УДК 512.542 + 512.543.72 MSC: 20D60, 20F70

О ЧИСЛЕ ЭПИ-, МОНО- И ГОМОМОРФИЗМОВ ГРУПП

Елена К. Брусянская Антон А. Клячко
Механико-математический факультет Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
ebrusianskaia@gmail.com klyachko@mech.math.msu.su

Число гомоморфизмов из группы F в группу G делится, как известно, на наибольший общий делитель порядка группы G и экспоненты группы $F/[F,F]$. Мы исследуем вопрос о том, что можно сказать про число гомоморфизмов, удовлетворяющих некоторым естественным условиям вроде инъективности или сюръективности. Простейшим нетривиальным следствием наших результатов является следующий факт: *в любой конечной группе число порождающих пар (x,y) таких, что $x^3=1=y^5$, делится на наибольший общий делитель пятнадцати и порядка группы $[G,G]\cdot\{g^{15} \mid g\in G\}$.*

0. Введение

Нас вдохновляли три классических результата про делимость в группах: теоремы Фробениуса (1895), Соломона (1969) и Ивасаки (1985).

Теорема Фробениуса [Frob95] (см. также [And16])**.** *Число решений уравнения $x^n=1$ в конечной группе G делится на* НОД$(|G|,n)$ *для любого натурального n.*

Теорема Соломона [Solo69]. *В любой группе число решений конечной системы уравнений без коэффициентов делится на порядок этой группы, если уравнений меньше, чем неизвестных.*
Другими словами, *число гомоморфизмов $\langle x_1,\ldots,x_m \mid w_1=\ldots=w_n=1\rangle\to G$ делится на $|G|$, если $m>n$.*

Теорема Ивасаки [Iwa82]. *Для любого целого n число элементов конечной группы G, n-е степени которых лежат в данной подгруппе $A\subseteq G$, делится на $|A|$.*

Эти теоремы много раз обобщалась в разных направлениях, смотрите, например, [Frob03], [Hall36], [Kula38], [Sehg62], [Isaa70], [BrTh88], [Yosh93], [Стру95], [AsTa01], [SaAs07], [AmV11], [GRV12], [ACNT13] [KM14], [KM17], [BKV19], [KR20] и литературу там цитируемую. Например, в [GRV12] доказано следующее обобщение теоремы Соломона.

Теорема Гордона–Родригеса-Виллегаса [GRV12]. *Число гомоморфизмов $F\to G$ делится на порядок группы G, если F — конечно порождённая группа, коммутант которой имеет бесконечный индекс.*

Позже выяснилось, что между тремя классическими результатами есть связь:
- в [KM17] доказан некоторый общий факт, который мы здесь называем *теоремой KM*, включающий в себя в качестве частных случаев теоремы Соломона и Ивасаки (и их обобщения);
- а в [BKV19] показано, что все три классических теоремы (и их обобщения, включая теорему KM) являются частными случаями одной очень общей теоремы, которую мы здесь называем *теоремой BKV* (смотрите следующий параграф).

Авторы [KM17] выводят из теоремы KM следующий факт о делимости числа гомоморфизмов, удовлетворяющих условиям типа инъективности или сюръективности. Пусть $F\supseteq W$ и $G\supseteq A$ — группы и

$$\mathrm{Hom}(F,W;G,A)=\{\varphi\colon F\to G \mid \varphi(W)\subseteq A\},\quad \mathrm{Epi}(F,W;G,A)=\{\varphi\colon F\to G \mid \varphi(W)=A\},$$
$$\mathrm{Mono}(F,W;G,A)=\{\varphi\colon F\to G \mid \varphi(W)\subseteq A \text{ и ограничение } \varphi \text{ на } W \text{ инъективно}\}.$$

Теорема об эпи- моно- и гомоморфизмах [KM17]. *Пусть W — подгруппа конечно порождённой группы F, коммутант F' которой имеет бесконечный индекс, а A — подгруппа группы G. Тогда*

а) *и $|\mathrm{Hom}(F,W;G,A)|$, и $|\mathrm{Epi}(F,W;G,A)|$, и $|\mathrm{Mono}(F,W;G,A)|$ делятся на порядок нормализатора $N(A)$ подгруппы A, если индекс $|F:F'W|$ бесконечен;*

б) *$|\mathrm{Hom}(F,W;G,A)|$ делится на $|A|$;*

в) *$|\mathrm{Epi}(F,W;G,A)|$ делится на $|A'|$.*

Целью настоящей работы является добавление «фробениусовости» в эту теорему, то есть избавление от условий $|F:F'|=\infty$ и $|F:F'W|=\infty$. Ответ оказался ожидаемым для утверждений а) и б), гораздо менее очевидным в случае в), кроме того возникает новое утверждение г).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00591.

«Фробениусова» теорема об эпи- моно- и гомоморфизмах. *Пусть A — подгруппа группы G, а W — подгруппа конечно порождённой группы F. Тогда*

а) *и* $|\mathrm{Hom}(F,W;G,A)|$, *и* $|\mathrm{Epi}(F,W;G,A)|$, *и* $|\mathrm{Mono}(F,W;G,A)|$ *делятся на* $\text{НОД}\Big(N(A),\exp\big(F/(F'W)\big)\Big)$;

б) $|\mathrm{Hom}(F,W;G,A)|$ *делится на* $\text{НОД}\big(A,\exp(F/F')\big)$;

в) $|\mathrm{Epi}(F,W;G,A)|$ *делится на* $\text{НОД}\big(A'A^{\exp(F/F')},\exp(F/F')\big)$;

г) $|\mathrm{Mono}(F,W;G,A)|$ *делится на* $\text{НОД}\Big(A,\exp\Big(F/\big(F'Z(W)\big)\Big)\Big)$.

Это сильно упрощённая формулировка теоремы 1, точнее её следствия, смотрите параграф 3. Всё, что здесь утверждается по поводу числа $|\mathrm{Hom}(F,W;G,A)|$, не является новым — эти факты, установленные в [BKV19] (на немного другом языке), мы включили просто для полноты картины.

Отметим, что в этой теореме не предполагается, что группа G конечна. Мы придерживаемся обозначений из [BKV19]: *наибольшим общим делителем* $\text{НОД}(G,n)$ группы G и целого числа n мы называем наименьшее общее кратное порядков подгрупп группы G, делящих n; делимость всегда понимается в смысле кардинальной арифметики: каждый бесконечный кардинал делится на все меньшие ненулевые кардиналы (и, разумеется, ноль делится на все кардиналы, а на ноль делится только ноль). Это означает, что $\text{НОД}(G,0)=|G|$ для любой группы G; а, например, $\text{НОД}(\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}),2020)=2$. Впрочем, читатель не очень много потеряет, если будет считать все группы в этой статье конечными, а в этом случае $\text{НОД}(G,n)=\text{НОД}(|G|,n)$ по теореме Силова (и поскольку конечная p-группа содержит подгруппы всех возможных порядков).

Пункт б) этой теоремы, разумеется, содержит классические теоремы

- Фробениуса (достаточно взять циклическую группу в качестве $F=W$ и положить $A=G$),
- Соломона, и даже Гордона–Родригеса-Виллегаса (достаточно взять в качестве $F=W$ конечно порождённую группу, коммутант которой имеет бесконечный индекс и положить $A=G$),
- и Ивасаки (достаточно положить $F=\mathbb{Z}\supseteq n\mathbb{Z}=W$).

А если, например, взять в пункте в) теоремы свободное произведение циклических групп в качестве $F=W$ и положить $A=G$, то мы получим следующий факт.

Следствие о системах порождающих. *Для любой группы G и любых $k_i\in\mathbb{Z}$ число наборов $(g_1,\dots,g_n)$ элементов группы G таких, что $\langle g_1,\dots,g_n\rangle=G$ и $g_i^{k_i}=1$, делится на* $\text{НОД}\left(G'\cdot G^{\text{НОК}(k_1,\dots,k_n)},\text{НОК}(k_1,\dots,k_n)\right)$. (Здесь и далее $G^m\overset{\text{опр}}{=}\langle\{g^m\mid g\in G\}\rangle$.)

Читатель может догадаться, что ключом к нашему обобщению теоремы об эпи- моно- и гомоморфизмах является использование вместо теоремы KM её «фробениусова аналога», то есть теоремы BKV. Это верно, но на самом деле, мы обобщаем и саму теорему BKV, смотрите основную теорему в следующем параграфе и её доказательство в параграфе 2.

Обозначения и соглашения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k\in\mathbb{Z}$, а x и y — элементы некоторой группы, то x^y, x^{ky} и x^{-y} обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$ и $y^{-1}x^{-1}y$, соответственно. Коммутант группы G мы обозначаем символом G' или $[G,G]$, а центр группы G мы обозначаем символом $Z(G)$. Подгруппу группы G, порождённую n-ми степенями всех элементов мы обозначаем символом G^n. Мощность множества X мы обозначаем $|X|$. Если X — подмножество некоторой группы, то $\langle X\rangle$, $C(X)$ и $N(X)$ означают, соответственно, подгруппу, порождённую множеством X, централизатор множества X и нормализатор множества X. Индекс подгруппы H группы G обозначается $|G:H|$. Буква $\mathbb{Z}$ обозначает множество целых чисел. НОД и НОК — это наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Символом $\exp(G)$ мы обозначаем период (экспоненту) группы G, если этот период конечен; и считаем $\exp(G)=0$, если период бесконечен. Кроме того, отметим ещё раз, что конечность групп нигде не предполагается по умолчанию, делимость всегда понимается в смысле кардинальной арифметики (бесконечный кардинал делится на все ненулевые кардиналы, не превосходящие его), а $\text{НОД}(G,n)\overset{\text{опр}}{=}\text{НОК}\left(\{|H|\ \big|\ H \text{ — подгруппа в } G \text{ и } |H| \text{ делит } n\}\right)$.

1. Основная теорема

Группу F с фиксированным эпиморфизмом $F\to\mathbb{Z}_n\overset{\text{опр}}{=}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (где $n\in\mathbb{Z}$) мы называем *n-индексированной* группой [BKV19]. Этот эпиморфизм $F\to\mathbb{Z}_n$ мы называем *степенью* и обозначаем deg. Таким образом, для любого элемента f индексированной группы F определён элемент $\deg f\in\mathbb{Z}_n$, причём группа F содержит элементы всех степеней и $\deg(fg)=\deg f+\deg g$ для любых $f,g\in F$.

Пусть имеется гомоморфизм $\varphi\colon F\to G$ из n-индексированной группы F в какую-то группу G и подгруппа H группы G. Подгруппу $H_\varphi=\bigcap\limits_{f\in F}H^{\varphi(f)}\cap C\big(\varphi(\ker\deg)\big)$ называют *φ-сердцевиной* подгруппы H [KM17]. Другими словами, φ-сердцевина H_φ подгруппы H состоит из таких её элементов h, что $h^{\varphi(f)}\in H$ для всех f, причём $h^{\varphi(f)}=h$, если $\deg f=0$.

Теорема BKV [BKV19]. *Пусть целое число n делится на порядок подгруппы H некоторой группы G, и некоторое множество Φ гомоморфизмов из n-индексированной группы F в G удовлетворяет следующим условиям.*

I. *Φ инвариантно относительно сопряжения элементами из H: если $h \in H$ и $\varphi \in \Phi$, то гомоморфизм $\psi\colon f \mapsto \varphi(f)^h$ тоже лежит в Φ.*

II. *Для любого $\varphi \in \Phi$ и любого элемента h из φ-сердцевины H_φ подгруппы H гомоморфизм ψ, определённый правилом*

$$\psi(f) = \begin{cases} \varphi(f) & \text{для всех элементов } f \in F \text{ степени ноль;} \\ \varphi(f)h & \text{для некоторого элемента } f \in F \text{ степени один (а, значит, и для всех элементов степени один),} \end{cases}$$

также содержится в Φ.

Тогда $|\Phi|$ делится на $|H|$.

Отметим, что

- отображение ψ из условия I является гомоморфизмом при любом $h \in G$; а формула для ψ из условия II определяет гомоморфизм при любых $h \in H_\varphi$ (как объясняется в [BKV19]); смысл условий I и II состоит в том, что эти гомоморфизмы лежат в Φ;
- согласно (очень простой) лемме 3 из [BKV19] *в условии* II *теоремы BKV $\psi(f) \in \varphi(f)H_\varphi$ для всех $f \in F$;*
- условие «n делится на порядок подгруппы H» можно опустить, но тогда в заключении теоремы следует написать: «$|\Phi|$ делится на НОД(H,n)» (вместо «$|\Phi|$ делится на $|H|$»); это вытекает сразу из определения наибольшего общего делителя группы и числа (смотрите введение) и из того, что если условия I и II выполнены для H, то они выполнены и для любой подгруппы группы H;
- теорема KM (о которой мы говорили во введении) — это в точности теорема BKV при $n = 0$.

Основная теорема. *Пусть F — n-индексированная группа, H — подгруппа группы G, k — натуральное число, и Φ — некоторое множество гомоморфизмов из F в G, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) *для всех $\varphi \in \Phi$ и $h \in H$ гомоморфизм $\psi\colon f \mapsto \varphi(f)^h$ лежит в Φ;*

(ii) *для каждого $\varphi \in \Phi$, φ-сердцевина H_φ подгруппы H содержит подгруппу $H_{\varphi,k}$ такую, что*
  - *$H_\varphi \supseteq H_{\varphi,k} \triangleleft \langle H_\varphi \cup \varphi(F)\rangle$;*
  - *$|H_\varphi / H_{\varphi,k}|$ делит k;*
  - *если $\varphi \in \Phi$ и $\psi\colon F \to G$ — некоторый гомоморфизм, совпадающий с φ на элементах степени ноль и такой, что $\psi(w) \in \varphi(w)H_{\varphi,k}$ для всех элементов $w \in F$, степени которых делятся на k (то есть $\deg w \in k\mathbb{Z}_n$), то $\psi \in \Phi$.*

Тогда $|\Phi|$ делится на НОД(H, n).

Этот факт обобщает теорему BKV и по сути (то есть с учётом замечаний после теоремы BKV) превращается в неё, если положить $k = 1$ и $H_{\varphi,k} = H_\varphi$.

2. Доказательство основной теоремы

Можно предполагать, что $|H|$ делит n (по определению наибольшего общего делителя группы и числа и поскольку условия (i) и (ii) сохраняются при замене H на её подгруппу). Далее достаточно показать, что условия I и II теоремы BKV выполнены для этих F, G, H и Φ. Условие I очевидно выполнено в силу условия (i).

Проверим условие II. Пусть $\varphi \in \Phi$, элемент $f_1 \in F$ имеет степень один, $\varphi(f_1) = g$ и $h \in H_\varphi$. Надо показать, что гомоморфизм $\psi\colon F \to G$, совпадающий с φ на элементах степени ноль и переводящий f_1 в gh, лежит в Φ. Каждый элемент $w \in F$, степень которого делится на k, можно записать в виде $w = f_0 f_1^{ki}$ для некоторых $i \in \mathbb{Z}$ и $f_0 \in \ker\deg$. Тогда

$$\psi(w) = \psi(f_0 f_1^{ki}) = \psi(f_0)(gh)^{ki} = \varphi(f_0)(gh)^{ki} \quad \text{(поскольку } \varphi \text{ и } \psi \text{ совпадают на } \ker\deg).$$

Подгруппа H_φ нормальна в $\langle H_\varphi, g\rangle$ по определению φ-сердцевины H_φ.

Лемма Брауэра [Bra69] (смотрите также [BKV19]). *Если U — конечная нормальная подгруппа группы V, то для всех $v \in V$ и $u \in U$ элементы $v^{|U|}$ и $(vu)^{|U|}$ сопряжены при помощи элемента из U.*

Применив лемму Брауэра к нормальной подгруппе $H_\varphi / H_{\varphi,k}$ группы $\langle g, H_\varphi\rangle / H_{\varphi,k}$, мы получим включение $(gh)^{ki} \in g^{kih'} H_{\varphi,k}$ для некоторого $h' \in H_\varphi$, который не зависит ни от i, ни от w, а определяется только гомоморфизмами φ и ψ. Поэтому

$$\psi(w) = \varphi(f_0)(gh)^{ki} \in \varphi(f_0) g^{kih'} H_{\varphi,k} \overset{(1)}{=} \left(\varphi(f_0) g^{ki}\right)^{h'} H_{\varphi,k} \overset{(2)}{=} \left(\varphi(f_0 f_1^{ki})\right)^{h'} H_{\varphi,k} \overset{(3)}{=} \left(\varphi(w)\right)^{h'} H_{\varphi,k}, \text{ где}$$

- равенство $\overset{(1)}{=}$ вытекает из того, что элемент $h' \in H_\varphi$ коммутирует с образом $\varphi(f_0)$ элемента f_0 степени ноль по определению φ-сердцевины H_φ;

- равенство $\overset{(2)}{=}$ вытекает из определения элемента g;
- равенство $\overset{(3)}{=}$ вытекает из определения элемента w.

Гомоморфизм $f \mapsto \big(\varphi(f)\big)^{h'}$ лежит в Φ по условию (i), и, следовательно, $\psi \in \Phi$ по условию (ii). Это завершает доказательство.

3. На что же делится число эпи- моно- и гомоморфизмов?

Пусть Φ — некоторое множество гомоморфизмов из n-индексированной группы F в группу G, а B и H — подгруппы в G. Подгруппу H назовём (B,k,Φ)-*гладкой*, если при всех $\varphi \in \Phi$ группа $H_\varphi \cap B$ содержит нормальную в $\langle H_\varphi, \varphi(F)\rangle$ подгруппу $\widehat{B}$ (зависящую от φ) такую, что $|H_\varphi/\widehat{B}|$ делит k.

Следующая лемма содержит вполне очевидные примеры гладких подгрупп.

Лемма о гладких подгруппах. *Следующие подгруппы группы G являются (B,k,Φ)-гладкими:*
1) *любая подгруппа, содержащаяся в B;*
2) *любая подгруппа, порядок которой делит k;*
3) *любая подгруппа H такая, что $|H : H\cap B|$ делит k, если $B \triangleleft G$.*

Доказательство. Достаточно взять в качестве $\widehat{B}$ следующие подгруппы: 1) H_φ; 2) $\{1\}$; 3) $H \cap B$.

Теорема 1. *Пусть A — подгруппа группы G, а W — подгруппа n-индексированной группы F, причём $\deg(W) = k\mathbb{Z}_n$. Пусть*

$$\mathrm{Hom}(F,W;G,A) = \{\varphi\colon F \to G \mid \varphi(W) \subseteq A\}, \quad \mathrm{Epi}(F,W;G,A) = \{\varphi\colon F\to G \mid \varphi(W) = A\},$$
$$\mathrm{Mono}(F,W;G,A) = \{\varphi\colon F\to G \mid \varphi(W)\subseteq A \text{ и ограничение } \varphi \text{ на } W \text{ инъективно}\}.$$

Тогда НОД(H,n) *делит*

а) $|\mathrm{Hom}(F,W;G,A)|$ *для любой* $\big(A,k,\mathrm{Hom}(F,W;G,A)\big)$*-гладкой подгруппы* $H \subseteq N(A)$ *группы* G;

б) $|\mathrm{Epi}(F,W;G,A)|$ *для любой* $\big(A'A^n,k,\mathrm{Epi}(F,W;G,A)\big)$*-гладкой подгруппы* $H \subseteq N(A)$ *группы* G, *где* $A^n \overset{\text{опр}}{=} \langle\{a^n \mid a\in A\}\rangle$;

в) $|\mathrm{Mono}(F,W;G,A)|$ *для любой* $\big(A,k,\mathrm{Mono}(F,W;G,A)\big)$*-гладкой подгруппы* $H\subseteq N(A)$ *группы* G, *если индексация группы* F *выбрана так, что* $\deg(w)=0$ *для каждого центрального (в* W*) элемента* $w\in W$ *такого, что* $w^n = 1$.

(Заметим в скобках, что подгруппа $A'A^n$, о которой идёт речь в пункте б), и подгруппа $\{w\in Z(W)\mid w^n=1\}$, о которой говорится в пункте в), суть ни что иное, как вербальная подгруппа группы A и маргинальная подгруппа группы W, соответствующие многообразию абелевых групп экспоненты n.)

Доказательство. Достаточно проверить, что условия (i) и (ii) основной теоремы выполнены для данных F, G, H, k, Φ и $H_{\varphi,k} = \widehat{B}$ (где $\widehat{B}$ из определения гладкой подгруппы B, в качестве которой мы берём A в пунктах а) и в) и $A'A^n$ в пункте б)). Первые два пункта условия (ii) заведомо выполнены по определению гладкости, нуждается в проверке только последний пункт условия (ii).

а) $B = A$ и $\Phi = \mathrm{Hom}(F,W;G,A)$. Условие (i) очевидно выполнено, поскольку $H\subseteq N(A)$. Условие (ii) тоже выполнено, поскольку для всех $w\in W$ мы имеем $\psi(w)\in\varphi(w)\widehat{B}\subseteq\varphi(w)A = A$, то есть $\psi\in\Phi$, что и требовалось.

б) $B = A'A^n$ и $\Phi = \mathrm{Epi}(F,W;G,A)$. Условие (i) очевидно выполнено по той же причине: $H\subseteq N(A)$. Условие (ii) тоже выполнено: $A \overset{(1)}{=} \varphi(W) \overset{(2)}{\subseteq} \psi(W)A'A^n \overset{(3)}{=} \psi(W)\varphi(W'W^n) \overset{(4)}{=} \psi(W)\psi(W'W^n) = \psi(W)$, где

$\overset{(1)}{=}$ выполнено по определению $\Phi \ni \varphi$;

$\overset{(2)}{\subseteq}$ выполнено по определению ψ из условия (ii) при $B = A'A^n \supseteq \widehat{B} = H_{\varphi,k}$;

$\overset{(3)}{=}$ следует из $\overset{(1)}{=}$;

$\overset{(4)}{=}$ следует из того, что $\deg(W'W^n)=\{0\}$, а ψ и φ из условия (ii) совпадают на элементах степени нуль.

В итоге мы получили, что $A = \psi(W)$, то есть $\psi\in\Phi$, что и требовалось.

в) $B = A$ и $\Phi = \mathrm{Mono}(F,W;G,A)$. Условие (i) очевидно выполнено по той же причине: $H\subseteq N(A)$. Покажем, что (ii) тоже выполнено. Во-первых, $\psi(W)\subseteq\varphi(W)A = A$. Осталось показать, что $\ker\psi\cap W = \{1\}$. Пусть $w\in\ker\psi\cap W$. Тогда
- для каждого $w'\in W$ мы имеем $1 = \psi([w,w']) = \varphi([w,w'])$ (так как коммутаторы имеют степень нуль, а на элементах степени нуль φ и ψ совпадают), следовательно, $[w,w'] = 1$ (так как гомоморфизм φ инъективен на W), то есть $w\in Z(W)$;
- аналогично получаем $1 = \psi(w^n) = \varphi(w^n)$ (так как $\deg(w^n) = n\deg(w) = 0$, а на элементах степени нуль φ и ψ совпадают), следовательно, $w^n = 1$ (так как гомоморфизм φ инъективен на W).

Мы получили, что w — центральный элемент группы W и $w^n = 1$, а такие элементы имеют степень нуль по условию. Значит, $\varphi(w) = \psi(w) = 1$, то есть $w = 1$ в силу того, что $\varphi\in\mathrm{Mono}(F,W:G,A)$. Стало быть, $\ker\psi\cap W = \{1\}$, что и требовалось.

Следствие. *В условиях теоремы 1 и* $|\mathrm{Hom}(F,W;G,A)|$, *и* $|\mathrm{Epi}(F,W;G,A)|$, *и* $|\mathrm{Mono}(F,W;G,A)|$ *делятся на* НОД$\big(k,\ N(A)\big)$. *Кроме того,*

а) $|\mathrm{Hom}(F,W;G,A)|$ *делится*
  - *на* НОД$\big(n,\ A\big)$,
  - *а также на* НОД$\Big(n,\ |A|\cdot$НОД$\big(k,\ |G/A|\big)\Big)=$ НОД$(n,\ |G|,\ k\cdot|A|)$, *если* $A\triangleleft G$ *и* G *конечна;*

б) $|\mathrm{Epi}(F,W;G,A)|$ *делится*
  - *на* НОД$\big(n,\ A'A^n\big)$ *и даже на* НОД$\big(n,\ H\big)$, *где* H *— любая подгруппа в* $N(A)$ *такая, что* $|(C(A'A^n)\cap H:Z(A'A^n)\cap H|$ *делит* k,
  - *а также на* НОД$\Big(n,\ |A'A^n|\cdot$НОД$\big(k,\ |G/(A'A^n)|\big)\Big)=$ НОД$(n,\ |G|,\ k\cdot|A'A^n|)$, *если* $A\triangleleft G$ *и* G *конечна;*

в) *если* $\deg\big(\{w\in Z(W)\mid w^n=1\}\big)=\{0\}$, *то* $|\mathrm{Mono}(F,W;G,A)|$ *делится*
  - *на* НОД$\big(n,\ A\big)$,
  - *а также на* НОД$\Big(n,|A|\cdot$НОД$\big(k,|G/A|\big)\Big)=$ НОД$(n,|G|,k\cdot|A|)$, *если* $A\triangleleft G$ *и* G *конечна.*

Доказательство. Первое утверждение (о делимости на НОД$(k,\ N(A))$) вытекает немедленно из теоремы 1 и утверждения 2) леммы о гладких подгруппах.

Остальные утверждения этого следствия также вытекают из теоремы 1 и подходящего утверждения о гладких подгруппах.

а) Делимость на НОД$(n,\ A)$ сразу вытекает из утверждения 1) леммы о гладких подгруппах. Делимость на НОД$(n,\ |G|,\ k\cdot|A|)$ следует из утверждения 3) леммы о гладких подгруппах. Действительно, достаточно в теореме 1 взять в качестве H p-подгруппу группы G, порядок которой есть максимальная степень p^i числа p, делящая НОД$(n,k|A|,|G|)$, причём выбрать H
  - внутри A, если p^i делит $|A|$;
  - содержащей силовскую p-подгруппу группы A в противном случае.

  Эта подгруппа будет $\big(A,k,\mathrm{Hom}(F,W;G,A)\big)$-гладкой по лемме о гладких подгруппах. Значит, $|H|$ делит $\mathrm{Hom}(F,W;G,A)$ в силу теоремы 1. Проделав это для всех простых p, мы получим нужную делимость.

б) Второе утверждение пункта б) доказывается точно также, как второе утверждение пункта а). Чтобы доказать первое утверждение пункта б), по теореме 1 достаточно убедиться, что подгруппа H является $\big(A'A^n,k,\mathrm{Epi}(F,W;G,A)\big)$-гладкой, то есть при всех $\varphi\in\mathrm{Epi}(F,W;G,A)$ группа $H_\varphi\cap(A'A^n)$ содержит нормальную в $\langle H_\varphi,\varphi(F)\rangle$ подгруппу $\widehat{B}$ такую, что $|H_\varphi/\widehat{B}|$ делит k. В качестве такой подгруппы $\widehat{B}$ достаточно взять $Z(A'A^n)\cap H_\varphi$. Действительно,

$$H_\varphi\overset{(1)}{\subseteq}C\big(\varphi(\ker\deg)\big)\overset{(2)}{\subseteq}C\big(\varphi(W'W^n)\big)\overset{(3)}{=}C\big(A'A^n\big),\quad\text{где}$$

  $\overset{(1)}{\subseteq}$ вытекает из определения φ-сердцевины H_φ, $\overset{(2)}{\subseteq}$ вытекает из того, что $\deg(W'W^n)=\{0\}$, а $\overset{(3)}{=}$ вытекает из равенства $\varphi(W)=A$.

  Значит, по теореме Лагранжа $\big|H_\varphi/\big(Z(A'A^n)\cap H_\varphi\big)\big|$ делит $\big|\big(C(A'A^n)\cap H\big)/\big(Z(A'A^n)\cap H\big)\big|$, что делит k по условию.

в) Здесь всё полностью аналогично пункту а).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Стру95] С. П. Струнков, К теории уравнений на конечных группах, Изв. РАН., Сер. матем., 59:6 (1995), 171-180.

[AmV11] A. Amit, U. Vishne, Characters and solutions to equations in finite groups, J. Algebra Appl., 10:4 (2011), 675-686.

[And16] R. Andreev, A translation of “Verallgemeinerung des Sylow’schen Satzes” by F. G. Frobenius. arXiv:1608.08813.

[ACNT13] T. Asai, N. Chigira, T. Niwasaki, Yu. Takegahara, On a theorem of P. Hall, Journal of Group Theory, 16:1 (2013), 69-80.

[AsTa01] T. Asai, Yu. Takegahara, $|\mathrm{Hom}(A,G)|$, IV, J. Algebra, 246 (2001), 543-563.

[Bra69] R. Brauer, On A Theorem of Frobenius, The American Mathematical Monthly, 76:1 (1969), 12-15.

[BrTh88] K. Brown, J. Thévenaz, A generalization of Sylow’s third theorem, J. Algebra, 115 (1988), 414-430.

[BKV19] E. K. Brusyanskaya, A. A. Klyachko, A.V. Vasil’ev, What do Frobenius’s, Solomon’s, and Iwasaki’s theorems on divisibility in groups have in common?, Pacific Journal of Mathematics, 302:2 (2019), 437-452. См. также arXiv:1806.08870.

[Frob95] F. G. Frobenius, Verallgemeinerung des Sylow’schen Satzes, Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akad. der Wissenschaften (Berlin) (1895), 981-993.

[Frob03] F. G. Frobenius, Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie, Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akad. der Wissenschaften (Berlin) (1903), 987-991.

[GRV12] C. Gordon, F. Rodriguez-Villegas, On the divisibility of $\#\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ by $|G|$, J. Algebra, 350:1 (2012), 300-307. См. также arXiv::1105.6066.

[Hall36] Ph. Hall, On a theorem of Frobenius, Proc. London Math. Soc. 40 (1936), 468-501.

[Isaa70] I. M. Isaacs, Systems of equations and generalized characters in groups, Canad. J. Math., 22 (1970), 1040-1046.

[Iwa82] S. Iwasaki, A note on the nth roots ratio of a subgroup of a finite group, J. Algebra, 78:2 (1982), 460-474.

[KM14] A. A. Klyachko, A. A. Mkrtchyan, How many tuples of group elements have a given property? With an appendix by Dmitrii V. Trushin, Intern. J. of Algebra and Comp. 24:4 (2014), 413-428.
См. также arXiv:1205.2824.

[KM17] A. A. Klyachko, A. A. Mkrtchyan, Strange divisibility in groups and rings, Arch. Math. 108:5 (2017), 441-451. См. также arXiv:1506.08967.

[KR20] A. A. Klyachko, M. A. Ryabtseva, The dimension of solution sets to systems of equations in algebraic groups, Israel Journal of Mathematics, 237:1 (2020), 141-154. См. также arXiv:1903.05236.

[Kula38] A. Kulakoff, Einige Bemerkungen zur Arbeit: “On a theorem of Frobenius” von P. Hall, Матем. сб., 3(45):2 (1938), 403-405.

[SaAs07] J. Sato, T. Asai, On the n-th roots of a double coset of a finite group, J. School Sci. Eng., Kinki Univ., 43 (2007), 1-4.

[Sehg62] S. K. Sehgal, On P. Hall's generalisation of a theorem of Frobenius, Proc. Glasgow Math. Assoc., 5 (1962), 97-100.

[Solo69] L. Solomon, The solution of equations in groups, Arch. Math., 20:3 (1969), 241-247.

[Yosh93] T. Yoshida, $|\mathrm{Hom}(A, G)|$, Journal of Algebra, 156:1 (1993), 125-156.