невырожденная система уравнений над конечной группой разрешима над ней.*

Мы предлагаем называть группу G *GR-группой*, если всякая невырожденная система уравнений над G разрешима над G. Пестов [P08] заметил, что все гиперлинейные группы являются GR-группами.

Нетрудно сообразить, что

класс GR-групп является квазимногообразием,

то есть этот класс состоит из всех групп, удовлетворяющих некоторой (возможно, бесконечной) системе *квазитождеств*, то есть (конечных) формул вида

$$(\forall x, y, \ldots)\big(u_1(x, y, \ldots) = 1 \;\&\ldots\;\& \; u_k(x, y, \ldots) = 1 \Longrightarrow v(x, y, \ldots) = 1\big),$$

где $u_i(x, y, \ldots)$ и $v(x, y, \ldots)$ — слова в алфавите $\{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, \ldots\}$.

Проще всего в этом убедиться, воспользовавшись следующей характеризацией квазимногообразий [Маль70]:

непустой класс групп является квазимногообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно перехода к подгруппам и фильтрованным произведениям.

Для класса GR-групп оба условия выполняются очевидным образом.

Неудобство квазимногообразия GR-групп состоит в том, что непонятно, замкнуто ли оно относительно свободных произведений. Группу G мы называем *GR*-группой*, если она удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:

1) свободное произведение $G * \mathbb{Z}$ является GR-группой;
2) свободное произведение $G * G$ является GR-группой;
2′) свободное произведение любого семейства групп, изоморфных группе G, является GR-группой;
3) группа G вкладывается в какую-то GR-группу $\widetilde{G} \supseteq G$, не удовлетворяющую никаким нетривиальным *смешанным тождествам с константами из* G, то есть для любого слова $v(x, y, \ldots) \in G * F(x, y, \ldots) \setminus \{1\}$ (где $F(x, y, \ldots)$ — свободная группа) найдутся такие $\widetilde{x}_v, \widetilde{y}_v, \ldots \in \widetilde{G}$, что $v(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \ldots) \neq 1$.

Утверждение. *Эти условия действительно эквивалентны.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что, если $|G| \leqslant 2$, то все условия эквивалентны, поскольку все они выполнены в этом случае (так как класс финитно аппроксимируемых групп замкнут относительно свободных произведений [Gr57] и содержится в классе GR-групп по теореме Герстенхабера–Ротхауза, поэтому, если $|G| = 2$, то в качестве $\widetilde{G}$ можно взять, например, свободное произведение группы G и свободной группы счётного ранга).

Если же $|G| > 2$, то условия 1) и 2) эквивалентны, поскольку группы $G * \mathbb{Z}$ и $G * G$ вкладываются друг в друга*) (а всякая подгруппа GR-группы является GR-группой).

Условие 2′) эквивалентно условиям 1) и 2) по аналогичным причинам:
- свободное произведение произвольного семейства групп, изоморфных группе G аппроксимируется конечными произведениями $G * \ldots * G$ (поскольку любой элемент произвольного свободного произведения содержится в конечном подпроизведении, а всякое подпроизведение является ретрактом всего свободного произведения);
- группа, аппроксимируемая GR-группами, сама является GR-группой (поскольку класс GR-групп — это квазимногообразие);
- конечное свободное произведение $G * \ldots * G$ (по крайней мере двух сомножителей) и $G * \mathbb{Z}$ вкладываются друг в друга по той же «обратной теореме Куроша»*).

Кроме того, из условия 1) вытекает условие 3), поскольку $G * \mathbb{Z}$ содержит свободное произведение $\widetilde{G} = G * F_\infty$ группы G и свободной группы бесконечного (счётного) ранга, в которой, очевидно, нет никаких смешанных тождеств с константами из G.

Осталось доказать импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Декартово произведение $H = \bigtimes\limits_{v \in (\widetilde{G} * \langle t \rangle_\infty) \setminus \{1\}} \widetilde{G}_v$ копий $\widetilde{G}_v$ группы $\widetilde{G}$ является GR-группой (так как декартово произведение любого семейства GR-групп, очевидно, является GR-группой). Группа $G * \langle t \rangle_\infty$ вкладывается в H так: группу G вложим диагонально, а элементу t сопоставим элемент, у которого координата с номером v равна $\widetilde{t}_v \in \widetilde{G}$ (то есть $v(\widetilde{t}_v) \neq 1$). Ясно, что это вложение. Осталось воспользоваться тем, что подгруппа GR-группы сама является GR-группой. Это завершает доказательство эквивалентности.

Вопрос 1. *Замкнуты ли классы GR- и GR*-групп относительно прямых и свободных произведений?*

Простые соображения показывают, что
- *класс GR-групп, очевидно, замкнут относительно прямых произведений*;
- *если класс GR-групп замкнут относительно свободных произведений, то GR-группы и GR*-группы — это одно и то же* (это видно из условия 2) определения GR*-групп; вообще, всякая GR-группа, нетривиальным образом раскладывающаяся в свободное произведение, является GR*-группой);
- *если класс GR*-групп замкнут относительно прямых произведений* (*или, более общо, если существует GR*-группа, содержащая в качестве подгрупп любые две наперёд заданные GR*-группы*), *то класс GR*-групп замкнут относительно свободных произведений* (как видно из определения).

Это означает, что ответы на вопрос 1 могут быть только такими:
- либо GR=GR* и этот класс групп замкнут относительно обеих операций,
- либо класс GR-групп замкнут относительно прямых произведений, но не замкнут относительно свободных произведений, а класс GR*-групп
  - либо не замкнут ни относительно прямых, ни относительно свободных произведений,
  - либо замкнут относительно обеих операций,
  - либо замкнут относительно свободных произведений, но не замкнут относительно прямых произведений.

*) Здесь и далее мы пользуемся следующим известным фактом, который мы оставляем читателю в качестве несложного упражнения: *подгруппы недиэдрального свободного произведения с точностью до изоморфизма описываются так: это всевозможные группы, которые не противоречат соображениям мощности и теореме Куроша о подгруппах.*

Разумеется, никакой из известных в настоящее время фактов не противоречит тому, что GR=GR* и это просто класс всех групп (гипотеза Хауи). Класс гиперлинейных групп замкнут относительно свободных произведений [BDJ08], поэтому все гиперлинейные группы являются не только GR-, но и GR*-группами.

2. Основной результат

Пусть $A \triangleleft G$ и F — свободная группа. Естественный эпиморфизм $\varepsilon_A\colon G * F \to (G/A) * F$ мы называем G/A-*содержанием.* При этом G/G-содержание мы называем просто *содержанием*, так же, как в [KT17] и [NT22].

Основная теорема. *Пусть группа G содержит нормальную подгруппу A, которая является GR-группой, а факторгруппа G/A локально индикабельна. Тогда уравнение $w(x,y,\ldots)=1$ разрешимо над G, если G/A-содержание слова $w(x,y,\ldots)$ не сопряжено элементам группы G/A в $(G/A)*F(x,y,\ldots)$.*

Из основной теоремы немедленно вытекает теорема о свободе, сформулированная во введении. Действительно, рассмотрим группу $G=C*D*K$, её нормальную подгруппу $A=\langle\!\langle K\rangle\!\rangle$ (которая является GR-группой, поскольку она изоморфна свободному произведению некоторого семейства групп, изоморфных GR*-группе K), и вложение $\varphi\colon G\to G*\langle t\rangle_\infty$, где $C\ni c\mapsto c^t\in G*\langle t\rangle_\infty$, а остальные свободные сомножители отображаются тождественно. Уравнение $\varphi(w)=1$ (с одной переменной t) разрешимо над G по основной теореме, то есть, композиция $G\xrightarrow{\varphi} G*\langle t\rangle_\infty\to G*\langle t\rangle_\infty\,/\,\langle\!\langle\varphi(w)\rangle\!\rangle$ инъективна на $D*K$ и содержит w в своём ядре, что и требовалось. Инъективность естественного отображения группы $C*K$ устанавливается аналогично.

3. Ключевая лемма

Доказательство следующего результата (фактически полученного в [NT22]) можно найти в последнем параграфе.

Теорема Ницше–Тома. *Система уравнений $\{w_1(x,y,\ldots)=1,\ w_2(x,y,\ldots)=1,\ldots\}$ над GR-группой G разрешима над G, если стандартный комплекс копредставления $\langle x,y,\ldots \mid \varepsilon(w_1)=1,\ \varepsilon(w_2)=1,\ldots\rangle$ (где ε — это содержание) допускает накрытие с тривиальной второй группой гомологий (над $\mathbb{Z}$).*

Чтобы применить эту теорему, нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть локально индикабельная группа L действует свободно на множестве X и $L\times F(X)\xrightarrow{\circ}F(X)$ — естественное продолжение этого действия на свободную группу с базисом X.
Тогда для каждого слова $v\in F(X)\setminus\{1\}$ некоторое накрытие стандартного комплекса K копредставления $H=\langle X\mid L\circ v\rangle$ имеет тривиальные вторые гомологии.*

Доказательство. Пусть $v=u^k$ и слово u не является истинной степенью в $F(X)$. Искомое накрытие — это накрытие $p\colon\widetilde{K}\to K$, соответствующее нормальному замыканию $\langle\!\langle L\circ u\rangle\!\rangle\triangleleft H=\pi_1(K)$ орбиты слова u. В явном виде комплекс $\widetilde{K}$ представляют собой граф Кэли группы $A=\langle X\mid L\circ u\rangle$, к которому по каждому циклу с меткой $l\circ u$ (где $l\in L$) приклеен («k раз накрученный») двумерный диск, на краю которого написано слово $l\circ v=l\circ u^k$.

Группа $A=\langle X\mid L\circ u\rangle$ вкладывается в группу $\widehat{A}=Y*L/\,\langle\!\langle\widehat{u}\rangle\!\rangle$, где Y — множество представителей орбит действия группы L на X, а слово $\widehat{u}$ получается из слова u заменой каждой буквы x на lyl^{-1}, где $l\in L$ и $y\in Y$ такие единственные элементы, что $x=l\circ y$. Вложение $A\to\widehat{A}$ очевидное: $x=l\circ y\mapsto lyl^{-1}$. При этом группа $\widehat{A}$ локально индикабельна [Б84] и $\widehat{A}=L\leftthreetimes A$. На комплексе $\widetilde{K}$ действует группа $\widehat{A}=L\leftthreetimes A$: действие группы A — это стандартное действие группы на своём графе Кэли, а группа L действует сопряжением на вершинах: $l\circ a=lal^{-1}$ (при этом вершины, соединённые ребром с меткой x превращаются в вершины, соединённые ребром с меткой $l\circ x$). Такое действие группы $\widehat{A}$

- транзитивно на двумерных клетках и на вершинах
- и свободно на (ориентированных) рёбрах.

Первое совсем очевидно, а второе объясняется просто: стабилизатор ребра должен стабилизировать его начало, а на вершинах действие транзитивно, поэтому достаточно показать, что стабилизатор каждого ребра e, выходящего из единицы, тривиален, а это сразу видно: равенство $(l,a)\circ e=e$ влечёт, что $a=1$ (иначе получится ребро с другим началом), а теперь равенство $l\circ e=e$ означает, что $l=1$, поскольку действие группы L на X свободно по условию.

Теперь всё просто. Поскольку действие на двумерных клетках транзитивно, нетривиальность вторых гомологий означает равенство $r\overline{u}=0$, где

- $\overline{u}$ — сумма рёбер границы одной двумерной клетки (которая не равна нулю, поскольку универсальное накрытие группы с одним соотношением $u=1$, не являющимся истинной степенью, как известно, стягиваемо, то есть группы без кручения с одним соотношением асферичны, смотрите [ЛШ80]),
- а r — ненулевой элемент группового кольца $\mathbb{Z}[\widehat{A}]$ группы $\widehat{A}$.

Свободность действия на рёбрах сразу приводит к делителям нуля в групповом кольце $\mathbb{Z}[\widehat{A}]$ локально индикабельной группы $\widehat{A}$, чего не может быть [Hig40].

4. Доказательство основной теоремы

По условию слово $\varepsilon_A(w) \in (G/A) * F(x, y, \dots)$ не сопряжено элементам подгруппы G/A и, следовательно, уравнение $\varepsilon_A(w) = 1$ имеет решение в некоторой локально индикабельной группе B, содержащей G/A (по теореме Бродского–Хауи–Шорта).

Значит, мы имеем вложения группы G в декартовы сплетения: $G \subseteq A \bar{\wr} (G/A) \subseteq A \bar{\wr} B = A^B \rtimes B$ (где первое вложение есть теорема Калужнина–Краснера [KK51], смотрите также [KaM82], например). Следовательно, заменяя группу G на $A \bar{\wr} B$, а группу A — на её декартову степень $A^B \triangleleft A \bar{\wr} B$ (которая, разумеется, тоже является GR-группой), мы можем считать, что уравнение $\varepsilon_A(w) = 1$ имеет решение $\widehat{x}, \widehat{y}, \dots \in G/A$; а значит, сделав очевидную замену переменных ($x \mapsto x\widehat{x},\ y \mapsto y\widehat{y}, \dots$), мы добьёмся того, что $\varepsilon_A(w)$ содержится в нормальном замыкании $\langle\langle F \rangle\rangle$ подгруппы $F = F(x, y, \dots)$ в группе $(G/A) * F$. Таким образом, мы будем считать, что слово $w = w(x, y, \dots)$ можно переписать как слово $\widehat{w}$ в алфавите $\{x^{\pm b}, y^{\pm b}, \dots \mid b \in B = G/A\} \sqcup A$ (поскольку мы уже считаем, что $G = A \rtimes B$).

Мы попадаем в ситуацию, описанную в лемме. Полагая в этой лемме $X = \{bxb^{-1}, byb^{-1}, \dots \mid b \in B\}$ и $v = \varepsilon(\widehat{w}) \in F(X)$, где $\varepsilon\colon F(X) * A \to F(X)$ — естественная ретракция, а $L = B$, мы получаем, что некоторое накрытие стандартного комплекса копредставления $H = \langle X \mid B \circ \varepsilon(\widehat{w}) \rangle$ имеет тривиальные вторые гомологии. По теореме Ницше–Тома это означает разрешимость системы уравнений $\{b \circ w = 1 \mid b \in B\}$ (с неизвестными $X = B \circ \{x, y, \dots\}$) над группой A (где действие группы B на множестве X продолжено на группу $A * F(X)$ естественным образом: $b \circ a \overset{\text{опр}}{=} bab^{-1}$ при $a \in A$). Другими словами, естественное отображение $A \to \widetilde{A} = \big(A * F(X)\big) / \langle\langle \{b \circ w = 1 \mid b \in B\} \rangle\rangle$ инъективно. На группе $\widetilde{A}$ действует группа B и это действие продолжает действие группы B на A сопряжениями. Поэтому естественное отображение $G = A \rtimes B \to \widetilde{G} = \widetilde{A} \rtimes B$ инъективно. При этом $w(x, y, \dots) = 1$ в $\widetilde{G}$, что и означает разрешимость уравнения.

5. Копредставления подгрупп и теорема Ницше–Тома

В этом параграфе мы докажем теорему Ницше–Тома в том виде, в котором она сформулирована в параграфе 3. Фактически этот результат доказан в [NT22], но сформулирован там, к сожалению, более слабый вариант (смотрите теорему 1.3 и замечание 2.2 из [NT22]). Наш подход несколько отличается от доказательства, которое можно извлечь из [NT22].

Следующее утверждение хорошо известно, смотрите, например, [ЦФК88], теорема 2.2.1 или [ЛШ80], предложение II.4.1.

Теорема Шрайера о копредставлениях подгруппы [Sch27]**.** *Пусть U — подгруппа группы $G = \langle X \mid R \rangle$ и множество $T \subseteq F(X)$ есть шрайеровская система представителей правых смежных классов свободной группы $F(X)$ по подгруппе $\pi^{-1}(U)$, где $\pi\colon F(X) \to G = F/\langle\langle R \rangle\rangle$ — естественный эпиморфизм. Тогда подгруппа U порождается образами слов $y_{t,x} = tx(\overline{tx})^{-1} \in F(X)$ и задаётся копредставлением, в котором порождающими служат все нетривиальные слова $\{y_{t,x} \mid t \in T, x \in X\}$, а определяющими соотношениями — все слова $\{trt^{-1} \mid t \in T, x \in X\}$, переписанные, как слова от нетривиальных порождающих $y_{t,x}$ (трактуемых, как отдельные буквы).*

Здесь черта означает взятие представителя: $\overline{v} \in T$ (где $v \in F(X)$) определяется, как единственное слово из T такое, что $\pi^{-1}(U)\overline{v} = \pi^{-1}(U)v$; а *шрайеровость* понимается стандартным образом: любое начало любого слова из T лежит в T.

Геометрическая интерпретация этого копредставления, которое мы будем называть *шрайеровским*, также хорошо известна:

- группа G понимается, как фундаментальная группа стандартного комплекса K, отвечающего копредставлению $\langle X \mid R \rangle$ (то есть вершина в K одна, рёбра соответствуют образующим из X, а двумерные клетки — соотношениям из R);
- подгруппа U есть фундаментальная группа комплекса $\widetilde{K}$ (с отмеченной вершиной), накрывающего комплекс K;
- вершины комплекса $\widetilde{K}$ соответствуют правым смежным классам группы G по подгруппе U (и группы $F(X)$ по подгруппе $\pi^{-1}(U)$);
- шрайеровская система представителей соответствует выбору максимального поддерева в одномерном остове комплекса $\widetilde{K}$;
- образующие $y_{t,x}$ соответствуют рёбрам комплекса $\widetilde{K}$ (или, более точно, каждому ребру $e \in \widetilde{K}$ ставится в соответствие путь, который начинается в отмеченной вершине, доходит по выбранному максимальному поддереву до начала ребра e, проходит ребро e и возвращается в отмеченную вершину по максимальному поддереву); при этом нетривиальные образующие $y_{t,x}$ соответствуют рёбрам, не вошедшим в максимальное поддерево;
- наконец, определяющим соотношениям подгруппы U соответствуют двумерные клетки комплекса $\widetilde{K}$.

Из этой геометрической интерпретации непосредственно видно, что

> *стандартный комплекс копредставления $G = \langle X \mid R\rangle$ допускает накрытие с тривиальной группой вторых гомологий тогда и только тогда, когда определяющие соотношения шрайеровского копредставления некоторой подгруппы $U \subseteq G$ представляют собой невырожденную систему (в смысле параграфа 1).*

Таким образом, мы можем переформулировать теорему Ницше–Тома на комбинаторно-групповом языке (без топологии и без гомологий).

Теорема Ницше–Тома (чисто групповая формулировка)**.** *Система уравнений $W = 1$ (возможно, бесконечная и, возможно, с бесконечным множеством неизвестных X) над GR-группой G разрешима над G, если найдётся подгруппа группы $\langle X \mid \varepsilon(W)\rangle$, определяющие соотношения шрайеровского копредставления которой являются невырожденной системой.* (Здесь ε — это содержание, смотрите введение.)

Доказательство. Пусть $A \subseteq \langle X \mid \varepsilon(W)\rangle$ — подгруппа с невырожденным шрайеровским копредставлением, о которой идёт речь.

Рассмотрим какое-нибудь копредставление $G = \langle Z \mid V\rangle$ группы G, соответствующее копредставление группы $\big(G*F(X)\big)/\langle\langle W\rangle\rangle = \langle Z \sqcup X \mid V \sqcup W\rangle = H$, естественный эпиморфизм $\theta\colon H \to H/\langle\langle G\rangle\rangle = \langle X \mid \varepsilon(W)\rangle$ и подгруппу $\theta^{-1}(A) \subseteq H$. Нетрудно сообразить, что шрайеровское копредставление для подгруппы $\theta^{-1}(A) \subseteq H$ превращается в шрайеровское копредставление для подгруппы $A \subseteq \langle X \mid \varepsilon(W)\rangle$ после вычёркивания всех порождающих, соответствующих сопряжённым к порождающим из Z (если мыслить геометрически, то каждая вершина накрывающего комплекса, соответствующего подгруппе $\theta^{-1}(A) \subseteq H$, содержится в подкомплексе, изоморфном стандартному комплексу копредставления $G = \langle Z \mid V\rangle$; а после стягивания в точку каждого такого подкомплекса весь комплекс превращается в накрывающий комплекс, соответствующий подгруппе $A \subseteq \langle X \mid \varepsilon(W)\rangle$).
Таким образом, определяющие соотношения группы $\theta^{-1}(A)$ образуют невырожденную систему уравнений над свободным произведением $\Big|\langle X \mid \varepsilon(W)\rangle : A\Big|$ копий группы G. Поскольку G — GR-группа, естественное отображение $G \to \theta^{-1}(A) \subseteq H$ инъективно*) (чтобы в этом убедиться, можно профакторизовать группу $\theta^{-1}(A)$ по нормальному замыканию свободного произведения всех копий группы G, кроме одной). Из этого немедленно вытекает инъективность естественного гомоморфизма $G \to H$, что и требовалось.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[БК12] Д. В. Баранов, А. А. Клячко, Экономное присоединение квадратных корней к группам, Сибирский мат. журнал, 53:2 (2012), 250-257. См. также arXiv:1101.3019.

[Б80] С. Д. Бродский, Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением, УМН, 35:4(214) (1980), 183-183.

[Б84] С. Д. Бродский, Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением, Сибирский мат. журнал, 25:2 (1984), 84-103.

[КаМ82] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, Наука, М., 1982.

[К06] А. А. Клячко, Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами, Мат. заметки, 79:3 (2006), 409-419. См. также arXiv:math.GR/0406382.

[КП95] А. А. Клячко, М. И. Прищепов, Метод спуска для уравнений над группами, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 4 (1995), 90-93.

[ЛШ80] Р. Линдон, П. Шупп, Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[Маль70] А. И. Мальцев, Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

[ЦФК88] Х. Цишанг, Э. Фогт, Х. Д. Колдевай, Поверхности и разрывные группы. М.: Наука (1988).

[ABA21] M. F. Anwar, M. Bibi, M. S. Akram, On solvability of certain equations of arbitrary length over torsion-free groups, Glasgow Mathematical Journal, 63:3 (2021), 651-659. См. также arXiv:1903.06503.

[BDJ08] N. Brown, K. Dykema, K. Jung, Free entropy dimension in amalgamated free products, Proc. London Math. Soc., 97:2 (2008), 339-367. См. также arXiv:math/0609080.

[BE18] M. Bibi, M. Edjvet, Solving equations of length seven over torsion-free groups, Journal of Group Theory, 21:1 (2018), 147-164.

[CG00] A. Clifford, R. Z. Goldstein, Equations with torsion-free coefficients, Proc. Edinburgh Math. Soc., 43:2 (2000), 295-307.

[EH91] M. Edjvet, J. Howie, The solution of length four equations over groups, Trans. Amer. Math. Soc., 326:1 (1991), 345-369.

[EH21] M. Edjvet, J. Howie, On singular equations over torsion-free groups, International Journal of Algebra and Computation, 31:3 (2021), 551-580. См. также arXiv:2001.07634.

) но мы не можем утверждать, что всё свободное произведение $\Big|\langle X \mid \varepsilon(W)\rangle : A\Big|$ копий группы G вкладывается в $\theta^{-1}(A)$; оно вкладывается, если G не просто GR-, а GR-группа.

[EdJu00] M. Edjvet, A. Juhász, Equations of length 4 and one-relator products, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 129:2 (2000), 217-230.
[FeR96] R. Fenn, C. Rourke, Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups, L'Enseignment Mathématique, 42 (1996), 49-74.
[GR62] M. Gerstenhaber, O.S. Rothaus, The solution of sets of equations in groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 48:9 (1962), 1531-1533.
[Gr57] K. W. Gruenberg, Residual properties of infinite soluble groups, Proc. London Math. Soc., s3-7:1 (1957), 29-62.
[Hig40] G. Higman, The units of group-rings, Proc. London Math. Soc., s2-46:1 (1940), 231-248.
[How81] J. Howie, On pairs of 2-complexes and systems of equations over groups, J. Reine Angew Math., 1981:324 (1981), 165-174.
[How91] J. Howie, The quotient of a free product of groups by a single high-powered relator. III: The word problem, Proc. Lond. Math. Soc., 62:3 (1991), 590-606.
[IK00] S. V. Ivanov, A. A. Klyachko, Solving equations of length at most six over torsion-free groups, Journal of Group Theory, 3:3 (2000), 329-337.
[Juhá03] Juhász A. On the solvability of a class of equations over groups, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 135:2 (2003), 211-217.
[K93] A. A. Klyachko, A funny property of sphere and equations over groups, Communications in Algebra, 21:7 (1993), 2555-2575.
[K97] A. A. Klyachko, Asphericity tests, International Journal of Algebra and Computation, 7:4 (1997), 415-431.
[K99] A. A. Klyachko, Equations over groups, quasivarieties, and a residual property of a free group, Journal of Group Theory, 2:3 (1999), 319-327.
[KT17] A. A. Klyachko, A. B. Thom, New topological methods to solve equations over groups, Algebraic and Geometric Topology, 17:1 (2017), 331-353. См. также arXiv:1509.01376.
[KK51] M. Krasner, L. Kaloujnine, Produit complet des groupes de permutations et le problème d'extension de groupes. III, Acta Sci. Math., 14 (1951), 69-82.
[Le62] F. Levin, Solutions of equations over groups, Bull. Amer. Math. Soc., 68:6 (1962), 603-604.
[Ly80] R. C. Lyndon, Equations in groups, Bol. Soc. Bras. Math., 11:1 (1980), 79-102.
[Mag30] W. Magnus, Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz), J. Reine Angew Math., 163 (1930) 141-165.
[NT22] M. Nitsche, A. Thom, Universal solvability of group equations, Journal of Group Theory, 25:1 (2022), 1-10. См. также arXiv:1811.07737.
[P08] V. G. Pestov, Hyperlinear and sofic groups: A brief guide, Bull. Symb. Log., 14:4 (2008), 449-480. См. также arXiv:0804.3968.
[Sch27] O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 5:1 (1927), 161-183.
[Sh81] H. Short, Topological methods in group theory: the adjunction problem. Ph.D. Thesis, University of Warwick, 1981.
[T18] A. Thom, Finitary approximations of groups and their applications, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians — Rio de Janeiro 2018. Vol. III. Invited lectures, World Scientific, Hackensack (2018), 1779-1799. См. также arXiv:1712.01052.