УДК 512.543.7

КАК ОБОБЩИТЬ ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ УРАВНЕНИЯХ НАД ГРУППАМИ

Антон А. Клячко
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
Москва 119992, Ленинские горы, МГУ
klyachko@daniil.math.msu.su

Известные факты о разрешимости уравнений над группами рассматриваются с более общей точки зрения. Доказывается обобщённый аналог теоремы о разрешимости унимодулярных уравнений над группами без кручения, который в качестве частного случая включает в себя многомерный вариант этой теоремы. Доказывается, что для унимодулярных уравнений над группами без кручения выполняется аналог теоремы Магнуса о свободе в том смысле, что существует решение, которое хорошо себя ведёт по отношению к свободным сомножителям исходной группы.
Ключевые слова: уравнения над группами, гипотеза Кервера–Лауденбаха, теорема Магнуса о свободе.

1. Введение

Напомним, что *уравнением над группой* G *с неизвестным* (или *переменной*) t называют формальное выражение вида

$$g_1t^{\varepsilon_1}g_2t^{\varepsilon_2}\dots g_nt^{\varepsilon_n}=1, \tag{$*$}$$

где $g_i\in G$, $\varepsilon_i\in\mathbb{Z}$. Уравнение $(*)$ называют *разрешимым над* группой G, если найдётся бóльшая группа $\widetilde G$, содержащая группу G в качестве подгруппы, и элемент $\widetilde t\in\widetilde G$ (называемый решением уравнения $(*)$) такой, что
$g_1\widetilde t^{\varepsilon_1}g_2\widetilde t^{\varepsilon_2}\dots g_n\widetilde t^{\varepsilon_n}=1$ в группе $\widetilde G$.

Имеется множество теорем (см., например, [1]–[14], [18]), которые говорят, что уравнение $(*)$ разрешимо при тех или иных условиях на группу G и на левую часть уравнения.

В настоящей статье предлагается рассмотреть некоторое обобщение понятия уравнения.

Обобщённым уравнением над группой G *с переменной группой* T мы назовём формальное выражение вида

$$g_1t_1g_2t_2\dots g_nt_n=1, \tag{$*'$}$$

где $g_i\in G$, $t_i\in T$. Обобщённое уравнение $(*')$ называют *разрешимым над* группой G, если найдётся бóльшая группа $\widetilde G$, содержащая группу G в качестве подгруппы, и гомоморфизм $T\to\widetilde G$, $t\mapsto\widetilde t$ (называемый решением обобщённого уравнения $(*')$) такой, что $g_1\widetilde t_1g_2\widetilde t_2\dots g_n\widetilde t_n=1$ в группе $\widetilde G$.

Ясно, что в случае, когда переменная группа является бесконечной циклической, определение разрешимости обобщённого уравнения превращается в определение разрешимости обычного уравнения. Предлагается доказывать обобщённые аналоги известных теорем о разрешимости уравнений. Такие обобщённые теоремы могут включать в себя помимо условий на группу G и на левую часть уравнения некоторые условия, говорящие о том, что переменная группа в некотором смысле похожа на бесконечную циклическую.

Приведём несколько примеров. Мы называем уравнение

$$w(G,t)\equiv\prod g_it^{\varepsilon_i}=1,\quad \text{где}\ \ g_i\in G,\ \varepsilon_i\in\mathbb{Z}, \tag{1}$$

или обобщённое уравнение

$$w(G,T)\equiv\prod g_it_i=1,\quad \text{где}\ \ g_i\in G,\ t_i\in T, \tag{1$'$}$$

нетривиальным, если его левая часть не сопряжена с константой (то есть с элементом исходной группы G) в свободном произведении $G*\langle t\rangle_\infty$ (соответственно, в $G*T$).

Гипотеза Левина [13]. *Над группой без кручения разрешимо любое нетривиальное уравнение.*

Эта гипотеза остаётся недоказанной, однако известно, что она эквивалентна своему обобщённому аналогу.

Обобщённая гипотеза Левина. *Над группой без кручения разрешимо любое нетривиальное обобщённое уравнение с переменной группой без кручения.*

Действительно, рассмотрим группу без кручения G_1, содержащую группы G и T в качестве подгрупп (например, $G_1=G\times T$ или $G_1=G*T$). По нетривиальному обобщённому уравнению $(1')$ над группой G построим нетривиальное обычное уравнение

$$v(G_1,t)\equiv w(G_1,t^{-1}Tt)=1$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №05-01-00895.

над группой G_1. Если (обычная) гипотеза Левина верна, то это уравнение имеет решение $\widetilde{t} \in \widetilde{G_1} \supseteq G_1$. Но тогда группа $\widetilde{T} = \widetilde{t}^{-1}T\widetilde{t} \subseteq \widetilde{G_1}$ будет решением обобщённого уравнения $(1')$ над группой G, что доказывает обобщённую гипотезу Левина в предположении справедливости обычной гипотезы Левина.

Отметим, что условие похожести переменной группы на бесконечную циклическую состоит, в случае обобщённой гипотезы Левина, в отсутствии кручения.

Самым известным результатом в направлении доказательства гипотезы Левина является следующая теорема Бродского–Хауи ([1], [10]). Напомним, что группа называется *локально индикабельной*, если каждая её нетривиальная конечно порождённая подгруппа обладает эпиморфизмом на бесконечную циклическую.

Теорема Б. *Над локально индикабельной группой разрешимо любое нетривиальное уравнение.*

Обобщённым аналогом этого факта служит следующая теорема (которая на самом деле и была доказана Бродским в [1]).

Теорема Б$'$. *Над локально индикабельной группой разрешимо любое нетривиальное обобщённое уравнение с локально индикабельной переменной группой.*

Эквивалентность этих двух теорем легко доказывается дословным повторением приведённого выше рассуждения по поводу гипотезы Левина; надо лишь заменить слова «без кручения» на слова «локально индикабельная».

Отметим, что в случае теоремы Бродского условием похожести переменной группы на бесконечную циклическую служит локальная индикабельность.

Можно привести ещё много примеров столь же тривиального обобщения различных утверждений. Не так просто дело обстоит с другой известной гипотезой. Напомним, что уравнение (1) называется *невырожденным*, если сумма показателей при t в $w(G,t)$ отлична от нуля; если $\sum \varepsilon_i = \pm 1$, то уравнение называется *унимодулярным.*

Гипотеза Кервера–Лауденбаха (см. [3])**.** *Унимодулярное уравнение над любой группой разрешимо над ней.*

Иногда (см., например, [5], [10]) гипотезой Кервера–Лауденбаха называют утверждение о разрешимости любого *невырожденного* уравнения (или даже системы уравнений) над любой группой. На сегодняшний день ни одна из версий этой гипотезы не доказана и не опровергнута.

Пытаясь сформулировать обобщённый аналог гипотезы Кервера–Лауденбаха или каких-либо известных фактов в этом направлении, мы сталкиваемся с проблемой: *что делать с условием унимодулярности (невырожденности)?*

В этой статье мы доказываем обобщённый аналог следующей теоремы.

Теорема 1 ([12], см. также [8])**.** *Унимодулярное уравнение над группой без кручения разрешимо над ней.*

Обобщённый аналог, который мы собираемся доказывать, выглядит так.

Теорема 1$'$. *Унимодулярное обобщённое уравнение над группой без кручения разрешимо над ней.*

Здесь унимодулярность обобщённого уравнения понимается в смысле следующего определения, которое, хотя и выглядит не самым естественным образом, однако работает и, разумеется, превращается в точности в обычную унимодулярность, если переменная группа является бесконечной циклической.

Определение 1. Обобщённое уравнение $(1')$ называется *унимодулярным*, если
1) $\prod t_i$ является элементом бесконечного порядка в группе T;
2) циклическая подгруппа $\langle \prod t_i \rangle$ нормальна в T;
3) факторгруппа $T / \langle \prod t_i \rangle$ является группой с сильно однозначным умножением.

Напомним, что группа H называется *группой с однозначным умножением* (или *UP-группой*), если для любых двух её конечных непустых подмножеств $X, Y \subseteq H$ их произведение XY содержит по крайней мере один элемент, раскладывающийся в произведение элемента из X и элемента из Y однозначно. Известно, что в групповом кольце группы с однозначным умножением отсутствуют делители нуля. Одно время была гипотеза, что всякая группа без кручения является группой с однозначным умножением (обратное, очевидно, верно). Если бы эта гипотеза подтвердилась, то проблема Капланского о делителях нуля в групповых кольцах была бы решена. Однако выяснилось, что существует контрпример ([17], [16]).

Мы называем группу H *группой с сильно однозначным умножением*, если для любых двух её конечных непустых подмножеств $X, Y \subseteq H$ таких, что $|Y| \geqslant 2$, их произведение XY содержит по крайней мере два однозначно разложимых элемента x_1y_1 и x_2y_2 таких, что $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ и $y_1 \neq y_2$.

Отметим, что смысл этого определения состоит в условии $y_1 \neq y_2$, поскольку согласно теореме Стройновского [19] произведение любых двух конечных непустых и неодноэлементных подмножеств в UP-группе всегда содержит по меньшей мере два однозначно разложимых элемента.

Насколько мы знаем, все известные примеры UP-групп обладают сильно однозначным умножением. Например, этим свойством обладают все правоупорядочиваемые группы, локально индикабельные группы, диффузные группы в смысле Бовдича.

Кроме того заметим, что сильная однозначность умножения вытекает из следующего свойства UP_4: произведение любых четырёх непустых конечных подмножеств $A, B, C, D \subseteq H$ содержит по меньшей мере один элемент, раскладывающийся однозначно в произведение $abcd$, где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ и $d \in D$. Действительно, если все однозначно разложимые элементы xy множества XY имеют общий сомножитель y, то произведение четырёх множеств $XYY^{-1}X^{-1}$ не содержит однозначно разложимых элементов: из однозначной разложимости элемента $u = x_1y_1y_2^{-1}x_2^{-1}$ вытекает, что $y_1 = y$ (иначе x_1y_1 будет иметь другое разложение $x_1y_1 = x_1'y_1'$, а значит и u будет иметь другое разложение $u = x_1'y_1'y_2^{-1}x_2^{-1}$); по аналогичным причинам y_2 обязан быть равным элементу y; но тогда u имеет два разложения $u = x_1yy^{-1}x_2^{-1} = x_1y'(y')^{-1}x_2^{-1}$, где $y' \in Y$ – любой элемент отличный от y.

Из теоремы $1'$ вытекает следующий факт об обычных уравнениях с несколькими переменными, который можно рассматривать как многомерный аналог теоремы 1.

Следствие. *Уравнение*

$$g_1x_{j_1}^{\varepsilon_1}g_2x_{j_2}^{\varepsilon_2}\dots g_nx_{j_n}^{\varepsilon_n} = 1 \qquad (**)$$

над группой без кручения G с неизвестными $x_1, x_2, \dots$ разрешимо над G, если $\prod x_{j_i}^{\varepsilon_i}$ не является истинной степенью в свободной группе $F(x_1, x_2, \dots)$.

Доказательство. Рассмотрим в качестве группы T группу

$$T = \left\langle x_1, x_2, \dots \mid [x_1, \prod x_{j_i}^{\varepsilon_i}] = 1,\ [x_2, \prod x_{j_i}^{\varepsilon_i}] = 1, \dots \right\rangle.$$

Эта группа является универсальным центральным расширением группы с одним соотношением $T_1 = \left\langle x_1, x_2, \dots \mid \prod x_{j_i}^{\varepsilon_i} = 1 \right\rangle$. Хорошо известно, что, если $\prod x_{j_i}^{\varepsilon_i}$ не является истинной степенью в свободной группе $F(x_1, x_2, \dots)$, то группа T_1 является локально индикабельной ([1]), и, следовательно, группой с сильно однозначным умножением. Элемент $\prod x_{j_i}^{\varepsilon_i}$ имеет бесконечный порядок в группе T (см. [3]). Таким образом, уравнение $(**)$, рассматриваемое как обобщённое уравнение с переменной группой T, является унимодулярным. Следовательно, оно разрешимо по теореме $1'$. Следствие доказано.

Теорему $1'$ мы получаем как частный случай следующего утверждения.

Основная теорема. *Если всякое унимодулярное уравнение над любой свободной степенью группы G является магнусовым, то всякое унимодулярное обобщённое уравнение над группой G разрешимо над ней.*

Мы говорим, что уравнение (1) над группой G является *магнусовым**, если оно разрешимо над G и для всякого свободного сомножителя H группы G такого, что уравнение (1) не является уравнением над ним (в том смысле, что w не сопряжено в $G * \langle t \rangle$ с элементами группы $H * \langle t \rangle$), в некоторой надгруппе существует решение $\widetilde{t}$, трансцендентное над H, то есть такое, что $\langle H, \widetilde{t} \rangle = H * \langle \widetilde{t} \rangle_\infty$.

Теорема $1'$ является непосредственным следствием основной теоремы и следующей леммы, которая, по нашему мнению, интересна и сама по себе.

Лемма 1. *Любое унимодулярное уравнение над группой без кручения является магнусовым.*

На самом деле основная теорема не утверждает ничего большего, чем справедливость теоремы $1'$, так как очевидно, что над группой с кручением заведомо найдётся немагнусово унимодулярное уравнение (например, уравнение $t = g$, где g — нетривиальный элемент конечного порядка).

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если x и y — элементы некоторой группы, а X — подмножество группы, то x^y означает $y^{-1}xy$, коммутатор $[x, y]$ понимается как $x^{-1}y^{-1}xy$, а символы $\langle X \rangle$ и $\langle\langle X \rangle\rangle$ означают, соответственно, подгруппу, порождённую множеством X и нормальную подгруппу, порождённую множеством X. Кроме того, если A и B — изоморфные подгруппы некоторой группы и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм, то часто встречающиеся системы соотношений вида $\{a^x = a^\varphi \mid a \in A\}$ мы будем записывать в сокращённой форме $A^x = B$ в случае, когда ясно, о каком изоморфизме идёт речь.

* Имеется в виду теорема Магнуса о свободе [15] (см. также [3]), которую мы можем сформулировать так: *всякое уравнение над свободной группой магнусово.*

2. Доказательство основной теоремы

Положим $t=\prod t_i$. Разложим T в объединение смежных классов:

$$T=\coprod_{x\in T/\langle t\rangle} c_x\langle t\rangle, \quad \text{где } c_1=1.$$

Запишем обобщённое уравнение $(1')$ в виде

$$t\prod_i g_i{}^{c_{x_i}t^{k_i}}=1. \tag{2}$$

Пусть $X_1=\{x_i\}$ — это множество всех $x\in T/\langle t\rangle$, встречающихся в несократимой записи уравнения (2). Для каждого $x\in T/\langle t\rangle$ символом $G^{(c_x)}$ обозначим изоморфную копию группы G, подразумевая, что изоморфизм переводит $g\in G$ в $g^{(c_x)}\in G^{(c_x)}$.

Положим

$$H_1=\mathop{\ast}_{y\in X_1} G^{(c_y)}$$

и рассмотрим уравнение (относительно t)

$$t\prod_i g_i{}^{(c_{x_i})t^{k_i}}=1$$

над группой H_1.

Сопряжём уравнение (2) при помощи элемента $x\in T/\langle t\rangle$ (имеется в виду, что мы сопрягаем при помощи элемента группы T, но в результате сопряжения при помощи t получается уравнение, эквивалентное исходному). Получим уравнение

$$t^{\varepsilon_x}\prod_i g_i{}^{c_{x_i x}t^{l_i(x)}}=1,$$

где $\varepsilon_x=\pm1$ в зависимости от того, коммутирует x с t или нет, а целые числа $l_i(x)$ однозначно определяются из равенства $c_{x_i}t^{k_i}c_x=c_{x_ix}t^{l_i(x)}$. Аналогичным образом положим $X_x=X_1x=\{x_ix\}$ и напишем уравнение (относительно t)

$$w_x(t)\equiv t^{\varepsilon_x}\prod_i g_i{}^{(c_{x_ix})t^{l_i(x)}}=1$$

над группой

$$H_x=\mathop{\ast}_{y\in X_x} G^{(c_y)}.$$

Это унимодулярное уравнение над группой без кручения, согласно теореме 1, имеет решение $\widetilde{t}\in\widetilde{H_x}\supseteq H_x$.

Разумеется, мы можем считать, что

$$\widetilde{H_x}=\langle H_x,\ \widetilde{t}\mid w_x(\widetilde{t})=1\rangle.$$

Положим

$$K=\langle \mathop{\ast}_{x\in T/\langle t\rangle} G^{(c_x)},\ \widetilde{t}\mid \{w_y(\widetilde{t})=1\mid y\in T/\langle t\rangle\}\rangle.$$

Докажем, что естественное отображение $G\simeq G^{(1)}\to K$ инъективно. Для этого достаточно показать, что для любого конечного множества $Y\subseteq T/\langle t\rangle$ такого, что $X_1Y\ni 1$, естественное отображение

$$G\simeq G^{(1)}\to K_Y=\langle \mathop{\ast}_{x\in X_1Y} G^{(c_x)},\ \widetilde{t}\mid\{w_y(\widetilde{t})=1\mid y\in Y\}\rangle$$

инъективно. Этот факт очевидным образом вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть Y — конечное подмножество группы $T/\langle t\rangle$, $z\in T/\langle t\rangle$, $k=|X_1|$ и $y_1,\dots,y_{k-1}$ — различные элементы множества $X_z\cap(X_1Y)$. Тогда в группе K_Y имеет место разложение*

$$\left\langle\widetilde{t},G^{(c_{y_1})},\dots,G^{(c_{y_{k-1}})}\right\rangle=\left\langle\widetilde{t}\right\rangle_\infty * G^{(c_{y_1})}*\dots*G^{(c_{y_{k-1}})}.$$

(Отметим, что по условию элемент z может лежать в Y, а может и не лежать.)

Доказательство. Индукция по мощности множества Y. Если $Y=\{u\}$, то утверждение леммы немедленно следует из магнусовости унимодулярного уравнения $w_u(t)=1$ над группой H_u (лемма 1), так как $K_Y=K_{\{u\}}=\widetilde{H_u}$.

Если $|Y| > 1$, то из сильной однозначности умножения в группе $T/\langle t\rangle$ следует, что существует $y \in Y \setminus \{z\}$ такой, что $X_y = X_1 y \not\subseteq X_1 \cdot (\{z\} \cup Y \setminus \{y\})$, то есть $|(X_1 \cdot (\{z\} \cup Y \setminus \{y\})) \cap X_y| < k$; значит, в группе $K_{Y\setminus\{y\}}$ по предположению индукции мы имеем

$$\left\langle \widetilde{t},\ \{G^{(c_x)}\ ;\ x \in (X_1 \cdot (Y \setminus \{y\})) \cap X_y\} \right\rangle = \langle \widetilde{t} \rangle_\infty * \left(\mathop{\ast}_{(X_1 \cdot (Y \setminus \{y\})) \cap X_y} G^{(c_x)} \right).$$

Следовательно в группе

$$N = K_{Y\setminus\{y\}} * \left(\mathop{\ast}_{x \in (X_z \cap X_y) \setminus (X_1 (Y \setminus \{y\}))} G^{(c_x)} \right)$$

имеет место разложение

$$M = \left\langle \widetilde{t},\ \{G^{(c_x)}\ ;\ x \in (X_1 \cdot (\{z\} \cup Y \setminus \{y\})) \cap X_y\} \right\rangle =$$
$$= \langle \widetilde{t} \rangle_\infty * \left(\mathop{\ast}_{x \in (X_1 \cdot (\{z\} \cup Y \setminus \{y\})) \cap X_y} G^{(c_x)} \right).$$

Такое же разложение группы M имеет место в группе $\widetilde{H}_y$ по лемме 1. Тем самым мы получаем корректное разложение в свободное произведение с объединённой подгруппой:

$$K_Y = N \mathop{\ast}_M \widetilde{H}_y.$$

При этом интересующая нас подгруппа $\left\langle \widetilde{t}, G^{(c_{y_1})}, \ldots, G^{(c_{y_{k-1}})} \right\rangle$ лежит в группе N и доказываемое равенство имеет место по предположению индукции. Лемма 2, а вместе с ней и инъективность естественного отображения $G \simeq G^{(1)} \to K$, доказана.

Группа T действует на K следующим образом:

$$\widetilde{t}^y = \widetilde{t}^{\varepsilon_y}, \quad (g^{(c_x)})^y = (g^{(c_f)})^{\widetilde{t}^k}, \tag{3}$$

где $y \in T$ — произвольный элемент, а $f \in T/\langle t\rangle$ и $k \in \mathbb{Z}$ определяются из равенства $c_x y = c_f t^k$. Ясно, что это — корректно определённое действие автоморфизмами.

Возьмём соответствующее полупрямое произведение $T \leftthreetimes K$ и профакторизуем его по циклической нормальной подгруппе $\langle \widetilde{t} t^{-1} \rangle$. Это и будет искомая группа, содержащая решение:

$$\widetilde{G} = (T \leftthreetimes K) / \langle \widetilde{t} t^{-1} \rangle.$$

Действительно, G вкладывается в $\widetilde{G}$ в качестве подгруппы: $G = G^{(1)} \subseteq K \subseteq \widetilde{G}$. Согласно определению действия (3), мы имеем

$$G^{(c_x)} = G^{c_x},$$

значит, соотношение $w_1(\widetilde{t}) = 1$, выполненное в K, и равенство $t = \widetilde{t}$ в $\widetilde{G}$ дают соотношение (2). То есть группа T, рассматриваемая как подгруппа группы $\widetilde{G}$, является решением уравнения (2). Основная теорема доказана.

3. Доказательство леммы 1

Отметим один простой факт.

Лемма 3. *Пусть A — нетривиальная подгруппа группы B и $b \in B$. Тогда b трансцендентен над A в том и только том случае, когда*

$$\left\langle \{A^{b^i} \mid i \in \mathbb{Z}\} \right\rangle = \mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} A^{b^i}.$$

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно, а в другую сторону следует из того, что, если $u \in A * \langle b \rangle_\infty$ — нетривиальное соотношение между A и b в группе B и $a \in A \setminus \{1\}$, то $[a, u]$ — нетривиальное соотношение между группами A^{b^i}. Лемма 3 доказана.

До конца этого раздела будем предполагать, что $G = H * K$, уравнение (1) является унимодулярным уравнением над G и w не лежит в подгруппе, сопряжённой с $H * \langle t \rangle$ в группе $G * \langle t \rangle_\infty$. Кроме того, положим $U = G * \langle t \rangle_\infty / \langle\langle w \rangle\rangle$ (это так называемая «универсальная группа решений»). Будем доказывать, что уравнение (1) обладает решением, трансцендентным над H, или, что то же самое, элемент $t \in U$ трансцендентен над H.

Лемма 4. *Если*

$$\left\langle \{H^{t^i} \mid i \in \mathbb{Z}\} \right\rangle = \mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} H^{t^i} \tag{4}$$

в группе U, то элемент $t \in U$ является трансцендентным над H решением уравнения (1).

Доказательство. В случае, когда группа H нетривиальна, утверждение немедленно вытекает из леммы 3. Если же $H = \{1\}$, то утверждается лишь то, что элемент $t \in U$ имеет бесконечный порядок (если w не сопряжено с $t^{\pm 1}$); в явном виде этот факт отмечен в [6]. Лемма 4 доказана.

Положим

$$\overline{H} = (\mathop{\ast}_{i\in\mathbb{Z}} H_i), \quad \overline{G} = \overline{H} * K,$$

где H_i — это изоморфные копии группы H. Считая группу G вложеной в $\overline{G}$ в качестве $H_0 * K$, рассмотрим систему уравнений над группой $\overline{G}$, состоящую из исходного уравнения (1) и вспомогательных уравнений

$$\begin{cases} w(t) = 1, \\ t^{-1}H_i t = H_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

С помощью очевидных преобразований эту систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} w_1(t) = 1, \\ t^{-1}H_i t = H_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

причём w_1 не содержит фрагментов вида $t^{-1}\overline{h}t$ и $t\overline{h}t^{-1}$, где $\overline{h} \in \overline{H}$.

Если $w_1(t)$ имеет длину 1, то есть первое уравнение системы переписывается в виде $t = u$, где $u \in \overline{G}$, то вся система переписывается в виде

$$\{u^{-1}H_i u = H_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}\}.$$

Естественное отображение группы $\overline{H}$ в группу

$$\overline{\overline{G}} = \langle \overline{G} \mid \{u^{-1}H_i u = H_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}\} \rangle$$

является инъективным в силу следующей теоремы, доказанной в [12] (см. также [8]).

Теорема. *Пусть A и B — группы без кручения, $v \in (A * B) \setminus A$ и φ — автоморфизм группы A. Тогда естественные отображения*

$$A \to \langle A * B \mid \{a^v = a^\varphi \mid a \in A\} \rangle \leftarrow B$$

инъективны.

Элемент t HNN-расширения $\widetilde{G} = \left\langle \overline{\overline{G}}, t \mid H_i^t = H_{i+1} \; i \in \mathbb{Z} \right\rangle$, очевидно, является решением уравнения (1) над $G = H_0 * K$. Ясно также, что он трансцендентен над $H = H_0$ по лемме 4, так как разложение (4) имеет место в $\widetilde{G}$, а значит и в U. (На самом деле, нетрудно заметить, что $\widetilde{G} \simeq U$.)

Рассмотрим теперь случай, когда длина (то есть число вхождений $t^{\pm 1}$) слова w_1 больше единицы. Рассмотрим следующие подгруппы группы $G * \langle t \rangle_\infty$: $K_i = t^{-i}Kt^i$, $H_i = t^{-i}Ht^i$,

$$\overline{H} = \mathop{\ast}_{i=-\infty}^{\infty} H_i, \quad K^{(m)} = \mathop{\ast}_{i=0}^{m} K_i \quad \text{и} \quad G^{(m)} = \overline{H} * K^{(m)}. \tag{5}$$

Рассмотрим все возможные записи уравнения (1) в виде
$$ct\prod_{i=1}^{n} b_i t^{-1} a_i t = 1, \quad \text{где } a_i, b_i, c \in G^{(m)}. \tag{6}$$
Из всех таких записей выберем те, в которых m минимально, после чего из всех записей с минимальным m выберем запись с наименьшим n. Для такой минимальной записи (6) будем иметь:
1) $n \geqslant 1$ (то есть длина этой записи строго больше единицы);
2) $a_i \notin G^{(m-1)} = \overline{H} * K_0 * \ldots * K_{m-1}$, а $b_i \notin (G^{(m-1)})^t = \overline{H} * K_1 * \ldots * K_m$;
3) a_i трансцендентен над $G^{(m-1)}$, а b_i трансцендентен над $(G^{(m-1)})^t$.

Первое свойство обеспечивается тем, что длина w_1 больше единицы, значит в записи длины 1 $m > 0$, следовательно, m можно уменьшить, заменив все вхождения элементов K_m на фрагменты вида $t^{-1}gt$, где $g \in K_{m-1}$. Второе свойство очевидным образом следует из условий минимальности n и m. Свойство 3) вытекает из свойства 2).

Пусть теперь символы H_i и K_i обозначают абстрактные изоморфные копии групп H и K, а группы $\overline{H}$, $K^{(m)}$ и $G^{(m)}$ определены формулами (5). Рассмотрим следующую систему уравнений над группой $G^{(m)}$:
$$\begin{cases} x^{-1}H_i x = H_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}, \\ x^{-1}K_i x = K_{i+1}, \quad i \in \{0, \ldots m-1\}, \\ cx\prod_{i=1}^{n} b_i x^{-1} a_i x = 1. \end{cases} \tag{7}$$
Ясно, что всякое решение этой системы над $G^{(m)}$ будет решением уравнения (1) над G, трансцендентным над H (по лемме 4). Для завершения доказательства леммы 1 остаётся только заметить, что свойства 1) и 3) системы (7) влекут её разрешимость в силу следующей теоремы.

Теорема ([12], см. также [8]). *Пусть M и N — изоморфные подгруппы группы L, $\varphi : M \to N$ — изоморфизм, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n$ — элементы группы L, трансцендентные над M, $b_1, \ldots, b_n$ — элементы группы L, трансцендентные над N, $c \in L$. Тогда система уравнений*
$$\begin{cases} x^{-1}gx = g^{\varphi}, \quad g \in M, \\ cx\prod_{i=1}^{n} b_i x^{-1} a_i x = 1 \end{cases}$$
разрешима над L.

4. Заключительные замечания

Определение унимодулярности обобщённых уравнений (определение 1) выглядело бы изящнее, если бы условие 3) имело вид

$\widetilde{3})$ группа $T/\langle\prod t_i\rangle$ не имеет кручения.

Назовём обобщённое уравнение $(1')$, удовлетворяющие условиям 1), 2) и $\widetilde{3})$ *слабо унимодулярными.*

Вопрос 1. *Верно ли, что всякое слабо унимодулярное обобщённое уравнение над группой без кручения разрешимо над ней?*

Если мы вовсе откажемся от условия 3) в определении 1, то получим понятие *невырожденного* обобщённого уравнения.

Вопрос 2. *Верно ли, что всякое невырожденное обобщённое уравнение над группой без кручения разрешимо над ней?*

Ответ на этот вопрос неизвестен и для обычных уравнений, но, надо полагать, в обобщённой ситуации легче построить контрпример.

Можно ли доказать обобщённые аналоги других известных фактов? например, теоремы Герстенхабера–Ротхауза ([9], см. также [3])?

Вопрос 3. *Верно ли, что всякое* (*слабо*) *унимодулярное* (*или даже всякое невырожденное*) *обобщённое уравнение над конечной группой разрешимо над ней?*

Легко видеть, что из гипотезы Левина следует, что всякое разрешимое уравнение над группой без кручения магнусово. Поскольку до доказательства или опровержения этой гипотезы, судя по всему, ещё далеко, мы позволим себе сформулировать следующий условный вопрос.

Вопрос 4. *Верно ли, что утверждение о том, что всякое разрешимое уравнение над группой без кручения магнусово, равносильно гипотезе Левина?*

Нетрудно сообразить, что ответ на обобщённый вариант этого вопроса положителен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бродский С. Д. Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. ж. 1984. Т.25. №2. С.84–103.
[2] Клячко Ант. А., Прищепов М. И. Метод спуска для уравнений над группами // Вестн. МГУ: Мат., Мех. 1995. №4. С.90–93.
[3] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
[4] Clifford A. Nonamenable type K equations over groups // Glasgow Math. J. 2003. V.45. P.389–400.
[5] Clifford A., Goldstein R. Z. Equations with torsion-free coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2000. V.43. P.295–307.
[6] Cohen M. M., Rourke. C. The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups // Geometry & Topology. 2001. V.5. P.127–142.
[7] Edjvet M., Howie J. The solution of length four equations over groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V.326. P.345–369.
[8] Fenn R., Rourke C. Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups // L'Enseignment Mathématique. 1996. T.42. P.49–74.
[9] Gerstenhaber M., Rothaus O. S. The solution of sets of equations in groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1962. V.48 P.1531–1533.
[10] Howie J. On pairs of 2-complexes and systems of equations over groups // J. Reine Angew Math. 1981. V.324. P.165–174.
[11] Ivanov S. V., Klyachko Ant. A. Solving equations of length at most six over torsion-free groups // J. Group Theory. 2000. V.3. P.329–337.
[12] Klyachko Ant. A. A funny property of a sphere and equations over groups // Comm. Algebra. 1993. V.21. P.2555–2575.
[13] Levin F. Solutions of equations over groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V.68. P.603–604.
[14] Lyndon R. C. Equations in groups // Bol. Soc. Bras. Math. 1980. V.11. №1. P.79–102.
[15] Magnus W. Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz). // J. Reine Angew Math. 1930. V.163. P.141–165.
[16] Promyslow S. D. A simple example of a torsion free nonunique product group // Bull. London Math. Soc. 1988. V.20. P.302–304.
[17] Rips E., Segev Y. Torsion free groups without unique product property // J. Algebra 1987. V.108. P.116–126.
[18] Stallings J. R. A graph-theoretic lemma and group embeddings // Combinatorial group theory and topology (ed. Gersten S. M, Stallings J. R.). Annals of Mathematical Studies. 1987. V.111. P.145–155.
[19] Strojnowski A. A note on u.p. groups // Comm. Algebra 1980. V.8. P.231–234.